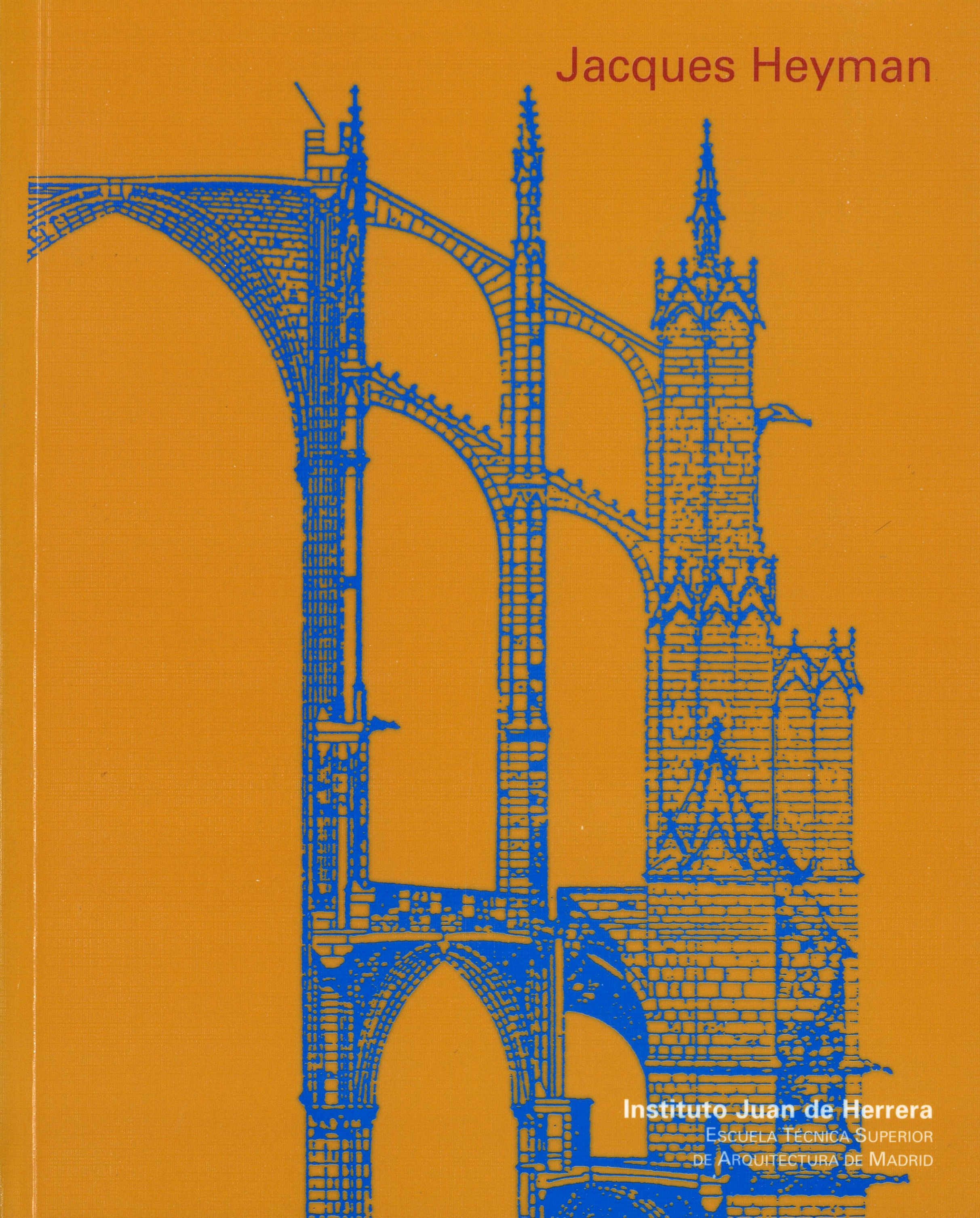
Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Volumen I

Jacques Heyman



Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior
de Arquitectura de Madrid

Este libro recopila, por vez primera, los ensayos del profesor Heyman sobre el funcionamiento de las estructuras de fábrica. Corresponde al profesor Heyman el mérito de haber «traducido» las teorías y teoremas del análisis límite a las fábricas. Esto supone, sin pérdida de rigor, una simplificación importante del aparato teórico pero, sobre todo, permite una comprensión cualitativa (y cuantitativa) del funcionamiento de estas construcciones.

Así, es posible entender por qué las catedrales góticas tienen arbotantes, cuál es la función de los nervios de las bóvedas de crucería o cómo se comportan los puentes de piedra Aún más, permite explicar la enorme estabilidad de las antiguas fábricas (el Panteón de Roma lleva en pie casi dos milenios sin reparaciones estructurales. Santa Sofía soporta desde el siglo VI sismos de importancia; los puentes romanos transportan cargas muy superiores a las de su época, etc.).

Además, el análisis límite de las fábricas, permite interpretar correctamente y sin alarmismos la presencia, inevitable en estas construcciones, de grietas. Éstas no son, necesariamente, signos de ruina; simplemente expresan la naturaleza del material y la adaptación del edificio a los pequeños movimientos del entorno. En resumen, el libro es un «manual» de las estructuras de fábrica y mejorará el conocimiento sobre nuestro patrimonio construido.

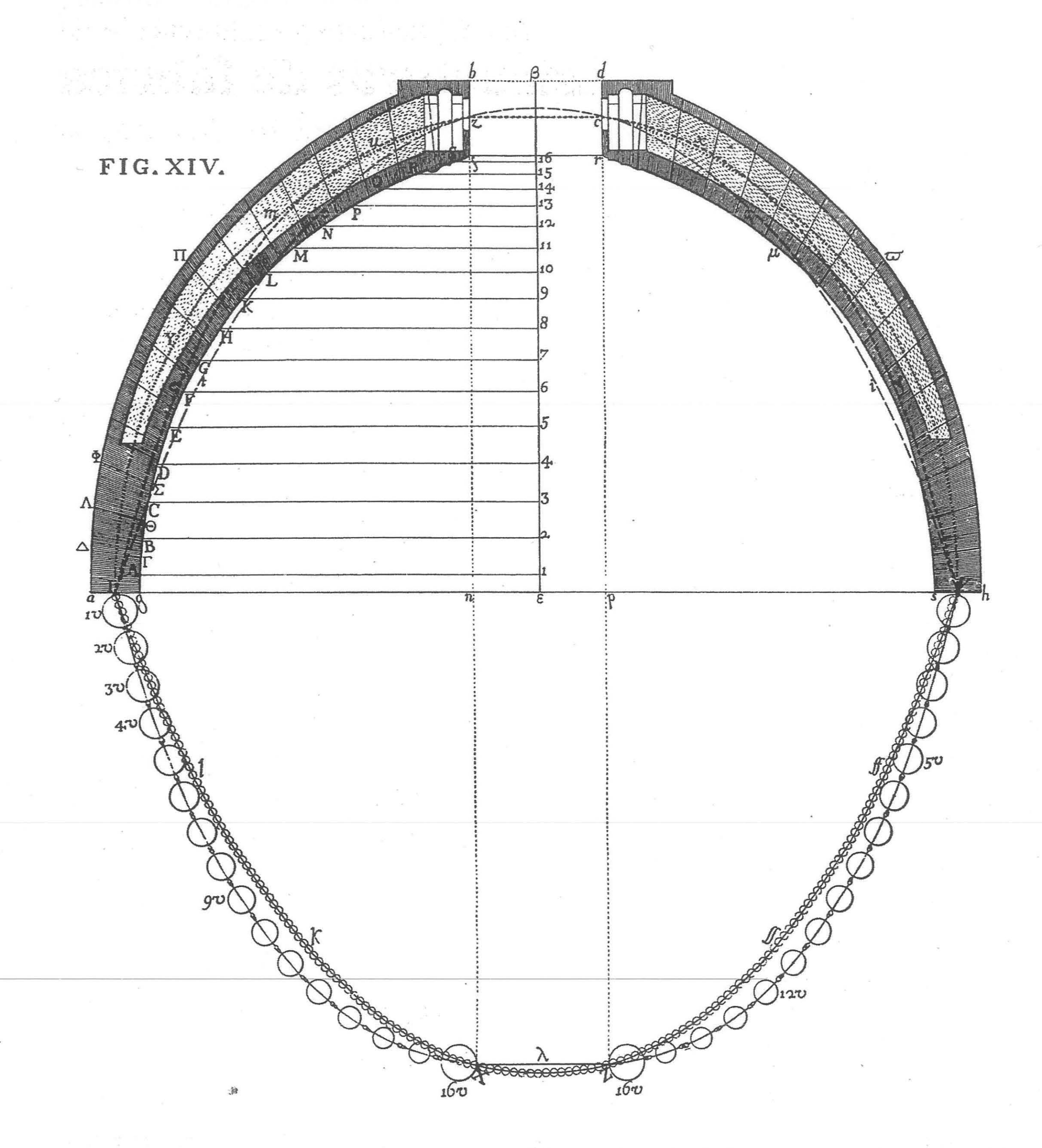
Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones
Colección dirigida por Santiago Huerta

M. Arenillas et al. (Eds.). **Actas del V Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
F. Bores et al. (Eds.). **Actas del II Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
A. Casas et al. (Eds.). **Actas del I Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
A. Choisy. **El arte de construir en Roma**
A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio**
A. Choisy. **El arte de construir en Egipto**
A. Choisy. **Historia de la arquitectura** (en preparación)
I. J. Gil Crespo. (Ed.). **Historia, arquitectura y construcción fortificada**
J. Girón y S. Huerta. (Eds.) **Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir**
A. Graciani et al. (Eds.). **Actas del III Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
R. Guastavino. **Escritos sobre la construcción cohesiva y su función en la arquitectura**
J. Heyman. **Análisis de estructuras: un estudio histórico**
J. Heyman. **El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica**
J. Heyman. **La ciencia de las estructuras**
J. Heyman. **Teoría básica de estructuras**
J. Heyman. **Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. 2 vols**
J. Heyman. **Vigas y pórticos**
S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas**
S. Huerta (Ed.). **Actas del IV Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta et al. (Eds.). **Actas del VI Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta et al. (Eds.). **Actas del VII Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta et al. (Eds.). **Actas del VIII Congreso Nacional de Historia de la Construcción**
S. Huerta (Ed.). **Las bóvedas de Guastavino en América**
S. Huerta (Ed.). **Essays in the History of the Theory of Structures**
S. Huerta (Ed.). **Proceedings of the 1st International Congress on Construction History**
J. Monasterio. **Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas** (en preparación)
J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el siglo XVIII**
H. Straub. **Historia de la ingeniería de la construcción** (en preparación)
G. E. Street. **La arquitectura gótica en España**
H. Thunnissen. **Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura**
A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas**
E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval**
R. Willis. **La construcción de las bóvedas en la Edad Media**

Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Volumen 1



Verificación de la estabilidad de la cúpula de San Pedro de Roma por Giovanni Poleni. La línea de empujes se ha obtenido por el principio de la cadena invertida de Hooke. (G. Poleni *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano...* Padua: 1748)

Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Colección de ensayos. Volumen 1

Jacques Heyman

edición a cargo de:
Santiago Huerta

Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Madrid

2ª reimpresión, 2015
1ª edición, 1995
© Jacques Heyman, 1995
© de la edición en español, Instituto Juan de Herrera, 2015
© Todos los derechos reservados
ISBN: 978-84-9728-544-5 (Obra completa); ISBN: 978-84-9728-545-2 (Vol. I)
Depósito legal: M. 24.390-2015
Cubierta: Fragmento de la *coupe restaurée* de la catedral de
Beauvais, según Benouville.
Fotocomposición e impresión:
Gracel, s. l. l.
28108 Alcobendas

Índice

Presentación

En 1995 se publicó el primer volumen de *Estructuras de fábrica* que reunía los ensayos del profesor Heyman sobre el tema publicados entre 1966 y 1993. Estos trabajos conforman, de hecho, la moderna teoría de estructuras de fábrica. El libro tuvo un éxito inmediato y en 1999 se realizó una reimpresión. Ésta llevaba agotada varios años y la demanda constante nos anima a realizar una nueva. Hemos querido hacerla coincidir con un segundo volumen de ensayos del profesor Heyman correspondientes a los años 1993–2014. De esta manera, la presente edición se compone de dos volúmenes, y ofrece un corpus casi completo de todas los artículos publicados por el profesor Heyman entre 1966 y 2014 sobre estructuras históricas. Finalmente, esta edición coincide con el noventa cumpleaños del profesor Heyman y queremos con ella rendir un homenaje a su obra y a su persona.

Cumplidos ya veinte años de la primera edición, creo que no es exagerado decir que la difusión de la obra del profesor Heyman ha mejorado notablemente el entendimiento de las estructuras de fábrica en España y, en general, el de la teoría de estructuras. La frase del noble ilustrado Julius Hardegg «si conoces lo antiguo, comprenderás lo nuevo», adquiere pleno significado si se estudia el desarrollo de la teoría estructural, campo que el profesor Heyman ha iluminado con numerosas contribuciones (véase en particular su libro *Análisis de estructuras: un estudio histórico*, en esta misma colección). En efecto, sabemos hoy que la seguridad de una estructura de fábrica es un problema de geometría: la estabilidad queda asegurada por la forma adecuada del edificio en su conjunto y de cada uno de sus elementos. Este hecho, bien conocido por los antiguos maestros constructores, se puede demostrar de forma rigurosa dentro del moderno marco del análisis límite de estructuras de fábrica, fundado por el profesor Heyman. ¿Podría ser de otra manera? ¿Podrían ser el Panteón de Roma, las catedrales góticas, Santa Sofía o Santa Maria del Fiore fruto de un empirismo ciego, de un imposible (por antieconómico e irracional) proceso de prueba y error? ¿Se levantaron las altas bóvedas de Beauvais hasta casi 50 m por si había suerte y no se caían?

El profesor Heyman nos ha regalado un conocimiento precioso, aquel que no sólo permite «hacer» sino que lleva a «entender» de manera profunda el proyecto estructural, antiguo y moderno. La teoría plástica ha demostrado, más allá de toda duda, que los métodos universales de análisis que pretenden suministrar el estado real de la estructura —automatizados hoy con cada vez más sofisticados programas de ordenador— son una quimera. Si ni siquiera podemos conocer las fuerzas en una silla de cuatro patas (véase el cap. 4 del vol. 2), mucho menos podremos conocer las fuerzas internas en las

estructuras reales que, como dice el profesor Aroca, «son sillas de muchas patas». Ciertamente, la búsqueda del «estado real» de la estructura se ha demostrado un sinsentido, y hay una evidencia experimental abrumadora que lo confirma desde los años 1920 (aunque los cambios de las fuerzas internas en los puentes de fábrica ya se habían observado cien años antes por Vicat).

El teorema de la Seguridad nos lleva, como corolario fundamental, al «enfoque del equilibrio», enunciado por primera vez por el profesor Heyman en el decenio de 1960, y que había pasado desapercibido a todos los autores anteriores que se habían ocupado de los teoremas fundamentales, desde su formulación en 1936 por el ingeniero ruso A. Gvozdev. Todavía hoy asistimos, perplejos, a la resistencia que la profesión estructural, educada en la teoría elástica clásica, opone a este hecho que no sólo se demuestra con una teoría de matemática aplicada de altos vuelos, sino que explica el fenómeno incuestionable de que este enfoque del equilibrio —que conduce en las fábricas a afirmaciones geométricas— está en la base del proyecto estructural desde los orígenes de la civilización.

Todos los escritos del profesor Heyman combinan el dominio absoluto de la teoría de estructuras con una percepción clara de su objetivo final: entender el comportamiento de las estructuras reales de manera que se puedan proyectar o analizar. Aunque el libro se centra en estructuras históricas, las observaciones teóricas se aplican también a las estructuras modernas de hormigón y acero, y el lector atento descubrirá cómo el estudio de las estructuras antiguas ilumina el proyecto y análisis de estructuras modernas. No se puede separar la teoría de la práctica: las estructuras no son una abstracción matemática y se construyen en el mundo real, con todas sus «imperfecciones».

Las estructuras de fábrica expresan la forma de construir la arquitectura con piedra o ladrillo y mortero a lo largo de milenios. Curiosamente, aunque las formas cambian enormemente las características básicas del material son las mismas y la teoría se aplica igualmente a templos griegos, catedrales góticas, iglesias tardo-barrocas o a las delgadas bóvedas tabicadas de Guastavino.

El profesor Heyman ha marcado el camino para sucesivas generaciones de arquitectos o ingenieros que trabajan en el análisis y la consolidación (en su caso) de las estructuras históricas. Podemos decir que la parte básica de la teoría de las fábricas está ya formulada, pero su aplicación requiere de estudios de detalle de las diferentes formas estructurales. El profesor Heyman ha estudiado las más importantes, pero queda todavía mucho por investigar. Por otra parte, en el campo del análisis de edificios existentes la casuística es infinita; no hay dos casos iguales y el analista debe dominar la teoría, para luego decidir qué enfoque es el más adecuado en cada caso. En un mundo de infinitas formas y problemas, la teoría es la roca que sirve de fundamento a nuestro trabajo.

Madrid, julio de 2015 Santiago Huerta

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al profesor Heyman acceder a la publicación de sus ensayos y su constante disponibilidad, durante ya más de dos decenios, para impartir su magisterio guiándonos por el amplio campo de la teoría de estructuras. La colección de Textos, que tuvo *Estructuras de fábrica I* como su primer volumen en 1995, y cuenta ya con más de treinta títulos, no hubiera sido posible sin el apoyo y los consejos de Ricardo Aroca Hernández-Ros, presidente del Instituto Juan de Herrera. Por otra parte, Antonio de las Casas, durante su periodo como gerente del CEHOPU, fue un colaborador ideal, que entendió perfectamente las dificultades del trabajo de editar libros. Agradezco también a la profesora Paula Fuentes su ayuda atenta y minuciosa en los trabajos de edición del volumen 2, incluyendo su detallado índice alfabético. Finalmente, quiero reconocer la dedicación y el excelente trabajo de todos los traductores.

Prólogo de la primera edición

Las construcciones de fábrica constituyen una parte fundamental del patrimonio de la humanidad. De hecho la fábrica dominó desde los orígenes de la civilización hasta que, a mediados del siglo XIX, la aparición de nuevos materiales (hierro fundido, hormigón armado y acero) provocó una lenta decadencia que finalmente a principios del siglo XX le privó de su carácter hegemónico.

El conocimiento de los sistemas constructivos de fábrica y de su funcionamiento estructural es esencial para comprender, apreciar y valorar nuestro patrimonio construido. Interesa, pues, a arquitectos e ingenieros, a arqueólogos e historiadores, a restauradores y, en general, a cualquier persona con un interés genuino en las construcciones antiguas.

En este sentido este libro es oportuno y necesario. En él se recopilan, por vez primera, los artículos que en distintas revistas ha publicado el profesor Heyman sobre el tema de la teoría e historia de las construcciones de fábrica, y de los principios de intervención que de ellas se deducen. (Se han incluido también algunos que tratan de la aplicación de la teoría a armaduras de madera.) Estos ensayos publicados a lo largo de los últimos 25 años arrojan nueva luz sobre el comportamiento de las fábricas. De hecho, el tema está tan vinculado a la obra personal del profesor Heyman que sería difícil imaginar cuál sería su estado actual sin sus lúcidas aportaciones.

El profesor Heyman formó parte del equipo que en los años cincuenta y sesenta trabajando bajo la dirección de Lord Baker realizó contribuciones decisivas al desarrollo de la teoría plástica del acero y del hormigón armado. Sin dejar este campo, a finales de los sesenta «tradujo» los teoremas y principios fundamentales del análisis límite de estructuras porticadas a las estructuras de fábrica. En los siguientes años aplicóJx los principios y herramientas del análisis límite al estudio de las formas estructurales básicas de la fábrica: arcos y arbotantes, cúpulas, bóvedas de crucería y de abanico, agujas góticas y torres, puentes, etc. El profesor Heyman es también un erudito en temas de Historia de la Construcción y sus ensayos están enriquecidos con continuas referencias a las antiguas construcciones del pasado: el Panteón de Adriano, Santa Sofía, las catedrales góticas, Santa María de la Flor, San Pedro..., son objeto de análisis en las páginas que siguen.

El análisis límite o plástico de las fábricas permite una comprensión cualitativa y cuantitativa de su comportamiento. En particular, justifica rigurosamente el empleo del «enfoque del equilibrio»; es decir, para demostrar que una estructura de fábrica es segura basta con encontrar una situación posible de equilibrio compatible con las cargas, es decir, un posible camino de las fuerzas dentro de la fábrica. (Curiosamente para la mentalidad estructural moderna la manera de dar seguridad a una estructura de fábrica consiste en darle la forma adecuada.) Todas las disposiciones constructivas tradicionales van encaminadas a este fin. Así, es fácil deducir porqué y dónde se deben colocar los arbotantes, que los botareles deben estar cargados con pináculos, que los

nervios de las bóvedas de crucería refuerzan las direcciones principales de transmisión de los esfuerzos, que los senos de las bóvedas deben estar rellenos de mampostería, etc. En resumen, el análisis límite por equilibrio suministra la clave para la comprensión de las formas de las fábricas.

El restaurador no sólo necesita comprender los principios que garantizan la estabilidad de las construcciones de fábrica; debe ser capaz de interpretar y valorar las patologías que en ellas aparecen. Las estructuras de fábrica están, casi invariablemente, agrietadas. Para nuestra mentalidad estructural, educada en la teoría de la elasticidad aplicada a estructuras de hormigón y acero, una grieta es siempre potencialmente peligrosa. Esto no es así en las estructuras de fábrica. La fábrica es un material unilateral, resiste compresiones pero es incapaz de soportar las tracciones. Por tanto, la única manera en la que puede adaptarse un edificio de fábrica a los pequeños movimientos inevitables del entorno es agrietándose. Es precisamente la capacidad de formar grietas lo que hace que las estructuras de fábrica sean tan adaptables, que sean capaces de encontrar siempre situaciones de equilibrio a lo largo de siglos (catedrales góticas) o milenios (el Panteón de Roma). Este punto de vista, que se deduce rigurosamente de los principios del análisis límite, es reconfortante para el restaurador y debe afectar profundamente la política de intervención en monumentos. ¿Cuántas intervenciones innecesarias, cuando no perjudiciales, se hubieran podido evitar con una adecuada comprensión del funcionamiento de las fábricas?

Este libro tiene vocación de «manual», de libro de estudio y consulta. La decisión de incorporar la práctica totalidad de los ensayos del profesor Heyman, conduce a ciertas repeticiones, pero también permite al lector decidir en qué orden y de qué manera usará el libro. El lector deberá localizar qué parte le interesa en cada momento (deberá decidir qué hojear, qué leer de corrido o qué estudiar con detenimiento). Para facilitar su consulta se ha incluido un detallado índice alfabético. También he elaborado un glosario de términos; éste nació de forma natural durante el proceso de revisión de las traducciones, buscando tanto la precisión en el empleo de los términos, como conseguir un texto homogéneo y coherente. (No pretende en modo alguno sustituir a cualquiera de los excelentes glosarios y vocabularios de términos de arte y arquitectura, sólo se busca dar autonomía y facilitar el empleo del libro.) En el proceso de revisión y edición he tenido que modificar en ocasiones los textos de las excelentes traducciones de Antonio Azcona Olivera, Jorge Conde Conde, Rafael García García, Efrén García Grinda, Fernando Inglés Musoles, Roberto Osuna Redondo y María Teresa Valcarce Labrador. Así, pues, soy el único responsable de cualquier error que pueda aparecer en el libro.

El objetivo de este libro es difundir en España y Latinoamérica las teorías del análisis límite de estructuras de fábrica, desarrolladas por el profesor Heyman, con el fin de aumentar nuestro conocimiento de las antiguas construcciones de fábrica. Al conocimiento deberá seguir el aprecio y el respeto por estas grandes obras del pasado, y por los hombres que las hicieron posibles.

Madrid, octubre de 1995 Santiago Huerta

AGRADECIMIENTOS: Agradezco al profesor Jacques Heyman las facilidades para la edición de este libro. Su publicación se debe al apoyo constante y entusiasta del profesor Ricardo Aroca, presidente del Instituto Juan de Herrera y Director de la ETSAM. El trabajo de edición ha durado casi dos años; agradezco el estímulo que a lo largo de este tiempo he recibido de mis colegas de la ETSAM, singularmente de José Miguel Ávila y Enrique Rabasa. Jorge Conde me ayudó durante las tareas de maquetación. Finalmente, agradezco a mi padre Fernando Huerta López, catedrático de Física, recientemente fallecido, la revisión del capítulo trece, sus orientaciones y consejos sobre las unidades físicas y su significado y, sobre todo, su ejemplo de tantos años de amor y dedicación a los libros que me animó a acometer esta tarea.

Prólogo de la segunda edición

La primera edición de este libro se ha agotado en poco más de tres años y este hecho demuestra el interés que hay en España por las estructuras de fábrica. El objetivo de difundir las teorías del Profesor Heyman se ha cumplido, al menos en parte. Con esta segunda edición, se prentende llegar a un círculo más amplio de lectores. En efecto, si para comprender las teorías del Análisis Límite hace falta una sólida formación en teoría de estructuras, las consecuencias que de ella se derivan (principalmente de orden geométrico) pueden ser apreciadas por cualquier estudioso de la arquitectura, que encontrará una nueva vía para entender mejor las construcciones del pasado.

Esta segunda edición coincide con la publicación en español de un nuevo libro del Profesor Heyman en esta misma colección: *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*. Ambos libros son complementarios. En su último libro el Profesor Heyman realiza una síntesis ordenada de la teoría de estructuras de fábrica. El lector obtiene, así, un panorama de conjunto. Los estudios de detalle, los aspectos específicos de la teoría, y, también, artículos de divulgación, que forman este libro dan información detallada sobre aspectos que en *El esqueleto de piedra* sólo se mencionan.

Existe en la actualidad un debate sobre cuál es la mejor manera de aproximarse al estudio de las estructuras de fábrica y creo pertinente hacer algunos comentarios al respecto.

El análisis de estructuras no analiza las estructuras reales sino un «modelo» de dichas estructuras. El modelo deberá recoger las características esenciales desde el punto de vista mecánico de la estructura en cuestión. Las hipótesis que realiza el Análisis Límite parecen razonables: la fábrica no resiste tracciones, las tensiones son muy bajas (en general) y el rozamiento es suficientemente alto para que no se produzcan fallos por deslizamiento (la estructura conserva su forma). Si se cumplen estas suposiciones el análisis de estructuras de fábrica queda dentro del Análisis Límite, verificándose los Teoremas Fundamentales. En particular, el Teorema de la Seguridad permite el enfoque del equilibrio: para demostrar que una fábrica es segura basta con encontrar una solución de equilibrio que no viole la condición de límite del material, la fábrica debe trabajar a compresión.

Estas hipótesis son sencillas y fáciles de verificar; la teoría que de ellas se deriva permite una comprensión profunda del comportamiento de las fábricas. En último término conduce a un estudio de la forma geométrica de las estructuras. En este punto, la moderna teoría confluye con la antigua teoría de las reglas geométricas de los antiguos constructores. No podía ser de otra manera, y esto explica el éxito asombroso que aquellos tuvieron.

Otros enfoques no parecen tan razonables. Y la difusión que tienen debería inducir a la reflexión. ¿Podemos realizar, por ejemplo, un cálculo elástico? ¿Realmente podemos considerar un edificio de fábrica construido por un material elástico, homogéneo,

isótropo, y resistente igualmente a tracción y a compresión? ¿Podemos hablar de cimentaciones rígidas o empotramientos perfectos? En definitiva, ¿podemos pretender tener un conocimiento exacto de las condiciones de contorno?

Este tipo de afirmaciones parecen más bien dictadas por la «necesidad» de adaptarse a un cierto programa de ordenador que por un estudio reflexivo de las estructuras reales. Es preciso saber que si empleamos un modelo incorrecto los resultados del análisis serán igualmente incorrectos y, en cualquier caso, difíciles de interpretar.

En este contexto hay que situar la aplicación indiscriminada del Método de los Elemenentos Finitos elásticos al análisis de antiguas estructuras de fábrica. El abaratamiento del coste del cálculo por ordenador ha hecho que el Método de los Elementos Finitos (MEF) haya tenido en los últimos años gran difusión. De hecho, desde los años 1960 el MEF ha fascinado a una buena parte de la profesión estructural, que cree haber encontrado una «herramienta universal» para el análisis de estructuras. Los ingenieros y arquitectos especializados en restauración de monumentos no han escapado a esta tendencia.

Los MEF elásticos presentan los mismos inconvenientes que los métodos de cálculo elástico citados antes: pobre modelización del material y necesidad de hacer hipótesis tajantes sobre las condiciones de contorno. Los resultados, además, son muy sensibles a pequeñas variaciones de los parámetros anteriores y difíciles de interpretar en relación a problemas de estabilidad que suelen ser los más críticos en estructuras de fábrica (los programas de MEF van orientados a análisis de resistencia y deformación, no de estabilidad).

Los programas de MEF no-lineal suponen un avance considerable respecto a los anteriores. Para el caso de arcos de fábrica se están empleando desde 1980. Las últimas versiones permiten estudiar los posibles agrietamientos e incluso aproximase al cálculo de cargas de colapso, en determinadas condiciones. Subyace el problema de la extrema sensibilidad de los resultados a las condiciones de contorno, historia de carga, movimientos durante el descimbrado, etc.

Desde el punto de vista del Análisis Límite, un análisis de MEF conduce a una distribución de tensiones en equilibrio con las cargas y, por tanto, da una solución segura si no se viola la condición de límite del material (esto es, si no hay tracciones). El que esta solución sea la «real» o más exacta que otras obtenidas con otros métodos (quizá mediante un sencillo cálculo de líneas de empujes), depende de la elección de las hipótesis de partida y no de la herramienta de cálculo empleada. En este sentido, un cálculo gráfico manual puede ser más preciso que un complicado análisis por ordenador. De hecho, la potencia del Primer Teorema del Análisis Límite y del mencionado enfoque del equilibrio que de él se deduce, consiste precisamente en poder trabajar con cualquier configuración de equilibrio y poder definir la seguridad sin necesidad de realizar hipótesis imposibles de verificar.

Finalmente, hay que distinguir entre el modelo (y la teoría en que se basa) y la herramienta de cálculo empleada. Así, un análisis de líneas de empujes puede realizarse gráficamente (quizá dibujando con escuadra y cartabón, o con ordenador) o analíticamente (por ejemplo, integrando la ecuación diferencial de segundo orden de la línea de empujes de un arco, o estableciendo las ecuaciones de equilibrio de un sistema de bloques en contacto seco y directo). Cualquier método será válido si las hipótesis de partida son correctas y da la precisión suficiente. Un énfasis excesivo en la precisión no parece sensato; como decía Sejourné (gran ingeniero francés de principios del siglo XX): «¿para qué preocuparse de los decimales si los enteros están ya bajo sospecha?»

La precisión hay que buscarla en una buena definición del modelo de la estructura. El primer paso es usar el marco teórico adecuado, pero el refinamiento del modelo exige reflexión y experiencia por parte del analista: no es, no puede ser, un proceso automático. El Análisis Límite nos da el marco teórico preciso, el alfabeto para poder iniciarnos en la lectura de los edificios. La interpretación correcta sólo vendrá tras años de observación y experiencia. Sólo ésto nos permitirá conocer la potencia y limitaciones de la teoría. Animo al lector a que inicie este camino.

Madrid, marzo de 1999 Santiago Huerta

Teoría, historia y restauración de

Estructuras de fábrica

Volumen 1

Nota sobre las unidades de medida

Los ensayos originales recogidos en este libro empleaban distintos sistemas de unidades según la revista de publicación. La coherencia del libro exigía decidirse por un único sistema. Se ha optado por el sistema internacional (SI) en cumplimiento de las recomendaciones y acuerdos internacionales y, sobre todo, porque su empleo se ha extendido extraordinariamente en los últimos años en Europa. En España, sorprendentemente, se sigue empleando el antiguo sistema métrico. La conversión no es tan difícil si se utilizan consistentemente las mismas unidades. Así, en este libro se ha empleado para las cargas el kilonewton (1 kN $\simeq$ 100 kp = 0,1 t) y para las tensiones el newton por milímetro cuadrado (1 N/mm^2 $\simeq$ 10 kp/cm^2). Basta, pues, multiplicar o dividir por 10 para pasar al antiguo sistema. [N. del E.]

Introducción

Este libro recoge los artículos que he escrito durante los últimos 25 años sobre las construcciones de fábrica, y estoy muy contento de que se traduzcan al español y se recopilen de esta manera. Estoy profundamente agradecido al Dr. Santiago Huerta por haber realizado esta tarea formidable.

Los ensayos recogidos en este libro son técnicamente sencillos, es más, la «teoría de estructuras» es una de las disciplinas más sencillas de la ciencia de la ingeniería. El tema es sencillo porque, en esencia, sólo pueden escribirse tres tipos de ecuaciones; además, estas ecuaciones son normalmente lineales.

La primera ecuación expresa el equilibrio estático de la estructura del edificio: la estructura en su conjunto, y las partes que la componen, tienen que estar en equilibrio bajo la acción de las cargas exteriores y de las reacciones en sus apoyos. Si las ecuaciones de equilibrio bastan para determinar los esfuerzos internos (es decir, las «tensiones» en las distintas partes de la estructura), entonces la estructura está determinada estáticamente, es isostática.

Sin embargo, la estructura hiperestática general requiere el empleo de otros dos tipos de ecuaciones para determinar las tensiones internas. La primera de ellas describe la geometría de la deformación de la estructura, y en particular realiza afirmaciones sobre la forma en que ésta se apoya (por ejemplo, que las cimentaciones son rígidas y empotradas). Finalmente, las deformaciones internas se relacionan con las tensiones internas mediante la ley de tensión/deformación del material. Cuando estas tres ecuaciones se combinan siguen siendo sencillas, pero los cálculos pueden resultar muy largos, requiriéndose el empleo de ordenadores (como en la aplicación de elementos finitos).

Es fácilmente observable que una estructura de fábrica está con frecuencia agrietada, y esta observación requiere una primera modificación de la teoría de estructuras convencional. La fábrica es un material unilateral: un conjunto de piedras (o ladrillos), recibidas con un mortero pobre o sin mortero en absoluto, puede soportar con facilidad esfuerzos de compresión, pero es incapaz de resistir tracciones. Por tanto, la ley de tensión/deformación que se emplee en cualquier análisis de la fábrica debe reflejar este comportamiento unilateral.

Una segunda modificación, mucho más profunda, de la teoría convencional nace de la consideración de que las grietas están presentes de hecho dentro de la estructura de fábrica. Los agrietamientos pueden ser inofensivos y esperables en un material unilateral, pero ¿por qué se han producido? En casi todos los casos se encontrará que son resultado de una alguna perturbación del entorno; una cimentación ha asentado, o el estribo de un puente ha cedido. Resulta que movimientos muy pequeños de este tipo pueden producir un efecto importante en el estado real de la estructura.

Como un ejemplo trivial, los esfuerzos en las patas de una mesa de tres patas pueden deducirse a partir de las ecuaciones de equilibrio; las tres ecuaciones de la estática bastan para determinar las tres incógni-

tas. Por el contrario, la mesa habitual de cuatro patas está estáticamente indeterminada (es hiperestática); pueden escribirse las tres mismas ecuaciones de la estática, pero si queremos hallar los esfuerzos en las cuatro patas será preciso considerar las propiedades (elásticas) del material de la mesa y las condiciones de contorno. El programa de ordenador utilizado para resolver este problema generará una solución, pero esconderá el hecho de que se han realizado una serie de suposiciones. En particular, casi con seguridad se habrá considerado que el suelo sobre el que se apoya la mesa es rígido, con las cuatro patas justo en contacto con él antes de cargar la mesa.

Una mesa real, sobre un suelo duro real, cojea; una de las patas se separará del suelo y, aunque el programa de ordenador puede haber calculado la carga en dicha pata, la carga es en realidad cero. Además, un ligero movimiento de la mesa sobre el suelo duro e irregular hará que esa misma pata entre de nuevo en contacto, descargando al mismo tiempo otra de las patas —la mesa cojeará de otra manera. La mesa sigue siendo, evidentemente, una estructura capaz de resistir cargas, pero puede existir en muy diferentes estados de equilibrio.

La analogía de la mesa puede aplicarse a la estructura de fábrica. Un pequeño cambio en el entorno (un desplazamiento casi inapreciable de un estribo) puede alterar profundamente las tensiones en un puente. Además, del mismo modo que la situación precisa de una mesa sobre un suelo irregular es fruto del azar, así los desplazamientos de los estribos de un puente son esencialmente imposibles de conocer. Una adecuada teoría de las fábricas no debe basarse en el conocimiento de estos efectos ignorados del entorno.

Así, los ensayos de este libro exploran el análisis de la fábrica empleando sólo las ecuaciones de equilibrio (y el mismo enfoque se utiliza en el análisis de las armaduras de madera). Las ecuaciones relacionadas con las deformaciones internas y las condiciones de contorno no se tienen en cuenta, como tampoco se considera la tercera ecuación del análisis estructural —las tensiones en las fábricas son normalmente tan bajas que no hay peligro de fallo por aplastamiento, de manera que las propiedades del material no entran en los cálculos.

Una rama ya sencilla de la ciencia de la ingeniería se ve reducida al estudio de un solo conjunto de ecuaciones, las del equilibrio estático. Espero que los ensayos de este libro demostrarán que pueden realizarse afirmaciones significativas sobre la fábrica utilizando únicamente esta herramienta.

1

El esqueleto de piedra

Fitchen[1] comenta «...la total falta de documentación escrita tanto sobre las estructuras como sobre los procesos constructivos...» de las edificaciones góticas. Las obras modernas han sido, en general, más descriptivas que analíticas desde el punto de vista técnico. Dos autores alemanes del siglo XIX acometieron algunos análisis estructurales dentro de sus extensos tratados sobre las técnicas de construcción en piedra. Breymann[2] muestra una excelente comprensión del comportamiento de la fábrica, y Ungewitter[3] da una descripción general del funcionamiento estructural de una catedral gótica. Más tarde, Guadet[4] realizó algunos cálculos sobre bóvedas y arbotantes que fueron después recogidos y ampliados por Rosenberg.[5] Por otra parte, Frankl[6] ha hecho lo que parece ser un estudio casi completo de las fuentes documentales; sin embargo, sus intereses son principalmente estéticos e históricos más que técnicos.

De los escritos coetáneos, los de Suger[7] no tienen, claramente, un carácter técnico, y el Álbum de Villard de Honnecourt[8] parece ser una colección de apuntes personales y, de forma exasperante, supone que el lector ya sabe cómo construir una catedral.

Fitchen ha avanzado considerablemente en la reconstrucción de las técnicas constructivas que debieron haber utilizado los maestros constructores medievales; en sus estudios Fitchen se ve obligado a considerar también la estructura portante. El objetivo del presente artículo es considerar algunos de los aspectos técnicos y estructurales de la construcción en piedra y aplicar los principios generales deducidos al esqueleto gótico. Uno o dos elementos (arbotantes, bóvedas de piedra) se tratarán con cierto detalle.

El libro de Fitchen sobre la construcción de las catedrales góticas es básico en este estudio por lo que cualquier referencia sólo a Fitchen lo es a su libro. De forma análoga, al *Dictionnaire raisonné...* de Viollet-le-Duc[9] se hará referencia simplemente como Viollet-le-Duc.

Al tiempo que se conoce muy poco de las técnicas constructivas (en sentido estricto) de los maestros de obra medievales, los estudios sobre Villard y otros manuscritos han desvelado algunos de los «misterios» de las logias de canteros. Estas reglas de construcción recuperadas son enteramente numéricas y abordan la determinación práctica de $\sqrt{2}$ la proporción relativa que una parte del edificio debe guardar con otra, la determinación automática de los alzados a partir de las plantas, y así sucesivamente. Es casi seguro que los constructores eran incapaces del más sencillo análisis estructural. Uno de los problemas medievales clásicos era el del paralelogramo de fuerzas, no resuelto hasta finales del siglo XVI; sin reglas sobre composición de fuerzas, o incluso sin una idea clara del propio concepto de fuerza y de su línea de acción (Straub[10]), es difícil imaginar cómo se habrían podido hacer los cálculos para hallar, por ejemplo, la línea de empujes de un arbotante.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The Stone Skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249-79. Traducción de Roberto Osuna Redondo.

Sin embargo, no puede haber duda alguna sobre las capacidades técnicas de los maestros constructores; una catedral que sobrevive casi intacta durante 800 años es en verdad una obra de genio. Asimismo, el sistema estructural empleado, se mire como se mire, es casi perfecto. Naturalmente los avances tuvieron que hacerse por prueba y error, experimentando tanto con las estructuras reales como con modelos. Pero mirando, por ejemplo, los muros completamente acristalados de la Sainte Chapelle de París, se está tentado a percibir una maestría en la técnica constructiva mayor que la que pueda ser atribuida a meros tanteos.

Esta maestría se mantuvo con total autoridad sólo durante un período de tiempo muy corto y en una región muy limitada: durante 144 años en Francia. En 1140 se comenzaron las obras del nuevo coro de la iglesia abacial de Saint-Denis; como dice Pevsner:[11] «Puede afirmarse con seguridad que quienquiera que proyectase el coro de Saint-Denis inventó el estilo gótico». El hundimiento de Beauvais en 1284 señaló el fin del período más grande de construcción de catedrales y las obras posteriores nunca alcanzaron la calidad estructural y técnica de las del siglo XIII.

Es cierto que el gótico siguió desarrollándose durante más de doscientos años, y que se alcanzaron apogeos aislados, no sólo estética sino también estructuralmente (por ejemplo, las bóvedas de abanico en Inglaterra). Sin embargo, en conjunto, hubo una general y gradual degradación de la estructura, hasta que el sistema completo fue barrido por el Renacimiento y los misterios de los gremios medievales fueron olvidados.

El material

La piedra parece un buen material constructivo para, por ejemplo, las montañas, pero no está claro que sea igualmente apropiado para hacer edificios excepto, posiblemente, en forma de cuevas. En efecto, las estructuras románicas típicas son cavernosas; su fin es dispersar las fuerzas tanto como sea posible (por ejemplo, por medio de cúpulas) y sólo con extremo cuidado se abren los muros románicos para dejar pasar la luz. Por el contrario, el objetivo del sistema gótico es la concentración de las fuerzas; a la catedral se le exigía que fuera tan alta y ligera como fuese posible.

Viollet-le-Duc dice (artículo *Arc-boutant*) que la estructura de la catedral se desarrolló a partir del momento en que el arbotante se expresó claramente en el edificio. «Pedir una catedral gótica sin arbotantes es como pedir un barco sin quilla». Continúa: «Observando correctamente que una bóveda bien estribada sólo necesita en su arranque un apoyo vertical pequeño en relación con su peso, poco a poco los constructores hicieron los pilares más esbeltos y llevaron los empujes al exterior, a los botareles. Abrieron totalmente los espacios entre los pilares, debajo de los arcos formeros, mediante grandes ventanas con maineles y todo el sistema estructural de las grandes naves se redujo a esbeltos pilares, rigidizados por la carga, y verticales como consecuencia del equilibrio alcanzado entre el empuje de las bóvedas y el contrarresto del arbotante». La descripción es clara, las fuerzas se recogen mediante bóvedas y arcos en esbeltas columnas y estribos, y los muros se convierten en hojas de vidrio no estructurales.

Más adelante, en el artículo *Pilier*, Viollet-le-Duc escribe: «El pilar es demasiado esbelto para resistir empujes inclinados; para permanecer vertical, debe estar cargado verticalmente». Aquí se expresa claramente la acción básica de un elemento de fábrica: las cargas aplicadas deben ser resistidas únicamente por empujes axiales y la flexión es inadmisible. Los constructores medievales comprendieron este requisito básico para sus proyectos; cuando olvidaron que la fábrica no puede soportar flexiones, como en los arbotantes de Amiens (ver más adelante), el resultado fue un mal diseño.

Suponiendo por el momento que en ningún elemento estructural de piedra hay flexiones, es conveniente en este punto preguntarse por los niveles de tensión probables que se pueden encontrar en una catedral gótica. Yvon Villarceau[12] usó un parámetro significativo: la altura que puede alcanzar una columna prismática antes de que falle por aplastamiento en la base debido a su propio peso. El cálculo es simple; una arenisca media de peso específico aproximado 24 kN/m^3 y con una resistencia de rotura a compresión de unos 45 N/mm^2 (Ungewitter da entre 30 y 90 N/mm^2) se puede levantar, en ausencia de inestabilidad, casi hasta la altura de 2 km.

Las tensiones en una catedral se deben casi totalmente al peso propio del material; incluso considerando lo que pudiera denominarse un coeficiente de concentración de carga para las columnas, digamos

de 4, y teniendo en cuenta el peso de la cubierta y otras partes de la estructura que no son autoportantes, una catedral podría alcanzar una altura de casi 500 m antes de que las columnas comenzasen a fallar. (Se supone que se ha establecido una esbeltez mínima de las columnas para evitar la inestabilidad por pandeo.)

Yvon Villarceau propone un coeficiente de 1/10 sobre la altura límite de una columna; es decir, las tensiones de trabajo estarían limitadas a la décima parte de la resistencia a rotura por compresión del material. De este modo una catedral se podría construir, con este nivel de tensiones, hasta una altura aproximada de 50 m; la abadía de Westminster y Notre-Dame de París tienen entre 33 m y 36 m hasta la parte inferior de la techumbre de madera; Beauvais unos 52 m.

Es evidente que si las tensiones nominales de trabajo se limitan a valores tan bajos puede esperarse que la *resistencia* de la fábrica apenas afecte a los cálculos. Por el contrario, es probable que tanto los elementos estructurales aislados como la estructura en su conjunto tengan que estar proporcionados en base a la estabilidad. En general un arbotante no fallará a compresión, pero puede, si está mal dimensionado, pandear; análogamente, el fallo de un estribo se producirá por vuelco alrededor de su base.

Por lo tanto, el próximo paso en la investigación debe ser el análisis del comportamiento de las obras de fábrica sometidas a bajas tensiones.

La estabilidad de las obras de fábrica

Fitchen observa que «...la línea de empujes debe permanecer dentro del tercio central (o, al menos, de la mitad central) del espesor de la estructura». Este enunciado de la regla del tercio central lleva, entre paréntesis, su propia contradicción. La observancia de la regla del tercio central asegura que no existen tracciones o, más bien, que el material trabaja en toda sus partes a compresión. Si esto es una condición de proyecto adecuada, es difícil ver como puede permitirse la relajación de la regla del tercio central a la mitad central. Pippard y Baker[13] hacen un comentario similar en su análisis del comportamiento de los arcos de dovelas; de hecho, la concentración en el estudio del comportamiento elástico de las estructuras (desde Galileo hasta nuestros días) ha asegurado la supervivencia de reglas como la del tercio central.

Moseley,[14] en un manual estándar, afirma de forma clara que la condición es que la línea de empujes no debería salir de la sección transversal, condición que fue igualmente comprendida por Coulomb.[15] El fallo de una estructura de fábrica se producirá cuando la línea de empujes ya no pueda estar contenida dentro de la fábrica.

Esta afirmación sólo se puede hacer como resultado de ciertas hipótesis simplificadoras y se elaborará más tarde. Constituye el enunciado básico de la estabilidad de un esqueleto de piedra.

La memoria de Coulomb, en la que también se sientan las bases de la ciencia de la Mecánica del Suelo, analiza el comportamiento de las estructuras de piedra. La figura 14 de Coulomb (figura 1.1 de este artículo) muestra medio arco de fábrica; Coulomb considera el fallo del arco sometido a la acción de su propio peso y de un empuje horizontal H actuando en la clave en el punto f.

Considerando primero un material que (como el terreno) tiene rozamiento y cohesión (resistencia a cortante), Coulomb determina el valor de H necesario para producir la rotura del arco por deslizamiento a lo largo del plano Mm. Por tanto, la rotura del arco depende de las propiedades del material. Sin embargo, Coulomb señala inmediatamente que «el rozamiento, es frecuentemente tan alto en los materiales que se usan en la construcción de arcos, que las dovelas no pueden deslizar nunca una sobre otra». Entonces concluye que si en la sección Mm, se produce la rotura ésta se debe a la rotación de una porción de arco alrededor de m ó M.

Siendo φ el peso de la porción GaMm del arco, actuando en la línea g′g, si la rotación se produce alrededor de M se verificará que,

$$H = \varphi \frac{\mathrm{gM}}{\mathrm{MQ}} \qquad (1)$$

y si es alrededor de m,

$$H = \varphi \frac{\mathrm{qg'}}{\mathrm{mq}} \qquad (2)$$

En estas expresiones de H aparece el peso específico y las dimensiones del arco, pero no la resistencia del material. Las expresiones son enunciados puramente geométricos de la estabilidad del arco.

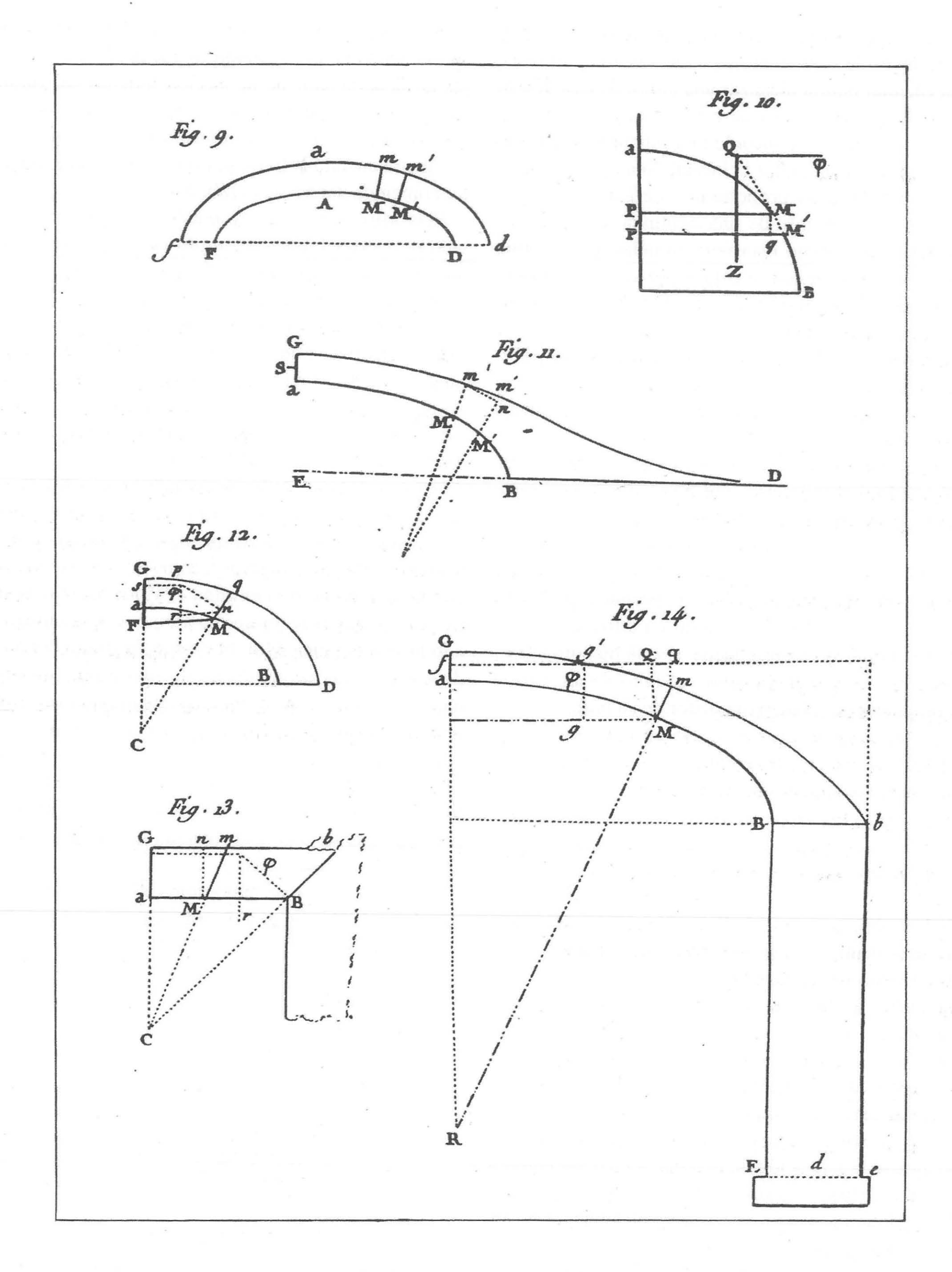


Figura 1.1
Ilustraciones 9 a 14 de Coulomb; arcos de fábrica

Coulomb demuestra que el valor máximo de *H* se debe buscar a partir de (1), considerando distintas secciones transversales de rotura y líneas de acción de *H*; de manera análoga, el valor mínimo debe hallarse a partir de (2). Esta clase de cálculos se hará más adelante para los arbotantes; nótese que (como Coulomb indica) el método de tanteos es muy exacto, ya que el máximo o mínimo es muy «plano».

Coulomb señala también que no se puede suponer que la línea de empujes pase exactamente por puntos como G ó M, ya que la aproximación de la línea de empujes tanto al trasdós como al intradós conduciría a tensiones infinitas y produciría el aplastamiento del material. No obstante, si se suponen niveles bajos de tensiones los errores en el cálculo serán pequeños. Así, si el empuje axial nominal es tal que la tensión nominal es 1/10 de la tensión de rotura, la línea de empujes puede aproximarse al borde de la fábrica hasta un 5% del espesor de la sección.

PRINCIPIOS DEL ANÁLISIS LÍMITE

Con el propósito de establecer principios y teoremas generales, se realizarán las siguientes hipótesis sobre la propiedades del material:

1. *La piedra no tiene resistencia a tracción.* Esta hipótesis es casi exactamente cierta si consideramos una estructura, como un arco, hecha de dovelas aparejadas en seco o con un mortero muy pobre. Aunque la piedra en sí podría soportar algún esfuerzo de tracción, las juntas no, y las fuerzas de tracción no se pueden transmitir de una parte de la estructura a otra. La hipótesis de nula resistencia a tracción es una hipótesis segura, de acuerdo tanto con el sentido común como con los corolarios de los principios generales establecidos más adelante. Puede ser demasiado segura si la estructura de piedra no es de tipo adovelado o si la trabazón, o quizá la disposición aleatoria de las piedras, permite la transmisión de esfuerzos de tracción.

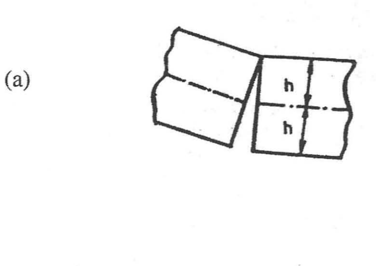
2. Los niveles generales de las tensiones son tan bajos que, para los fines del cálculo, *la resistencia a compresión de la piedra es infinita.* Esta hipótesis va ligeramente en contra de la seguridad y se tratará con más extensión posteriormente.

3. *No se puede producir el deslizamiento de una piedra sobre otra.* Parece una hipótesis razonable (se lo parecía a Coulomb, como se señala antes). Implica que donde quiera que haya un plano débil, por ejemplo entre dovelas, la línea de empujes no se desviará demasiado con respecto a la perpendicular a ese plano. (El colapso de Beauvais probablemente se inició por deslizamiento.)

Con estas hipótesis, el modo de rotura por articulación en un borde libre, que proponía Coulomb, es el único posible. Bajo estas condiciones, Kooharian[16] (ver también Prager[17]), ha demostrado que la fábrica se puede considerar como un material al que se pueden aplicar los teoremas del análisis límite, desarrollados para el análisis del comportamiento plástico de las estructuras de acero. (Véase, por ejemplo, Baker et al.[18]) El fallo se produce cuando, en palabras de Pippard y Baker,[13] «se forman un número suficiente de articulaciones como para transformar la estructura en un mecanismo».

Consideremos una parte de una estructura de fábrica formada por dovelas y cuyo espesor local es $2h$, figura 1.2(a). Si, como se muestra, se forma una articulación bajo una carga normal N, ésta da un momento flector referido a la línea central $M= hN$. En la figura 1.2(b), las líneas OA y OB corresponden a $M=\pm hN$; cualquier punto *dentro* del triángulo abierto AOB representa un estado de la sección en cuestión que es seguro, es decir, la línea de empujes se halla completamente dentro de la fábrica.

(a)



(b)

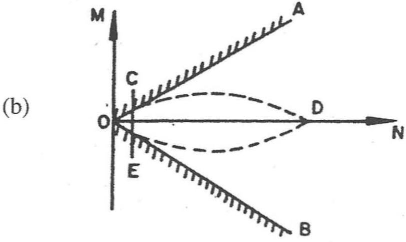


Figura 1.2
Condición de estado límite para dovelas de fábrica

Un punto en la figura 1.2(b) sobre OA u OB representa la formación de una articulación; la línea de empujes se encuentra sobre una de la superficies de la fábrica. Un punto *fuera* del triángulo AOB representa un estado imposible; la línea de empujes se halla fuera de la fábrica.

Si la piedra de resistencia infinita se sustituye por una piedra real con una resistencia de rotura a compresión concreta, la *superficie de estado límite* AOB se sustituye por el límite curvo OCDEO, formado por dos arcos parabólicos. Se aplican las mismas consideraciones enumeradas antes; un punto dentro de la nueva superficie límite representa un estado seguro, y así sucesivamente.

Si ahora las tensiones nominales de trabajo se limitan aproximadamente a, por ejemplo, un 10% de la resistencia de rotura a compresión, la porción de la superficie límite considerada es el triángulo ligeramente curvilíneo OCE; las curvas OC y OE se aproximan tanto a una recta que el error que se introduciría por hacerlas coincidentes con OA y OB sería muy pequeño.

Aunque, de hecho, la línea de empujes no se puede aproximar a un borde libre más de un 5 % del espesor de la sección, se supondrá que la articulación se forma como en la figura 1.2(a). Como se observó anteriormente esta hipótesis va ligeramente en contra de la seguridad.

Aceptando estos postulados sobre el comportamiento del material, se puede enunciar el *teorema de la unicidad* aplicado a las fábricas como sigue: Si es posible encontrar una línea de empujes, que represente un estado de equilibrio para la estructura sometida a la acción de determinadas cargas externas, que se encuentre completamente dentro de la fábrica, y que permita la formación de suficientes articulaciones para transformar la estructura en un mecanismo, la estructura está a punto de colapsar; aún más, si todas las cargas se pueden expresar como porcentajes de una de ellas (carga proporcionales), y las cargas han sido imaginariamente incrementadas desde sus valores de trabajo a los de colapso mediante un coeficiente de carga, el valor de ese coeficiente de carga en el colapso es único.

El *teorema de la «seguridad»* se puede enunciar como sigue: Si es posible encontrar una línea de empujes en equilibrio con las cargas exteriores que se encuentre completamente dentro de la fábrica, la estructura es segura. Nótese que en este teorema, de suma importancia en este estudio, se ha omitido el requisito del mecanismo del teorema de la unicidad. Tómese nota también de que la línea de empujes encontrada para satisfacer el teorema de la seguridad no debe ser necesariamente la línea real; cualquier línea de empujes en equilibrio con las cargas exteriores que se encuentre dentro de los límites de la fábrica es suficiente para asegurar la estabilidad. Tal solución de equilibrio se denomina «estáticamente admisible».

ALGUNAS DISGRESIONES

Antes de hacer cálculos detallados de estructuras concretas, es interesante desarrollar los principios del análisis límite a través de algunos ejemplos generales.

(a) TEOREMA. *Si al retirar las cimbras de un arbotante se sostiene durante 5 minutos, entonces lo hará durante 500 años.*

Este enunciado supone que las cargas en un arbotante son estáticas, debidas al peso propio más los empujes de la bóveda de la nave. Por esta razón, el teorema no se puede aplicar a los arbotantes superiores de las grandes catedrales góticas, cuya función como ha demostrado Fitchen[19] consiste en resistir las cargas de viento que actúan sobre la gran cubierta.

Sin embargo, para cargas estáticas la prueba del teorema se deduce inmediatamente del teorema de la seguridad. El hecho de que el arbotante aguante 5 minutos es prueba experimental suficiente de que se puede encontrar dentro de la fábrica una línea de empujes estáticamente admisible; el límite superior de 500 años depende, desde luego, de la degradación del material.

(b) Gifford y Taylor,[20] refiriéndose a la restauración de edificios antiguos, dicen que «... en el extremo este del trascoro de la catedral de Wells existe una interesante curiosidad estructural, en la que los dos arbotantes de la cara este del muro oriental y la ventana están soportados excéntricamente por dos columnas muy esbeltas desde el trascoro. En primera instancia la carga la soporta la bóveda que, sorprendentemente, no muestra daños».

Una vez más, el hecho que no se hayan observado daños es una prueba contundente de que se puede encontrar una línea de empujes satisfactoria.

(c) Poncelet[21] habla del coeficiente de seguridad (*coéfficient de stabilité*) necesario para protegerse, entre otros, contra el fallo (*défaut*) de las cimentaciones de una construcción de fábrica. Evidentemente las cimentaciones deben ser *adecuadas* de por sí y para este fin probablemente deben proyectarse con algún margen de seguridad. Pero si un pilar de una nave, por ejemplo, asienta diferencialmente 2,5 cm ¿Qué margen se debe considerar en el cálculo de la *fábrica* para permitir este asentamiento?

TEOREMA. *Si la cimentación de una estructura de fábrica permite pequeños movimientos, éstos nunca provocarán en sí mismos el colapso de la estructura.*

Por esto en el cálculo de las fábricas no es necesario dejar margen para permitir pequeños asentamientos o desplazamientos de la cimentación.

Se ha visto que la estabilidad de una estructura de piedra estará asegurada si se puede encontrar una línea de empujes en equilibrio con las cargas aplicadas y que se halle en su totalidad dentro de la fábrica. Supongamos que esa línea de empujes se ha determinado para la estructura ideal con cimentación rígida, es decir, se supone que la estructura es *inicialmente* satisfactoria y que ha encontrado por sí sola un estado de equilibrio estáticamente admisible.

Consideremos ahora el efecto de pequeños movimientos de las cimentaciones. Aquí el adjetivo «pequeño» se usa en el sentido estructural habitual: los movimientos son pequeños comparados con las dimensiones generales de la estructura. Más exactamente: las ecuaciones de equilibrio escritas para la estructura inicial sin deformar son válidas para la estructura deformada.

Una línea de empujes es una mera representación gráfica de las ecuaciones de equilibrio. Si la línea de empujes es válida para la estructura sin deformar, también lo será, por definición, para la estructura después de que se hayan producido pequeños asentamientos. Es decir, el estado inicial de equilibrio estáticamente admisible también será estáticamente admisible para la estructura deformada.

Desde luego, los asientos de las cimentaciones producirán agrietamientos en la fábrica o aperturas de las dovelas. Sin embargo, este agrietamiento es, como veremos más adelante, el *estado normal* de la fábrica; para pequeños asentamientos las grietas pueden tener el espesor de un cabello o estar cerradas en virtud de la elasticidad de la piedra y ser, por tanto, invisibles. Pero estas grietas, que representan tan sólo la incapacidad de la fábrica para soportar tracciones, no son en sí mismas peligrosas.

(d) Suger[7] da la narración de un testigo de oídas de una tormenta que tuvo lugar durante la construcción de la iglesia abacial de Saint-Denis. El resumen siguiente procede de la traducción de Panofsky:[22]

> ...cuando las obras de la nueva ampliación con su capitel y arcos superiores estaban alcanzando su máxima altura, pero los arcos principales —en pie por sí mismos— no estaban todavía sujetos entre sí, por así decirlo, por el casco de las bóvedas, súbitamente se desató una tormenta terrible y casi insoportable...
> ...entre los arcos mencionados se precipitó una fuerza de viento tal, que éstos, que no estaban soportados por ninguna cimbra ni apuntalados, amenazaban ruina en cualquier momento, temblando miserablemente y balanceándose de acá para allá.

Fitchen identifica los «arcos superiores» con los de la bóveda de la nave y los «arcos principales» con los arbotantes. Así, los muros de la nave deben probablemente imaginarse unidos entre sí por la gran armadura de madera, los arbotantes terminados y sus cimbras retiradas, pero el casco estabilizador de la bóveda de la nave no estaba todavía en su sitio. En esas circunstancias, si hemos de creer a Suger, la tormenta produjo temblores y oscilaciones en toda la fábrica.

De acuerdo con las ideas de este artículo las cargas de viento produjeron movimientos y quizá grietas visibles en diversas partes de la estructura. El agrietamiento indicaba la formación de articulaciones y fue, sin duda, alarmante. Sin embargo, no aparecieron articulaciones suficientes como para transformar la estructura en un mecanismo de colapso.

EL ARCO DE DOVELAS

A continuación se analizará el arco, dado que es una forma especialmente sencilla de construcción de fábrica; una vez establecido el esquema general de comportamiento, sus resultados se aplicarán a otros elementos estructurales.

Pippard et al.[23] y Pippard y Ashby[24] se encuentran entre los investigadores modernos del arco adovelado; sus resultados están resumidos por Pippard y Baker.[13] Una de las conclusiones, ya citada, es que el colapso se produce cuando se forman las suficientes

articulaciones que dan como resultado un mecanismo. La figura 1.3, basada en una de las de Pippard y Baker, muestra ese modelo de cuatro articulaciones para el arco. Considerada mecánicamente, la estructura es ahora un mecanismo de cuatro bielas, capaz de moverse con un grado de libertad.

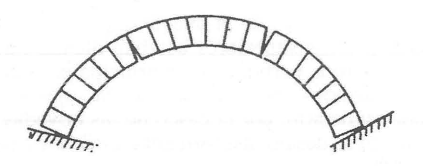


Figura 1.3
Colapso de un arco de dovelas (según Pippard y Baker)

El número de articulaciones que se requiere para un mecanismo de colapso es fácilmente calculable. Un arco, por ejemplo, considerado desde el punto de vista del análisis estructural convencional, es una estructura hiperestática de tercer grado; por tanto, tres articulaciones la harán estáticamente determinada (isostática). La cuarta articulación, extra, convierte la estructura isostática en un mecanismo, y permite encontrar el valor de la carga de rotura (véase, por ejemplo Baker et al.[18] ó Heyman[25]).

En realidad, se debe tener cuidado al referirse al grado de hiperestatismo de una estructura de fábrica; este punto se trata más adelante al mostrar que, en cierto sentido, una estructura de fábrica está siempre estáticamente determinada. Sin embargo esto no afecta a las conclusiones sobre el número de articulaciones que se requieren para el colapso.

La idea de mecanismo de colapso es bastante antigua. Frézier[26] cita los ensayos hechos por Danizy en 1732 (trabajo dirigido a la Académie de Montpellier) y sus figuras 235-240, reproducidas aquí en la figura 1.4, muestran claras configuraciones de colapso deducidas a partir de ensayos con modelos. La figura 239, por ejemplo, es un mecanismo de cuatro bielas con articulaciones en las secciones EF, GI, ef y ml. Obsérvese: (a) el correcto esquema de la alternancia de articulaciones que se abren y se cierran (cf. figura 1.3), y (b) la doble articulación en ef. Esta doble articulación que se observa claramente en los ensayos, fue, por ejemplo, descrita por Pippard et al., y se debe a la posición tangencial de la línea de empujes. La doble articulación conduce a que en el cálculo sea indiferente elegir la posición de la articulación, lo que ya fue observado por Coulomb.

La correlación de las posiciones de las articulaciones con la posición de la línea de empujes, es decir, la interdependencia de las condiciones de equilibrio y de mecanismo, fue señalada expresamente, por ejemplo, por Breymann.[2] Observó que en una rótula la línea de empujes tiene que pasar por el punto de articulación. Aún más, si la articulación está en una sección transversal interior, y no en el arranque del arco, entonces, como la línea de empujes no puede pasar por el exterior de la fábrica, tiene que ser tangente al perfil del arco en el punto de articulación.

La figura 1.5 reproduce la lámina 85 de Breymann, que afirma: «Por consiguiente se deduce que, de todas las líneas de empujes que se pueden trazar, aquella que tenga la altura mayor y la luz menor debe, necesariamente, tocar el trasdós del arco cerca de la clave y el intradós cerca de los arranques; tiene el trazado $\beta'\gamma'\alpha'$ de la figura 7, lámina 85, y produce el empuje horizontal mínimo».

Aquí hay dos ideas importantes. Primera, se puede *elegir* una línea de empujes. Segunda, cada posición de la línea de empujes corresponde a un valor determinado del empuje horizontal, del cual el mínimo lo proporciona la línea $\beta'\gamma'\alpha'$ de la figura 7 (figura 1.5 aquí). Se observará que la otra línea $\beta''\gamma''\alpha''$ trazada en la figura, corresponde al máximo empuje horizontal, y todas las posibles líneas de empujes (para un peso propio dado) deben estar entre estos dos límites.

Ahora bien, si la línea de empujes pasa por un punto tal como β' en la superficie del arco, ese punto es una articulación incipiente. Por eso, si la línea de empujes es la $\beta'\gamma'\alpha'$, junto con su simétrica para la otra mitad del arco, existen tres articulaciones incipientes y el arco es isostático.

Breymann dibuja en su figura 10 (figura 1.5) un arco de medio punto, sobre pilar y con estribo exterior, próximo a colapsar. El número de articulaciones (6) es correcto, y éstas están alternativamente abiertas y cerradas. Además, las líneas de empujes (a pesar de algún error en su punto de intersección) tocan la superficie de la fábrica en las articulaciones.

En general, el problema del análisis a rotura de las obras de fábrica consiste en encontrar una línea de empujes que pase a través del número suficiente de articulaciones como para transformar la estructura en un mecanismo.

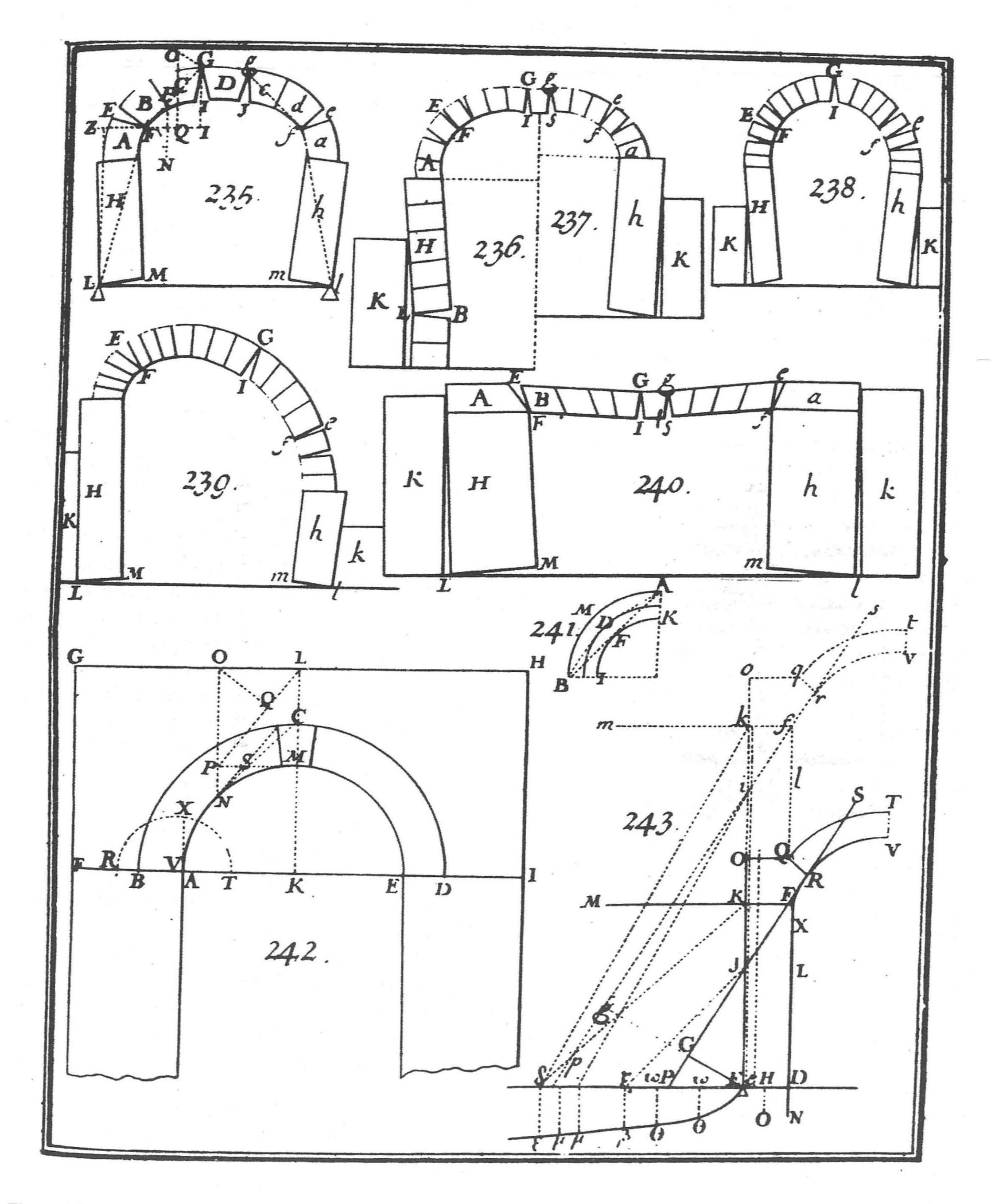


Figura 1.4
Figuras 235-243 de Frézier; colapso de arcos

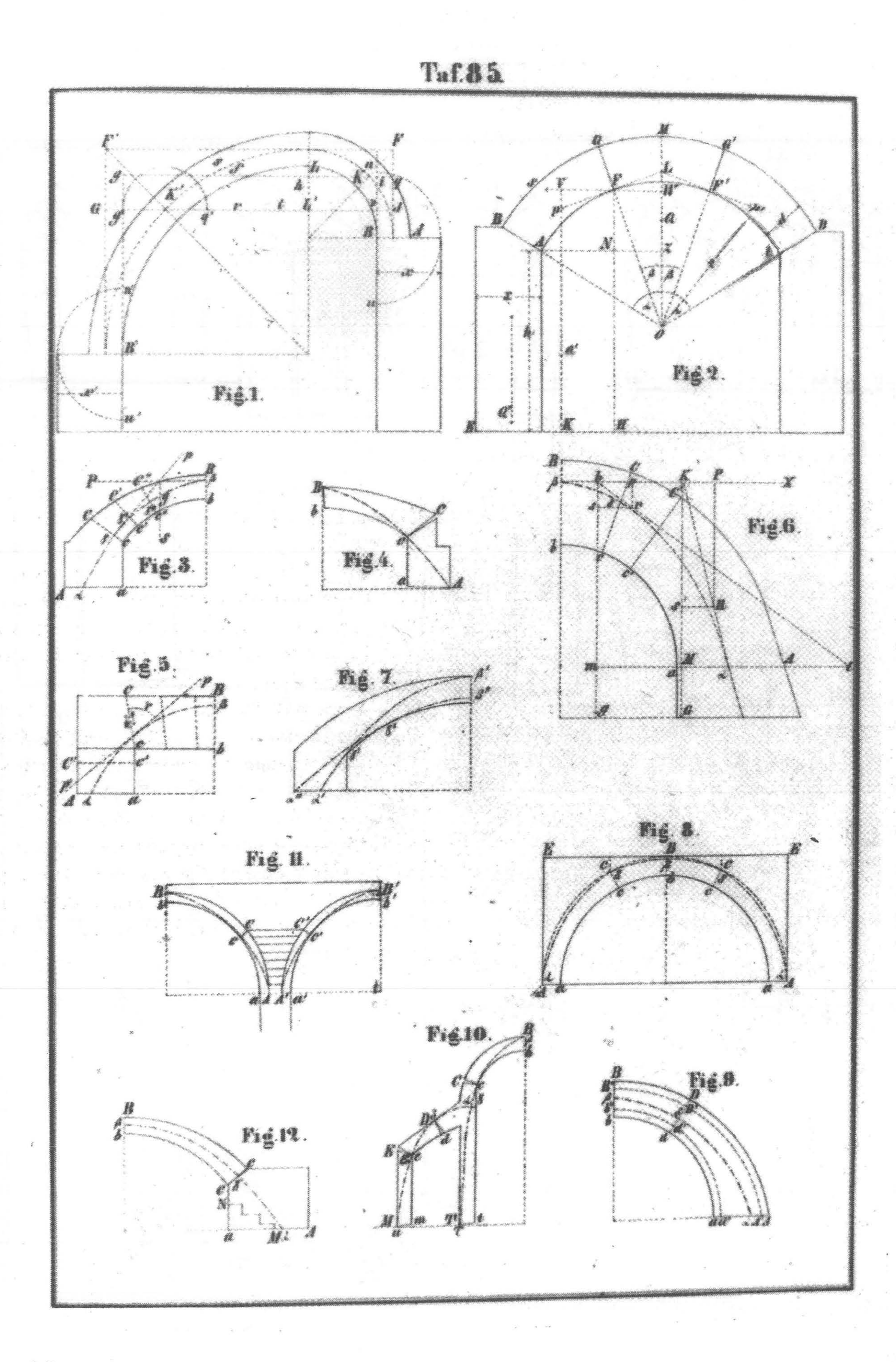


Figura 1.5
Lámina 85 de Breymann; líneas de empujes

Es pertinente investigar cuál es el tipo de estructura para el que es *imposible* encontrar esta línea de empujes. Una de ellas es el arco adintelado, ilustrado por ejemplo en la figura 240 de Frézier (figura 1.4). El estado de rotura mostrado implica la inclinación de los pilares AH, ah, con el correspondiente incremento de la luz del vano. Si los pilares son rígidos, de manera que esa apertura no se pueda producir, se observará que ninguna combinación de articulaciones en las superficies horizontales superior e inferior del arco adintelado conducirá a un mecanismo. Análogamente, considerando un arco sin peso propio, del que se muestra la mitad en la figura 241 (figura 1.4), Frézier señala que no se puede formar ningún mecanismo con articulaciones en A y B si el intradós se encuentra completamente a la derecha de la línea recta AB. Un arco de este tipo puede por tanto soportar una carga vertical infinitamente grande en la clave A.

Frézier llega a esta conclusión a partir de consideraciones meramente mecánicas, sin embargo un razonamiento basado en la línea de empujes es igualmente válido. Para la carga vertical soportada en A, es posible hallar una línea de empujes estáticamente admisible, es decir AB, que se encuentra totalmente dentro del arco; por el teorema de la seguridad, el colapso, por consiguiente, no se puede producir.

El arco de la figura 241 (figura 1.4) es, desde luego, incapaz de soportar una carga vertical colocada en *cualquier punto* del vano. Por ejemplo, una carga vertical en M produciría una línea de empujes que, para alcanzar el arranque derecho del arco, debe pasar por el exterior de la fábrica (figura 1.6).

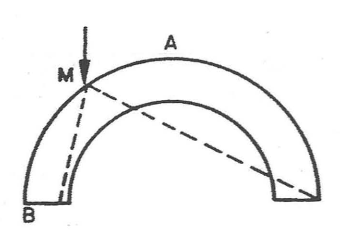
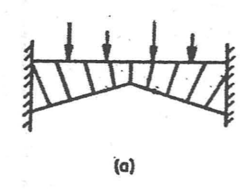
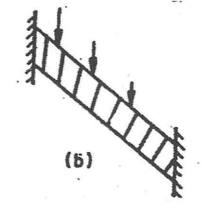


Figura 1.6
Arco sin peso propio (según Frézier)

Hay muchos arcos capaces de soportar cualquier combinación de cargas verticales sin colapsar, y la figura 1.7 ilustra tres, basados en el arco adintelado. En la figura 1.7(a) el intradós ha sido recortado, pero desde cada punto del trasdós se puede «ver» una parte de cada arranque. La figura 1.7(b) muestra un arco adintelado inclinado que forma, en esencia, una estructura del tipo arbotante; esto se analizará más adelante. La figura 1.7(c) está basada en la figura 1.7(b) recortando otra vez el intradós.

Es evidente que la estabilidad esencial de los arcos de fábrica, cuando tienen la forma adecuada, fue entendida perfectamente por los maestros de obra medievales. En efecto, su maestría fue tanta que pudieron introducir el humor en sus construcciones. La figura 1.8 reproduce uno de los dibujos de Villard (ver Willis[27] ó Hahnloser[28]). En ella se puede ver que después de terminar la arcada, el puntal de madera puede retirarse. Torroja[29] da más ejemplos de bromas medievales de esta clase.





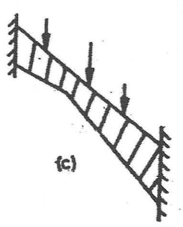


Figura 1.7
Arcos derivados del arco adintelado

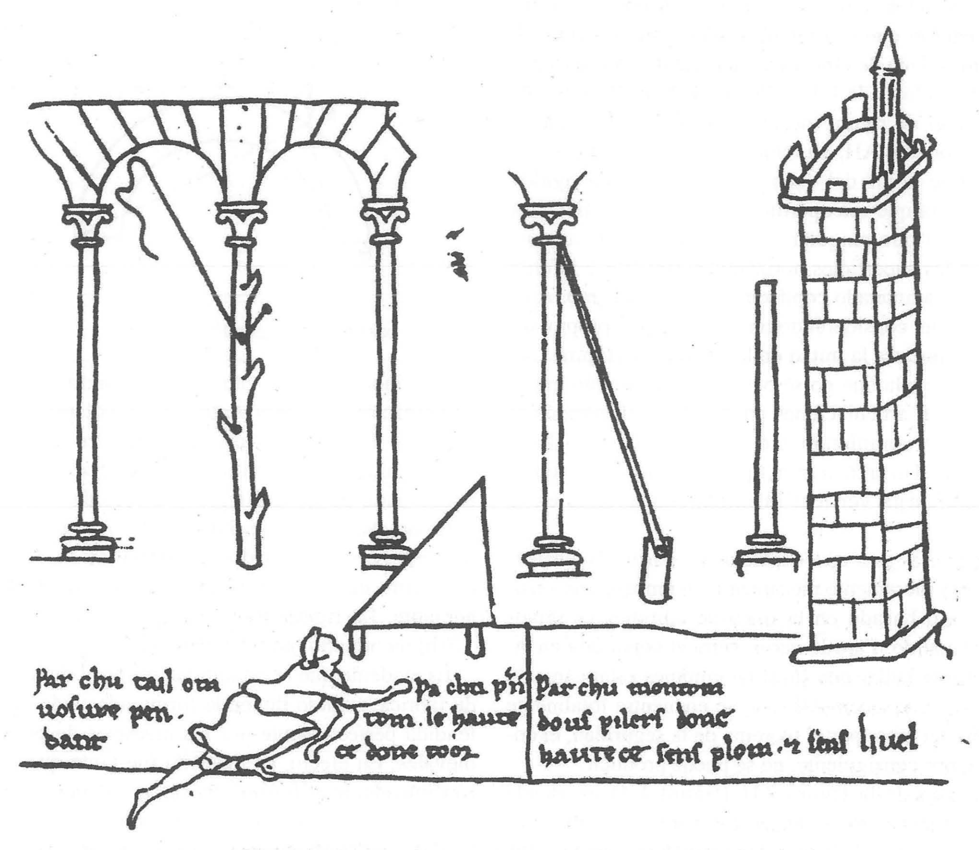


Figura 1.8.
Fragmento de una página del Álbum de Villard de Honnecourt

EL ESTADO ESTABLE DE LA FÁBRICA

Para resumir el trabajo hasta ahora: el estado de colapso (inestable) de una construcción de fábrica está caracterizado por la formación de articulaciones en número suficiente como para convertir la estructura en un mecanismo. La posición de la línea de empujes está determinada por las secciones articuladas, y en el momento del hundimiento la línea de empujes es única para la zona de estructura que colapsa.

Si la estructura no se hunde, sino que está en un estado estable sometida a una determinada carga externa, en general, existe una amplia gama de posibles posiciones de la línea de empujes. Poncelet,[21] en su revisión de las teorías sobre los arcos, concluye que no hay un modo satisfactorio de determinar la posición real de la línea de empujes, y que los futuros progresos teóricos sólo se podrán llevar a cabo considerando la elasticidad de la fábrica. Es decir, Poncelet sitúa al arco de fábrica en la categoría de las estructuras hiperestáticas o redundantes, para cuya solución se requieren las ecuaciones de compatibilidad y la ley que relaciona las tensiones y las deformaciones.

Yvon Villarceau,[12] al comienzo de una larga *Mémoire*, establece con igual firmeza que la teoría de las estructuras hiperestáticas no es la herramienta a utilizar para el cálculo de los arcos. Considera que la fábrica no obedecerá a las hipótesis ideales hechas en el análisis y, en realidad, proclama las mismas objeciones al análisis elástico que finalmente condujeron a los proyectistas de estructuras de acero a desarrollar la teoría plástica.

En cambio Yvon Villarceau reemplaza el arco real, figura 1.9(a), por un arco ideal, figura 1.9(b), en el que las dovelas se tocan sólo en la línea central. Señala, con total corrección, que si su método resulta satisfactorio para el arco ideal también lo será, evidentemente, para el arco real.

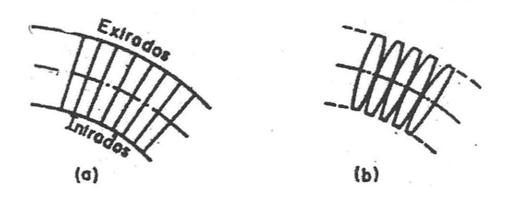


Figura 1.9
Arco de dovelas (según Yvon Villarceau)

En efecto, encuentra una línea de empujes estáticamente admisible que coincide exactamente con la línea media y que, por tanto, está lo más lejos posible de la superficie del arco real. El método es inverso; a partir de una carga dada, Yvon Villarceau deduce la forma que debe tener el arco para que satisfaga su hipótesis de cálculo. Señala que sus proyectos tendrán una gran resistencia a una sobrecarga ocasional y a las cargas móviles.

Por lo tanto, Yvon Villarceau satisface sólo la condición de equilibrio y no intenta hallar la línea de empujes real en el arco construido. *Se trata de una correcta aplicación del análisis límite que conduce a un método de proyecto estructural rápido y económico.* Las tablas que Yvon Villarceau da en su Mémoire son fáciles de usar y nunca han sido superadas.

El cálculo de la línea de empujes real usando la teoría de las estructuras hiperestáticas, como sugiere Poncelet, es de hecho inútil. Aplicar los teoremas de la energía, por ejemplo, implica considerar ciertas condiciones de compatibilidad, y éstas se deben suponer al comienzo de los cálculos. Por ejemplo, para un arco se supondrá que los arranques ni se desplazan ni giran, dos hechos extremadamente improbables.

Pippard et al. hicieron cuidadosos ensayos de arcos adovelados y concluyeron que la existencia de cualquier imperfección en la construcción hacía que un arco aparentemente hiperestático se convirtiera por sí solo en una estructura isostática. Por ejemplo, «...el arco biempotrado, si se produce algún movimiento de los estribos, se convierte en un arco triarticulado» (Pippard y Baker). La razón es clara: despreciando la compresibilidad de la piedra, la forma del arco está determinada por la forma de las dovelas. Ahora bien, si esta forma no coincide *exactamente* con la que se deduce de la geometría de los estribos, el arco se adaptará por sí mismo a esos estribos mediante la formación de articulaciones. La figura 1.10 ilustra esquemáticamente los dos casos de separación y acercamiento de los estribos; en cada caso el arco tiene tres articulaciones y por tanto está estáticamente determinado.

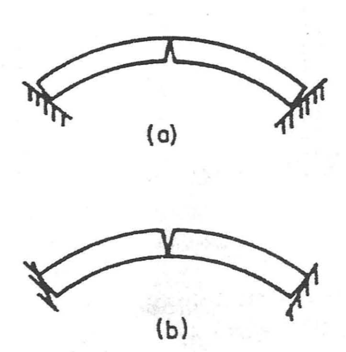


Figura 1.10
Arcos imperfectamente encajados (según Pippard et al.)

Pippard et al. concluyeron que estas articulaciones están siempre presentes, incluso aunque las dovelas estuvieran tan bien encajadas que no se pudieran observar. Por consiguiente, el estado natural de la fábrica incompresible es el estado isostático, para el que la línea de empujes está determinada y es única.

En la práctica, la elasticidad real de la piedra cierra algunas de las grietas e introduce un grado de indeterminación en la construcción. Sin embargo, cualquier movimiento de los apoyos tenderá a convertir la estructura hiperestática en isostática.

En particular, la estructura, perfectamente encajada sobre sus cimbras, descenderá cuando éstas se retiren y, en muchos casos, inmediatamente aparecerán grietas a partir de las cuales se puede detectar la posición de las articulaciones. Estas grietas son totalmente inofensivas; para convertir a la estructura en un mecanismo se tiene que formar, al menos, una articulación más y la geometría puede ser tal que esa articulación adicional nunca se llegue a formar.

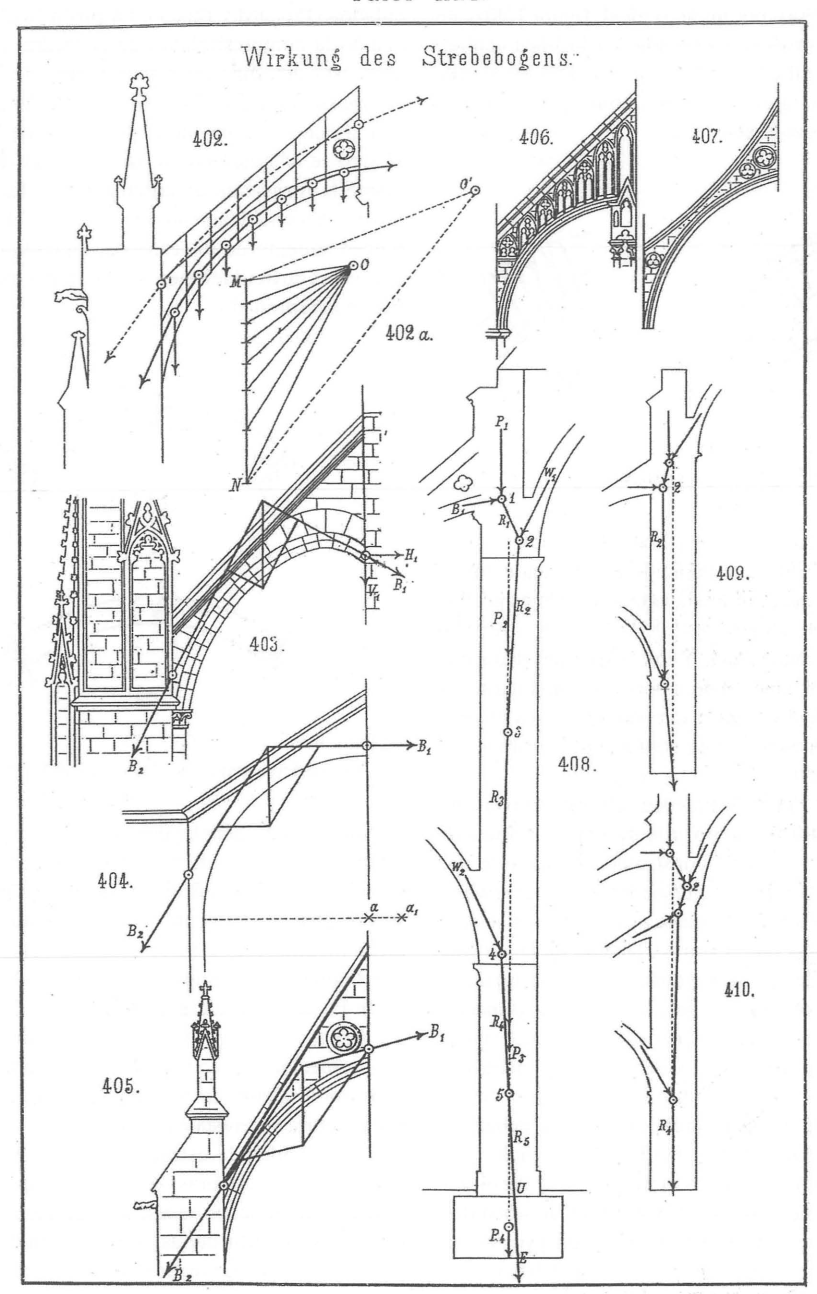


Figura 1.11
Lámina 41 de Ungewitter; arbotantes

EL ARBOTANTE

Ungewitter[3] estudió el funcionamiento de los arbotantes y su lámina 41 que comprende las figuras 402-410 se reproduce aquí como figura 1.11. La figura 402, por ejemplo, muestra dos posibles líneas de empujes que se encuentran totalmente dentro de la fábrica; para la línea de empujes inferior, Ungewitter ha dividido el arbotante en siete segmentos y construido el correspondiente polígono funicular. Aquí se usará una técnica similar para analizar en detalle determinados arbotantes.

Las figuras 403, 404 y 405 muestran, en términos generales, que la dirección del empuje depende de la forma que el constructor haya dado al arbotante. El arbotante tardío (flamígero) de la figura 403 (Saint-Ouen, Rouen) se construyó sin el dominio intuitivo de los principios estructurales de los siglos XII y XIII. La figura 406 (Amiens) es de excepcional interés y se trata con más detalle posteriormente.

La explícita representación del comportamiento del arbotante indicada en la figura 1.11 es indudablemente correcta. Un estudio más detallado, usando las técnicas de análisis desarrolladas anteriormente, permite hacer una valoración más precisa del funcionamiento de cualquier arbotante concreto.

Consideremos primero el arco adintelado inclinado de la figura 1.7(b) como modelo ideal de un arbotante. Suponiendo que el centro del arbotante desciende ligeramente cuando se retiran las cimbras, se formarán tres articulaciones en I_o, I_l y E_x, como se indica en la figura 1.12; la línea de trazos muestra la posición aproximada de la línea de empujes. En las secciones I_o e I_l la línea de empujes pasa desde el

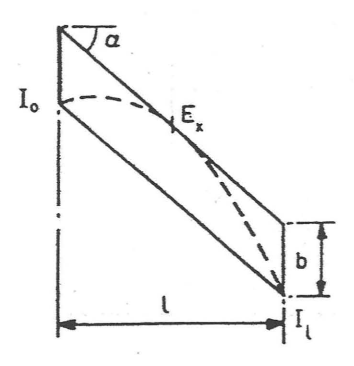


Figura 1.12
Arco adintelado inclinado como modelo de arbotante

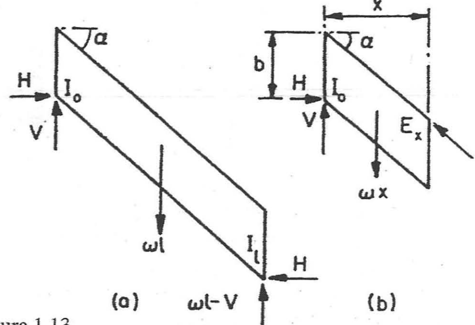


Figura 1.13
Esfuerzos en un arco adintelado inclinado

arbotante a la bóveda de la nave y al botarel, respectivamente; el problema inmediato es la localización de la sección E_x donde la línea de empujes toca el trasdós. Para abordarlo hay varios métodos; por su interés, se usará el método de Coulomb.

Si el peso por unidad de longitud (horizontal) del arbotante es ω, la figura 1.13(a) muestra las fuerzas que equilibran el arbotante y la figura 1.13(b) aquéllas que equilibran una porción del arbotante de longitud x. Tomando momentos con respecto a I_l en la figura 1.13(a) tenemos:

$$V + H \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega l}{2}$$

y tomando momentos con respecto a E_x en la figura 1.13(b) llegamos a

$$V + H\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{b}{x}\right) = \frac{\omega x}{2}$$

de aquí

$$H = \frac{\omega}{2b} x(l-x)$$

Coulomb afirma que el valor de x (es decir, la posición de E_x) debe ser tal que el valor de H sea un máximo; ya que $x = l/2$,

$$H = \frac{\omega l^2}{8b}$$

$$V = \frac{\omega l}{2}\left(1 - \frac{l}{4b} \operatorname{tg} \alpha\right)$$

Los mismos resultados se habrían obtenido, desde luego, imponiendo la condición de que la línea de empujes sea tangente al trasdós en E_x.

Los valores de V y H calculados antes representan el *estado pasivo* del arbotante; el arbotante empuja contra el muro de la nave con el valor mínimo de $H=\omega l^2/8b$, y cualquier movimiento del muro de la nave hacia el interior (o hacia el exterior del botarel; es decir, un incremento de la luz del arbotante) tendrá lugar permaneciendo constantes V y H.

Este valor calculado de H ($=\omega l^2/8b$) debe ser siempre menor que la componente horizontal del empuje de la bóveda; ésta última debe exceder el valor $\omega l^2/8b$ para que el muro de la nave no resulte empujado hacia dentro. Consideremos, ahora, el mismo arbotante sometido a un empuje horizontal incrementado H^*, figura 1.14(a). Se puede demostrar que, para la línea de empujes dibujada, $x^2=2bH^*/\omega$, y $V^*=\sqrt{2b\omega H^*}-H^*\text{tg}\,\alpha$. Esta solución es válida para $x<l$, es decir $H^*<\omega l^2/2b$; para valores mayores de H^*, la línea de empujes pasa directamente de la nave al botarel por el interior del arbotante, como se representa en la figura 1.14(b).

Es evidente que, dado que para el arco adintelado no existe un mecanismo de rotura posible, el valor de H^* se puede incrementar hasta alcanzar la resistencia a rotura de la piedra.

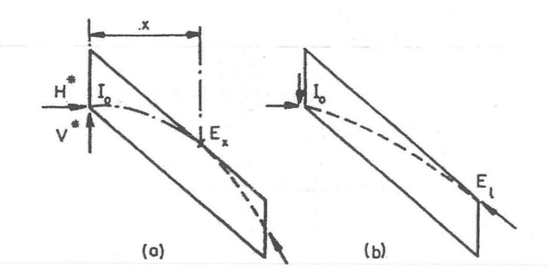


Figura 1.14
Líneas de empujes activos

En la figura 1.15 se han dibujado las líneas de empujes activos y pasivos. Se recordará que no es posible el deslizamiento entre las piedras, suponiéndose que el rozamiento es suficiente para evitarlo. La figura 1.15 muestra que la línea de empujes pasivos tiende a «caer» en la cabeza del arbotante, cerca de I_0, y si los cortes de la fábrica se efectúan para resistir la línea de empujes activos (debidos, posiblemente, a la carga de viento), en la cabeza pueden producirse deslizamientos en el estado pasivo.

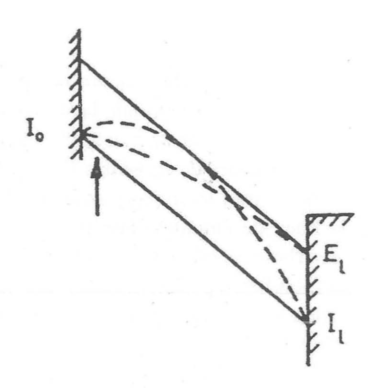


Figura 1.15
Líneas de empujes activos y pasivos

Con frecuencia, en la cabeza del arbotante se coloca un apoyo adicional; véanse, por ejemplo, Saint-Denis (figura 1.16), Beauvais (figura 1.17), Amiens (figura 1.18), y Clermont Ferrand (figura 1.19). Viollet-le-Duc atribuye el hundimiento de Beauvais al colapso de las columnas geminadas A (figura 1.17) que condujo a la rotura del dintel L y al fallo por deslizamiento en la cabeza del arbotante inferior (que soporta el empuje de la bóveda).

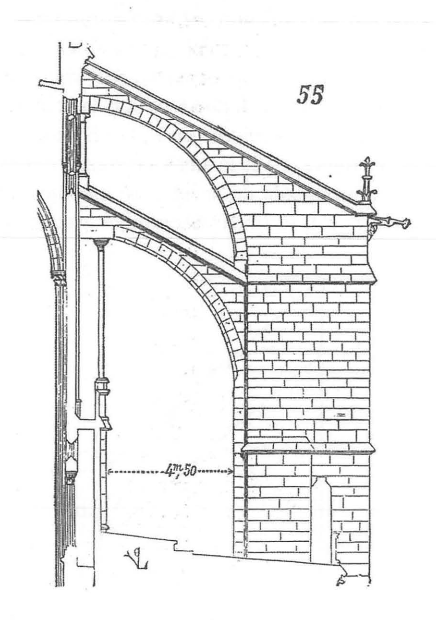


Figura 1.16
Saint-Denis según Viollet-le-Duc

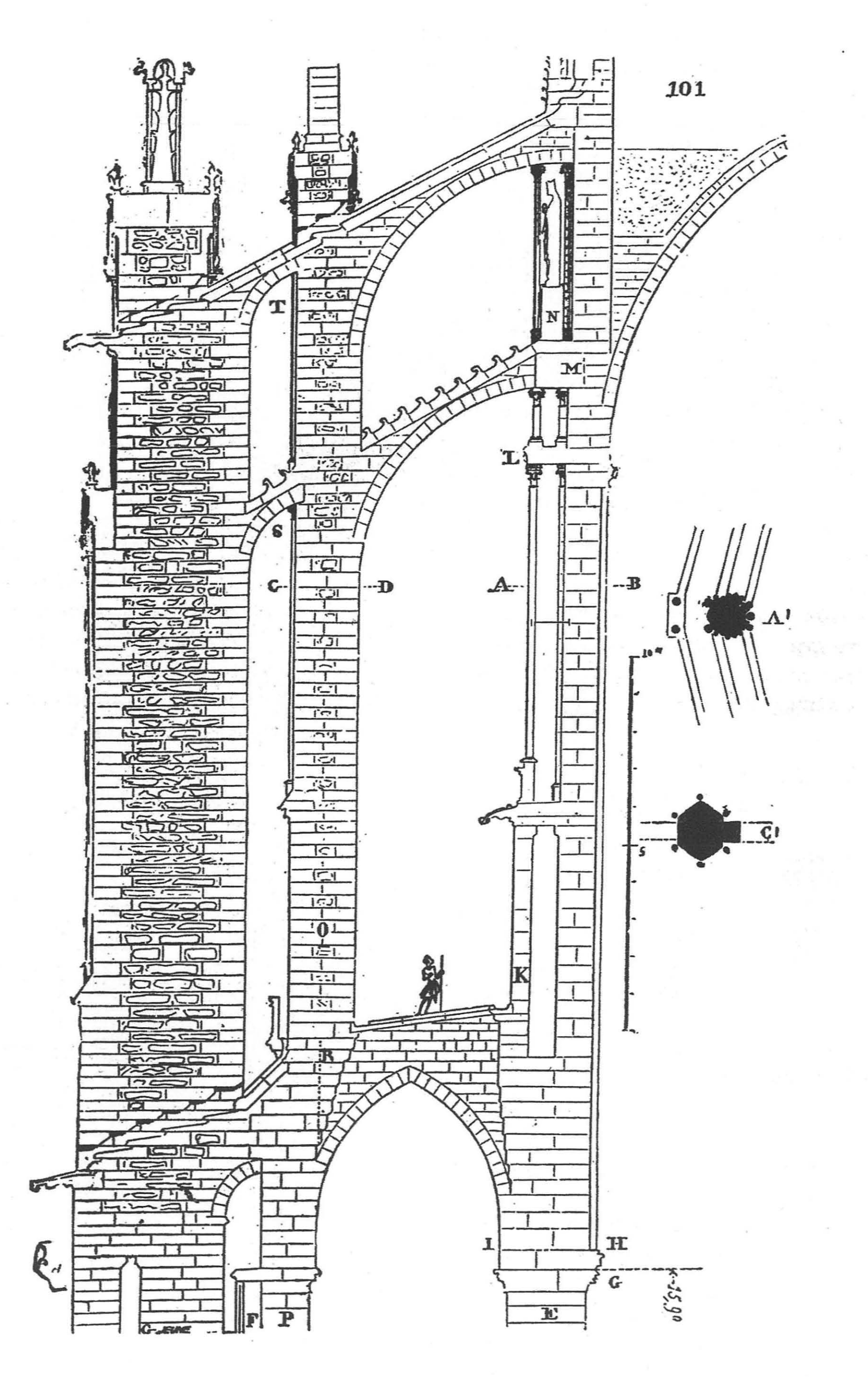


Figura 1.17
Beauvais según Viollet-le-Duc

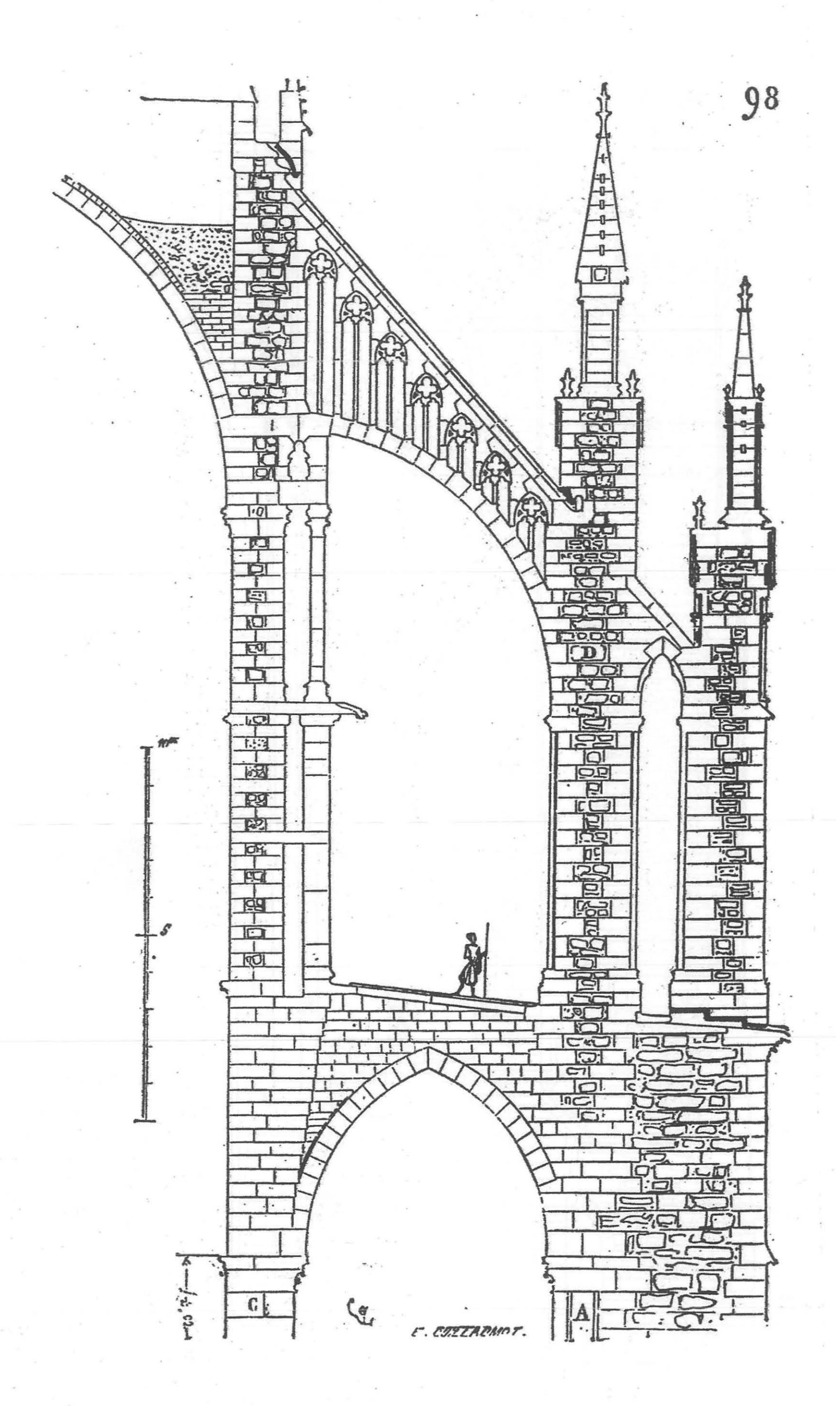


Figura 1.18
Amiens según Viollet-le-Duc

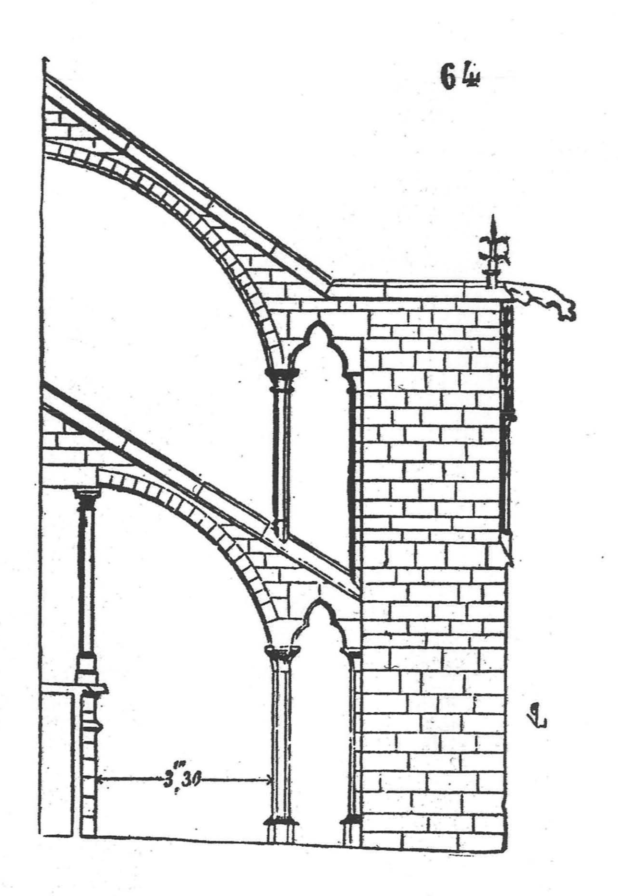


Figura 1.19.
Clermont-Ferrand según Viollet-le-Duc

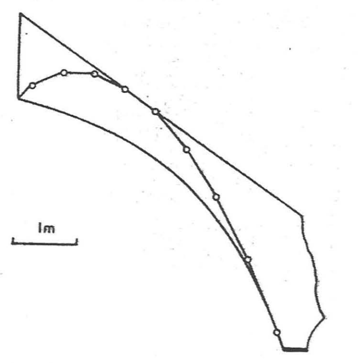


Figura 1.20
Línea de empujes pasivos, Clermont-Ferrand

El arbotante superior de la figura 1.19 (Clermont-Ferrand) se ha analizado en detalle. El arbotante se dibujó a escala, dividiéndose en una serie de segmentos y concentrándose el peso de cada segmento en su centro de gravedad. Luego se calculó la línea de empujes pasivos de la figura 1.20; la posición de la articulación en el trasdós se encontró por tanteos, usando el método de Coulomb.

Partiendo de esta línea de empujes pasivos, y suponiendo un peso del arbotante de 100 kN, la cabeza del arbotante se apoya contra la nave produciendo un empuje horizontal mínimo de 30 kN. El arbotante llega a tener que resistir una carga máxima de viento de hasta 200 kN (véase Fitchen[19]).

Figura 1.21
Notre-Dame, París, según Viollet-le-Duc

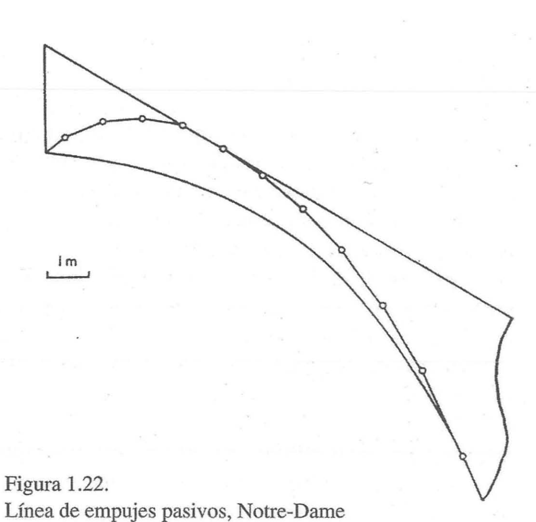


Figura 1.22.
Línea de empujes pasivos, Notre-Dame

Las figuras 1.21 y 1.22 dan resultados similares para los grandes arbotantes de Notre-Dame de París. El empuje pasivo en Notre-Dame es cuatro o cinco veces el de Clermont-Ferrand, ya que el vano es mucho mayor; sin embargo, las figuras 1.20 y 1.22 son muy similares. En particular, la caída de la línea de empujes en la cabeza del arbotante es muy pronunciada.

Desde este punto de vista, los constructores góticos de Francia nunca llegaron a dominar el arbotante de la misma manera en que se hizo, aproximadamente en la misma época, en Inglaterra. Las figuras 1.23 y 1.24 corresponden a la catedral de Lichfield; se observará que el empuje pasivo en la cabeza del arbotante es prácticamente horizontal. (Lichfield, y las catedrales inglesas en general, son más bajas y menos esbeltas que las francesas y es previsible que haya diferencias en los sistemas de contrarresto.)

Figura 1.23
Lichfield según Sir Banister Fletcher[39]

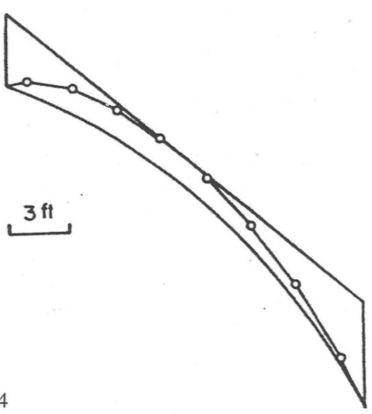


Figura 1.24
Línea de empujes pasivos, Lichfield

Las cifras calculadas para Lichfield pueden servir para ilustrar el funcionamiento típico de un arbotante. El empuje pasivo es de alrededor de 30 kN ; el máximo empuje activo capaz de originar la rotura por aplastamiento en la sección transversal mínima del arbotante es de unos 10^4 kN . Tomando un factor de seguridad de 1/10 sobre esta última cifra, se puede decir que el arbotante puede trabajar satisfactoriamente con cualquier empuje comprendido entre 30 y 1.000 kN ; por tanto, se adaptará por sí mismo, automática y exactamente, para resistir cualquier valor del empuje (debido a las cargas permanentes o a las sobrecargas) dentro de ese rango.

Así, el arbotante de Lichfield realmente estará sometido a un empuje pasivo incrementado, que equilibra exactamente el valor del empuje pasivo de las cargas permanentes de la bóveda. Por otro lado,

Figura 1.25
Amiens según Viollet-le-Duc

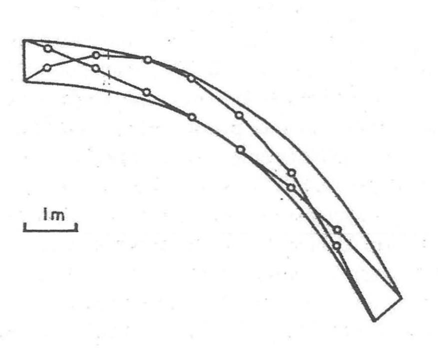


Figura 1.26
Líneas de empujes activos y pasivos, Amiens

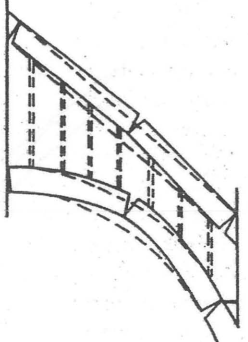


Figura 1.27
Forma de colapso posible, Amiens

el arbotante de Lichfield resistirá cargas de viento. Este funcionamiento dual del arbotante está a veces disociado, disponiéndose arbotantes separados, véase, por ejemplo, Saint-Denis (figura 1.16), Beauvais (figura 1.17) y Reims (figura 1.46). La figura 1.17 quizá muestre la disposición más claramente: el arbotante inferior soporta el empuje del peso de la bóveda, mientras que el superior (ver Fitchen[19]) soporta la carga de viento sobre los muros superiores de la nave y sobre la gran cubierta. Con tiempo apacible, el empuje pasivo en el arbotante superior tendrá un valor mínimo, con una pronunciada caída de la línea de empujes en la cabeza.

Como ejemplo numérico final del funcionamiento de los arbotantes, se analizarán los de Amiens, que se muestran a escala ampliada en la figura 1.25.

Esta ilustración muestra los arbotantes de la cabecera tal como se construyeron y como todavía existen. Originalmente se dispusieron para la nave contrarrestos similares, pero fallaron por pandeo en dirección vertical y fueron reemplazados por un diseño distinto en el siglo XV.

Los arbotantes de la nave están sometidos a unas fuerzas de viento mayores que las de la cabecera. En la figura 1.25 puede verse que el nervio superior recto, separado del nervio inferior por la tracería, puede soportar las cargas de viento. Sin embargo, si el nervio inferior curvo pandea, el nervio recto superior se desplazará, siendo inútil como riostra frente al viento. Parece que éste fue el modo de colapso.

Se realizó un análisis numérico para el nervio inferior, teniendo en cuenta que soporta el peso del nervio superior transmitido a través de las columnas cortas de la tracería. La figura 1.26 muestra, como es habitual, la línea de empujes pasivos, que corresponde a un empuje horizontal pasivo de unos 50 kN. La otra línea de empujes de la figura corresponde al máximo empuje horizontal activo compatible con la estabilidad del arbotante. En este caso, la curvatura del nervio inferior limita el valor de este empuje que en lugar de poder tener un valor infinito (como en Lichfield), sólo alcanza a ser cuatro veces el empuje pasivo; siendo éste de 50 kN, el valor máximo del empuje horizontal resistido es de 200 kN, del mismo orden que la máxima carga de viento.

Con este valor máximo del empuje, el nervio inferior empieza a pandear hacia arriba, figura 1.27, desplazando al nervio superior, posibilitando que el muro de la nave se incline hacia el exterior.

La figura 1.17 (Beauvais) y las figuras 1.18 y 1.25 (Amiens) muestran pilares intermedios entre la nave y el botarel. En Beauvais, por ejemplo, el doble sistema de arbotantes termina en primera instancia en el pilar intermedio. A su vez se utilizan pequeños arbotantes (S y T en la figura 1.17) para apuntalar el pilar intermedio desde el botarel. Para luces totales tan considerables, la única alternativa sería usar arbotantes muy grandes, como los de Notre-Dame (figura 1.21). Los empujes pasivos de arbotantes de tal magnitud son, desde luego, mucho más altos que los desarrollados por un sistema estructural que usa pilares intermedios.

Bóvedas y cúpulas

Como se mencionó anteriormente, las cúpulas dispersan las fuerzas. El objetivo de los constructores góticos era proporcionar a la nave una cubrición de piedra (como protección contra el fuego) y, al tiempo, una estructura que admitiera la mayor cantidad posible de luz. Así, era preciso que la bóveda de la nave concentrase las fuerzas de modo que la estructura intermedia se pudiera suprimir. Inevitablemente, por tanto, la cáscara de la bóveda estaría sometida a tensiones muy altas en las zonas donde se une a la estructura principal, puesto que la carga sólo se puede transmitir en esos puntos. El logro extraordinario de los constructores góticos fue comprender que una cáscara continua estaría sobretensionada y que la única solución viable conllevaba la unión de trozos de cáscaras sobre nervios estructurales. De este modo el nivel de tensiones en la propia cáscara se puede mantener bajo y uniforme, mientras que los nervios diagonales del tramo abovedado transmiten la carga a los pilares principales.

Sin embargo, cuando Viollet-le-Duc (artículo *Cathédrale*) escribe: «Ya en 1220 Guillaume le Breton habla de sus bóvedas (Chartres) 'las cuales' dice 'se pueden comparar a la concha de una tortuga'», da una imagen equivocada ya que la concha de una tortuga es continua y no presenta pliegues. Los pliegues de las aristas, en sí mismos una debilidad de la cáscara de una bóveda gótica, se refuerzan con nervios de fábrica para conseguir una unidad estructural rígida y ligera de gran resistencia intrínseca.

Fitchen señala que «...hasta ahora no se ha escrito nada en relación a la aplicación de la teoría de las cáscaras delgadas a la plementería de las bóvedas

nervadas góticas». Aquí se hará esta aplicación, de la que surgirán uno o dos temas interesantes. Sin embargo, los principales esfuerzos en la bóveda se puede determinar totalmente mediante sencillas consideraciones de equilibrio.

La figura 1.28, redibujada a partir de Fitchen, muestra dos tramos de una bóveda cuatripartita, en la que cada tramo es aproximadamente un rectángulo de proporciones 2:1. Las aristas están reforzadas con nervios que habrían sido levantados primero sobre cimbras de madera. Construidos los arcos perpiaños y formeros, así como los fundamentales arcos cruceros, la cáscara de la bóveda se habría hecho por hiladas recibidas con gruesas juntas de mortero. Una vez terminado un tramo, se retirarían las cimbras de los nervios y se levantarían otra vez en el tramo siguiente.

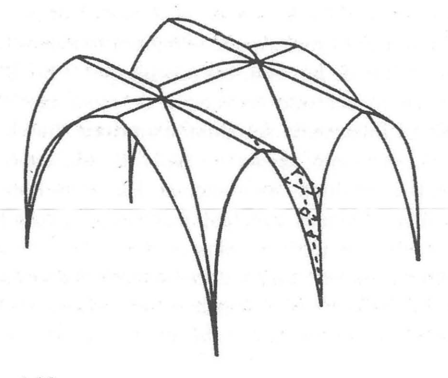


Figura 1.28
Sistema de bóvedas cuatripartitas (según Fitchen)

A continuación, se investigarán las tensiones en la cáscara y en los nervios cruceros y se intentará dar una respuesta a un particular y curioso problema. El seno conoidal de la bóveda, ilustrado en la figura 1.28 por secciones horizontales triangulares y trapeciales, está relleno casi siempre por mampostería de ripio y cascote hasta más de la mitad de la altura de las bóvedas, es decir, hasta aproximadamente el nivel marcado. Fitchen comenta la acción estabilizadora de este relleno de mampostería, que puede apreciarse con claridad en las secciones transversales de Beauvais (figura 1.17) y Amiens (figura 1.18). Mackenzie[30] muestra un relleno similar en su sección de la capilla del King's College, igual que Willis[31] lo hace en su sección transversal de la catedral de Peterborough y de la capilla de San Jorge en Windsor.

Comenzaremos el estudio de este problema analizando el comportamiento de las cúpulas en lugar del de las bóvedas. La conocida solución de la membrana para la cúpula semiesférica de espesor constante (véase, por ejemplo, Flügge[32]) viene dada por las dos resultantes de tensión principales (N_φ, N_θ). En la figura 1.29,

$$N_\varphi = -\frac{\omega a}{1 + \cos\varphi}$$

y la resultante de tensión N_θ en la dirección de los paralelos viene dada por

$$N_\theta + N_\varphi = -\,\omega a \cos\varphi$$

En estas expresiones ω es el peso por unidad de superficie de la cáscara.

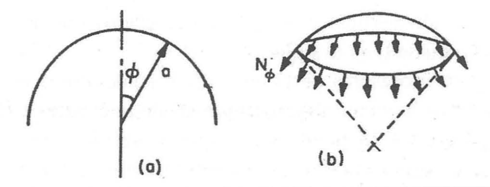


Figura 1.29.
Cúpula semiesférica

Para un ángulo φ pequeño, próximo a la clave de la cúpula, ambas resultantes de tensiones son de compresión. Sin embargo, a medida que φ aumenta, la tensión en los paralelos N_θ cambia de signo y se convierte en tracción; esto sucede para $\varphi \approx 52°$. Por tanto, una cúpula de fábrica tenderá a agrietarse cerca de la base. Por esta razón, Fontana y della Porta colocaron cadenas de hierro al construir la cúpula de San Pedro de Roma a finales del siglo XVI (ver, por ejemplo, Straub[10]).

Sin embargo, como es bien conocido, la cúpula se agrietó gravemente y fue objeto de varios informes periciales, uno de los cuales fue realizado por Poleni.[33] En su análisis, Poleni observó que un arco sometido a una carga uniforme debería proporcionarse para tener la forma de una catenaria invertida, y usó la misma idea para la cúpula. Considerando la cúpula dividida en delgados segmentos o «gajos» (figura 1.30), cada uno separado de sus contiguos, dedujo la línea de empujes para este elemento cargado

de manera no uniforme y demostró que esta línea de empujes en efecto se encuentra dentro de la fábrica de la cúpula tal como fue construida.

Concluyó que las grietas se debían a asentamientos desiguales, más que a una posible inestabilidad, y que, por tanto, no eran peligrosas; estuvo de acuerdo con otros peritos en que se debían introducir zunchos de hierro adicionales.

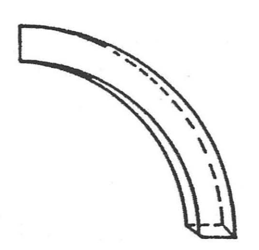


Figura 1.30.
Segmento fusiforme («gajo») de una cúpula semiesférica

Este enfoque de Poleni está completamente justificado desde el punto de vista del análisis límite. Poleni obtuvo una solución estáticamente admisible que, por consiguiente, era segura. Desde el punto de vista formal, se obtuvo una línea de empujes, no para la cúpula original, sino para una cúpula dividida en segmentos fusiformes. Evidentemente, la solución para la cúpula «cortada» es estáticamente admisible para la cúpula original. Recordemos que Yvon Villarceau usó la misma técnica para los arcos.

Gregory[34] hace algunas observaciones interesantes sobre la filosofía de este tipo de enfoque estático del cálculo de estructuras. Siegel[35] cita el caso de la Frauenkirche de Dresde (destruida en la Segunda Guerra Mundial) que fue objeto de una investigación en los años treinta. Se había observado un agrietamiento similar y se demostró que la cúpula estaba funcionando no como una cáscara continua sino como serie de arcos en forma de «gajos». Una vez más, la cúpula era segura. Por tanto, es interesante determinar qué espesor mínimo debe tener una cúpula para que sea estable. Siegel da una tabla con los espesores, dimensiones y esbelteces de distintas cáscaras (tabla 1.1).

Las cáscaras muy delgadas sólo se pueden construir, desde luego, (como ya señaló Goethals[36]) usando hormigón *armado*, es decir, empleando acero para absorber las tracciones que se desarrollan.

Las cúpulas de pequeña esbeltez L/d (luz/espesor) se pueden (y podían) construir sin refuerzos, y es posible aplicar el análisis de Poleni a la cúpula semiesférica para obtener una estimación segura del espesor mínimo. Considerando un segmento del tipo dibujado en la figura 1.30, se puede determinar la línea de empujes. Esta línea se desvía en sólo poco más del ±2% del radio medio de una circunferencia. Así, si una cúpula semiesférica estuviera dimensionada para tener un espesor aproximado de un 4,5% del radio ($L/d = 45$), se podría encontrar una línea de empujes estáticamente admisible, para la cúpula «cortada», menos resistente que la real. Esta cúpula

Tabla 1.1
Dimensiones y esbelteces de cáscaras

	Vano L(m)	Espesor de la cáscara d(mm)	L/d
San Pedro de Roma	40	3.000	13
Frauenkirche, Dresde	24	1.250	19
Huevo de gallina	0,04	0,4	100
Planetario Zeiss, Jena	40	60	667
Mercado Central, Basilea	60	85	700
Palacio de Exposiciones, París	205	130	1.570

está dibujada a escala en la figura 1.31 donde también se muestra la línea de empujes contenida dentro de la fábrica. (Para dar seguridad frente a la inestabilidad, una cascara real se regruesará ligeramente; de este modo, se garantizará que la línea de empujes permanece dentro de la fábrica a pesar de movimientos ocasionales de la estructura.)

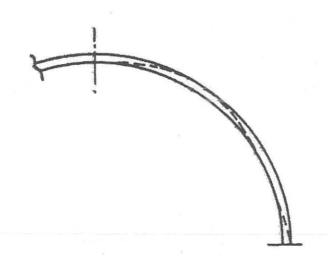


Figura 1.31
Línea de empujes estáticamente admisible para una cúpula semiesférica

La conclusión es que se puede construir sin refuerzo una cúpula semiesférica de fábrica con un espesor constante del 4,5 % del radio y que esa cúpula será estable. En realidad el 4,5 % está sobreestimado y una cúpula más delgada se sostendría.

Es importante señalar las diferencias entre la solución segura y estáticamente admisible de Poleni y la solución de membrana dada anteriormente. En la solución de membrana el espesor de la cáscara se supone infinitesimal y, por tanto, todas las fuerzas actúan en la superficie de la cáscara.

La solución de «gajos» permite, sin embargo, que la línea de empujes se aparte de la superficie media de la cáscara; esto hace que los empujes vayan acompañados de flexión con respecto a esta superficie media. Sin embargo, para el ejemplo anterior, donde el espesor de la cúpula es el 4,5 % del radio, la flexión será absorbida por tensiones de compresión exclusivamente.

(Como tema de interés, conviene decir que es posible realizar un cálculo de membrana para una cúpula que sólo implique tensiones de compresión, análogo a la catenaria invertida en dos dimensiones; los perfiles de estas cúpulas los ha estudiado, por ejemplo, Bouteloup.[37])

La solución de membrana implica tracciones en el material en la base de la cúpula semiesférica; la solución de «gajos» conduce a una línea de empujes que es oblicua en el arranque y que, por tanto, requiere una fuerza de contrarresto hacia el interior, quizá proporcionada por un zuncho o cadena de hierro. En cualquier caso, el problema aparece cerca de la base de la cúpula, donde es preciso un refuerzo externo. Para evitar este problema debe cortarse la cúpula según un paralelo, para que deje de ser una semiesfera completa, o bien engrosarla cerca de la base, uniéndola progresivamente a otra parte de la estructura, para que en esa zona ya no sea una cáscara delgada.

Nótese que el relleno de mampostería del seno de una bóveda gótica cumple un objetivo análogo. Permite aplicar a la cáscara de la bóveda fuerzas de contrarresto al tiempo que posibilita que la cáscara delgada se una progresivamente al relleno macizo de fábrica. Breymann conocía este efecto en estructuras planas; su figura 11 (en la figura 1.5 de este capítulo) muestra un relleno de este tipo entre dos arcos de medio punto.

La bóveda nervada

A modo de primera aproximación a la bóveda gótica, consideraremos la intersección de dos cañones semicirculares de radio a, dibujados en perspectiva en la figura 1.32(a) y en planta en la 1.32(b). Para los ejes de la figura, según Flügge, los esfuerzos de *membrana* en un elemento serán los que se indican en la figura 1.33, donde ω es el peso de la cáscara por unidad de superficie. Componiendo las fuerzas en dirección radial, anular y axial, tenemos,

$$N_\varphi = -\,\omega\, a \cos \varphi$$

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} = -\,\omega \operatorname{sen} \varphi - \frac{1}{a}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{1}{a}\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi}$$

y estas ecuaciones se pueden resolver, dando:

$$N_\varphi = -\,\omega\, a \cos \varphi$$

$$N_{x\varphi} = -2\omega x \operatorname{sen} \varphi + \mathrm{f}_1(\varphi)$$

$$N_x = \frac{\omega x^2}{a} \cos \varphi - \frac{x}{a}\frac{\mathrm{df}_1}{\mathrm{d}\varphi} + \mathrm{f}_2(\varphi)$$

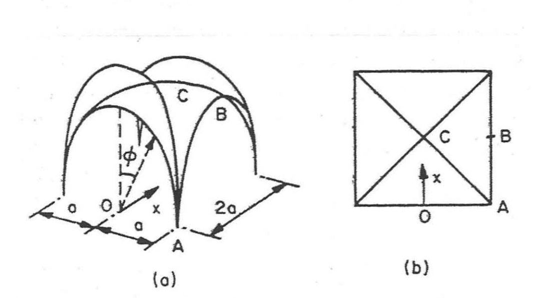


Figura 1.32
Bóveda nervada semicircular, tramo cuadrado

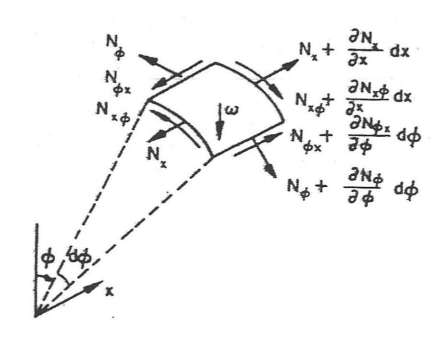


Figura 1.33
Elemento de cáscara cilíndrica

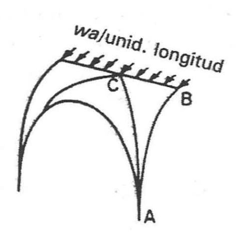


Figura 1.34
Bóveda seccionada por la línea de clave, perspectiva

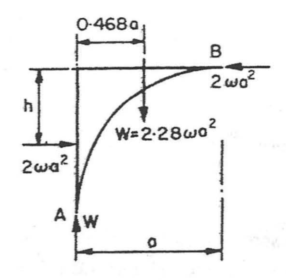


Figura 1.35
Bóveda seccionada por la clave, alzado lateral

donde la funciones de integración arbitrarias $f_1(\varphi)$ y $f_2(\varphi)$ se deben determinar a partir de las condiciones de contorno del problema.

Nótese que las resultantes de las tensiones se han obtenido directamente a partir de las ecuaciones de equilibrio, sin usar ninguna condición de compatibilidad o ley de tensión-deformación. La solución de membrana, en realidad, está determinada estáticamente y depende sólo del peso unitario y de las dimensiones de la cáscara.

Se puede observar, primero, que la resultante de tensiones N_φ está determinada unívocamente sin referencia a las condiciones de contorno (de hecho, depende sólo de la curvatura local de la cáscara); para $\varphi=0$ tiene el valor $-\omega a$. Para el problema concreto de la figura 1.32, la función f_1 es cero en cada punto por simetría. Si se da un corte transversal a la bóveda, como el de la figura 1.34, el único esfuerzo actúa en el corte será una compresión uniforme de valor ωa por unidad de longitud.

En la figura 1.35 se muestra el alzado lateral de la bóveda cortada y al nivel de B actúa la fuerza horizontal total $2\omega a^2$. Sin considerar el peso de los nervios, la semibóveda tiene un peso $W = \omega a^2(2\pi-4) = 2{,}28\omega a^2$ que actúa a una distancia $(9\pi/8-3)a/(\pi-2) = 0{,}468a$ del borde libre. A esta fuerza vertical se debe oponer una fuerza vertical igual W aplicada en A, y para el equilibrio, una fuerza horizontal $2\omega a^2$ tiene que actuar a una altura h por debajo de la línea de clave superior de la bóveda, de modo que $(2\omega a^2)\ (h) = W(0{,}468a)$, es decir, $h = (9\pi/8-3)a = 0{,}534a$.

¿De donde proviene esta fuerza horizontal? Si la bóveda de la figura 1.32 representa un tramo de una bóveda completa de una nave, de la que en la figura 1.36 se muestran dos tramos, se observará que no hay problema en la dirección longitudinal; cada cáscara se *apoyará* contra la contigua con la fuerza necesaria. (Desde luego con problemas constructivos. La terminación de un tramo de bóveda sostendrá todos los tramos terminados previamente pero se

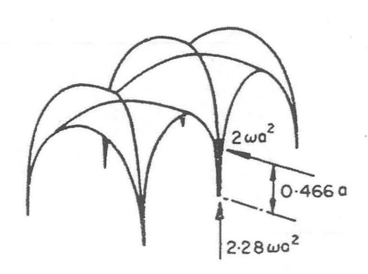


Figura 1.36
Empuje de la bóveda contrarrestado por el arbotante

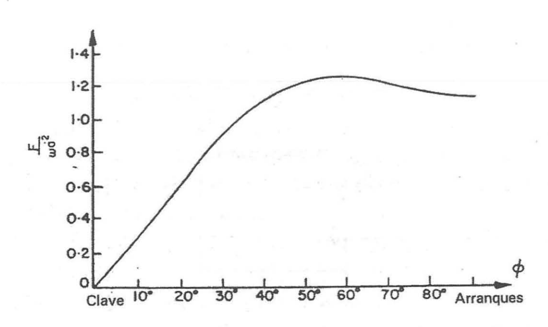


Figura 1.37
Fuerzas en un nervio diagonal

deben organizar cimbras que estabilicen en dirección *horizontal* el último nervio transversal sin apoyo.)

Sin embargo, tiene que haber una fuerza exterior, como se muestra en la figura 1.36, en dirección transversal. Esta fuerza es el *empuje de la bóveda* que será contrarrestado por los arbotantes; idealmente, la cabeza de los arbotantes debe apoyar aproximadamente hacia la mitad entre el arranque y la clave de la bóveda. Obsérvense las posiciones del arbotante inferior de Saint-Denis, figura 1.16, del *tas-de-charge* M de Beauvais, figura 1.17, y del de Amiens, figura 1.18 (los tres parecen bajos), y de los grandes arbotantes bien colocados de Notre-Dame, figura 1.21, Lichfield, figura 1.23, y Reims, figura 1.46.

Ahora bien, si el arbotante ejerce un empuje a la altura indicada en la figura 1.36, los senos de la bóveda deben ser macizos para que el empuje se pueda transmitir a la cáscara; así pues, es preciso rellenar los senos al menos hasta la altura de la línea de acción del empuje de la bóveda.

A partir de consideraciones generales de equilibrio como las de la figura 1.35, es posible determinar las fuerzas en los nervios cruceros a lo largo de las aristas como función del valor de N_φ y del peso de la cáscara. La fuerza F en cada nervio tiene un valor

$$F = \frac{2\omega a^2\sqrt{(2+\mathrm{tg}^2\varphi)}}{\mathrm{tg}\,\varphi}\,[\mathrm{sen}^2\,\varphi\cos\varphi -$$

$$-\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \varphi + \cos\varphi - 1]$$

que se representa en la figura 1.37. No hay fuerzas en los nervios transversales (perpiaños) ni en los formeros, que no sean las debidas a su propio peso.

Sin embargo, las fuerzas *F* en el nervio crucero son grandes y la solución de equilibrio deducida hasta ahora, que describe con precisión cómo funciona la bóveda, sólo es posible si la cáscara está *reforzada* a lo largo de las aristas por los nervios cruceros; los «pliegues» en una cáscara son líneas de potencial debilidad y se deben fortalecer de este modo. Así, los nervios cruceros de la bóveda sirven: (a) como elemento estructural necesario de la bóveda terminada, (b) como cimbras permanentes para construir la cáscara, y (c) como cubrición para esconder la junta entre dos superficies de la cáscara.

Siguiendo con el análisis, las expresiones de las tres resultantes de tensiones son

$$N_\varphi = -\,\omega\, a\cos\varphi$$

$$N_{x\varphi} = -2\omega x\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$N_x = \frac{\omega x^2}{a}\cos\varphi + f_2(\varphi)$$

La función $f_2(\varphi)$ representa el empuje axial (empuje de la bóveda) distribuido a lo largo de la cáscara semicircular en la sección $x = 0$, que tiene un valor total integrado de $2\omega a^2$. Como ya se ha visto, este empuje lo ejerce bien la porción contigua del siguiente tramo de la bóveda, en la dirección longitudinal, o bien los arbotantes, en la dirección transversal. La función $f_2(\varphi)$ está estrechamente relacionada con los empujes *F* en los nervios cruceros; la expresión es larga y se muestra gráficamente, para un cuarto de circunferencia, en la figura 1.38.

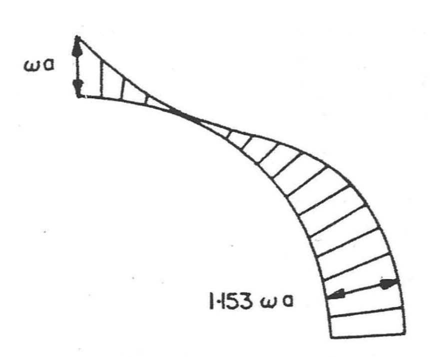


Figura 1.38
Distribución del empuje en la cáscara de la bóveda

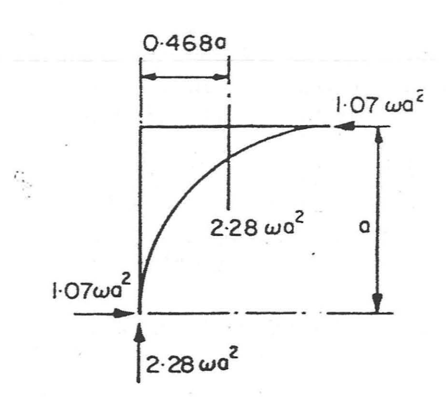


Figura 1.39
Empuje de la bóveda contrarrestado en el arranque

Esto completa la solución de membrana exacta para la bóveda de crucería, recta y cilíndrica, de planta cuadrada, de la figura 1.32. Un empleo moderno de estas bóvedas se puede encontrar en el Aeropuerto de Saint Louis (véase Becker[38]). Aquí los tres tramos abovedados tienen cada uno 36 m de lado, las cáscaras de hormigón armado tienen un espesor de 110 mm y los nervios están colocados en el exterior. La relación entre la luz y el espesor es de 320; la relación entre el espesor y el radio es aproximadamente del 0,5 %. Las bóvedas no son completamente semicirculares, sino que están cortadas aproximadamente a 55° con respecto a la vertical, es decir, casi exactamente en la sección en la que hay que contrarrestar el empuje de la bóveda.

Para avanzar un poco hacia la solución para una bóveda real consideremos primero el mismo tramo cuadrado de la figura 1.32, pero con el arbotante mal colocado. Supongamos, por ejemplo, que el *tas-de-charge* está situado exactamente en el arranque de la bóveda, de manera que el empuje horizontal actúa como en la figura 1.39 (cf. figura 1.35). El peso W de la bóveda (que suponemos igual a 2,28 ωa^2), y la línea de acción de este peso son, desde luego, fijos; en la figura 1.39, existe un par en el sentido de las agujas del reloj de magnitud $(2{,}28)(0{,}468)\omega a^3 = 1{,}07\omega a^3$, al que se debe oponer un par igual y de sentido contrario. De este modo en la figura 1.39 las fuerzas horizontales tienen un valor igual a 1,07 ωa^2. Éste es incompatible con el valor local de N_φ en la clave, que tiene un valor $2\omega a^2$, figura 1.35.

N_φ depende de la curvatura local; si la bóveda es estable, se debe deformar en la clave (de manera que la curvatura se haga aproximadamente el doble) para dar lugar a la fuerza total 1,07 ωa^2 de la figura 1.39. Más exactamente, se ha supuesto una cáscara infinitamente delgada, mientras que la bóveda real tiene un espesor finito; lo que ocurre es que la línea de empujes, contenida dentro de la fábrica de la bóveda, tiene que apartarse de la superficie media de la cáscara. Más adelante se verá que el empleo de bóvedas apuntadas conduce a una reducción del empuje de la bóveda, y de este modo permite unos arbotantes más bajos que los necesarios para un bóveda cilíndrica.

Hay, además, una segunda consecuencia de un arbotante bajo, que quizá puede verse mejor en la figura 1.36. Si el esfuerzo horizontal actúa al nivel de los arranques, es evidente que esta fuerza producirá importantes (e inadmisibles) flexiones en los esbeltos senos de la bóveda, a menos que éstos estén rellenos con fábrica para transmitir la fuerza a compresión. Además, el relleno de mampostería, por sí mismo, ayuda a compensar el equilibrio para un arbotante bajo; en la figura 1.39 el relleno contribuirá con un momento adicional, aunque pequeño, en el sentido de las agujas del reloj alrededor del arranque, permitiendo así un incremento del valor del empuje de la bóveda sobre el valor 1,07 ωa^2.

Sin embargo, una bóveda real de una catedral está (a) sobre tramos rectangulares más que cuadrados, (b) no es circular sino apuntada, (c) no es cilíndrica, sino por lo general ligeramente cupuliforme y (d)

está a menudo tan «mal» construida que en un examen minucioso se aprecia que se aparta groseramente de cualquier superficie matemática reconocible. Las resultantes de tensiones de membrana obtenidas más arriba para la bóveda de cañones cilíndricos son muy sensibles a estas variaciones y, por tanto, no se pueden extraer conclusiones significativas a partir de nuevos análisis más detallados de este tipo. Sin embargo, las consideraciones generales sobre el equilibrio global se aplican a cualquiera que sea la forma concreta de la bóveda. Si se imagina que se ha hecho un corte a partir de la línea central de la nave, entonces, se pueden construir figuras similares a las figuras 1.35 ó 1.39 y se pueden determinar los empujes de la bóveda con un alto grado de exactitud, casi «a ojo» (más adelante se da un ejemplo).

Para investigar la estabilidad de la propia cáscara, se puede utilizar la técnica de construir soluciones seguras estáticamente admisibles. La cáscara se puede dividir, perpendicularmente a los ejes, en una serie de anillos, cada uno tendido entre dos de los nervios diagonales. En la figura 1.32 se observa que cerca de la clave C de la bóveda, los anillos subtienden sólo un ángulo pequeño en el centro, pero este ángulo (2α en la figura 1.40) crecerá hasta 180° a medida que el anillo se toma más cerca del borde B.

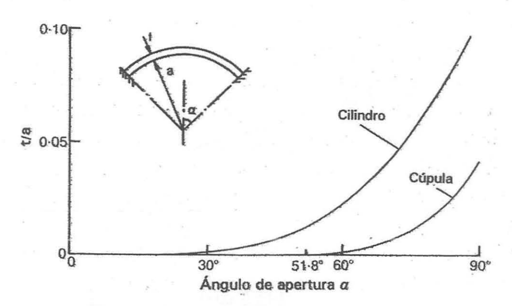


Figura 1.41
Espesor necesario para una bóveda cilíndrica y para una cúpula; soluciones seguras

La figura 1.42 proporciona el empuje de la cáscara por unidad de longitud, N_φ, en función del ángulo de apertura. Nótese que el empuje decrece lentamente desde el valor ωa de la solución de membrana.

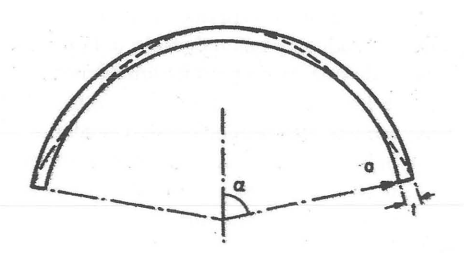


Figura 1.40
Anillo cortado de la bóveda

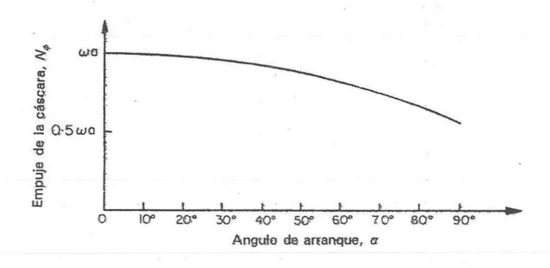


Figura 1.42
Empujes de la cáscara para una bóveda «cortada»

Al anillo de la figura 1.40 se le ha asignado un espesor t justo para contener la línea de empujes, al igual que se hizo para la cúpula (cf. figura 1.31). La figura 1.41 muestra este espesor necesario t como función del ángulo de «apertura» (también se dan los espesores correspondientes a la cúpula). Se observará que la cáscara puede ser muy delgada cerca de la clave, donde el ángulo α es pequeño, pero su espesor crecería progresivamente según nos alejásemos del centro de la bóveda.

Los resultados de las figuras 1.41 y 1.42 se han obtenido en la hipótesis (segura) de que no hay interacción entre anillos contiguos; se ha obtenido una solución estáticamente admisible para los anillos que debe, *a fortiori*, ser estáticamente admisible para la cáscara original. Así, los anillos contiguos pueden tener curvaturas ligeramente diferentes con un efecto insignificante sobre el análisis, y esto a su vez implica que una bóveda «ondulada», mal construida, no resultaría penalizada en esta investigación estáticamente admisible de su estabilidad.

El análisis se puede repetir para una bóveda apuntada, por ejemplo la que muestra la figura 1.43, en la que el centro del círculo está desplazado un ángulo α_0. Considerando otra vez la bóveda cortada en arcos, esta vez de forma apuntada, el espesor de la cáscara necesario para contener la línea de empujes se puede determinar para cualquier ángulo de desplazamiento α_0 y un ángulo de apertura α. La figura 1.44 proporciona el espesor porcentual de la cáscara para α_0=10° (es decir, un «apuntamiento» de 160° de arco), y la figura 1.45 el correspondiente valor del empuje por unidad de longitud en la clave. (Los cálculos no han sido hechos más allá de $\alpha = 70°$).

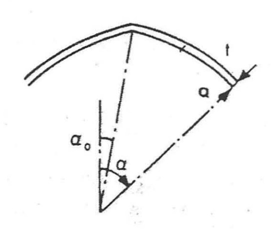


Figura 1.43
Arco apuntado

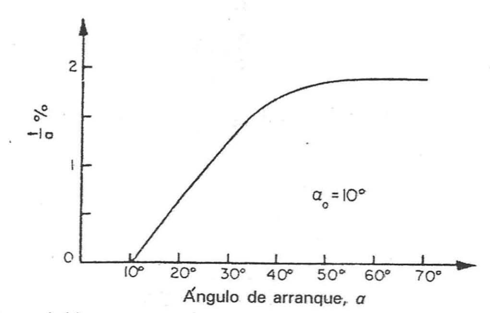


Figura 1.44
Espesor necesario de una cáscara apuntada

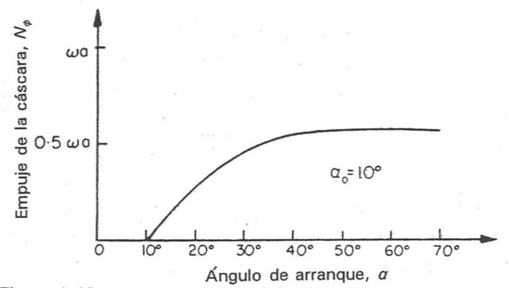


Figura 1.45
Empujes de la cáscara, bóveda apuntada

Se observará que una bóveda con un espesor del 2 % del radio se puede usar hasta α=70°. El empuje en la clave crece rápidamente desde cero en el centro del tramo de la bóveda hasta algo más de $0{,}5\omega a$ por unidad de longitud.

Algunas analogías de Reims

La figura 1.46 es una de las secciones de Reims según Viollet-le-Duc. En esta catedral la fábrica es excepcionalmente pesada, probablemente porque el proyecto original de Robert de Coucy fue recortado después de haber comenzado la construcción; las cimentaciones y los pilares de la nave corresponden a una catedral de dimensiones colosales. No obstante, las bóvedas son excepcionalmente gruesas, con casi 600 mm de espesor; las de Notre-Dame tienen unos 150 mm, y espesores entre 200 y 250 mm eran habituales en ese período. (Según Mackenzie, la capilla del King's College varía entre 50 y 150 mm.)

Es interesante «recalcular» varios de los elementos de la nave de una catedral cuyas medidas fundamentales se muestran en la figura 1.47; estas dimensiones son ligeramente mayores que las de Reims.

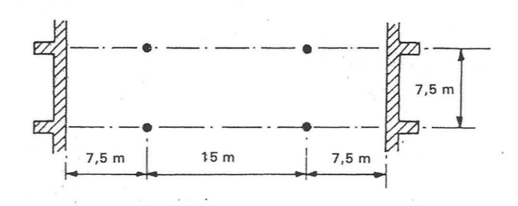


Figura 1.47
Tramo de nave; dimensiones aproximadas de Reims

La bóveda de la nave principal cubre un tramo rectangular de 15 m por 7,5 m. Suponiendo una bóveda apuntada de 160°, que se corresponde con las figuras 1.44 y 1.45, y suponiendo también un relleno de mampostería en los senos hasta la mitad de la altura total, el ángulo de apertura para la cáscara será aproximadamente de 60°; en la figura 1.44 puede verse que una cáscara con espesor del 2% del radio será satisfactoria. Tomando un radio, a, de aproximadamente 11 m, el espesor de la cáscara necesario es, por tanto, de unos 200 mm.

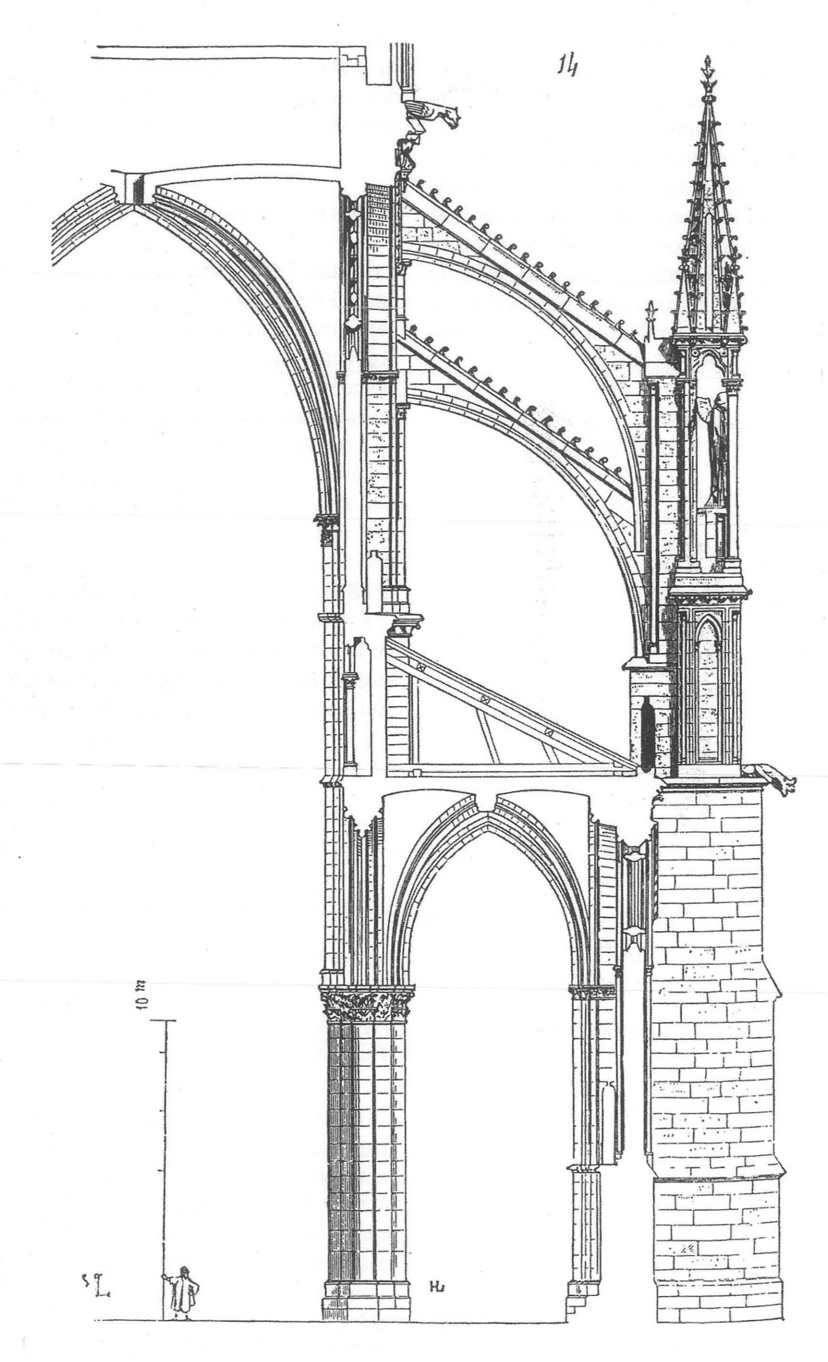


Figura 1.46
Reims según Viollet-le-Duc

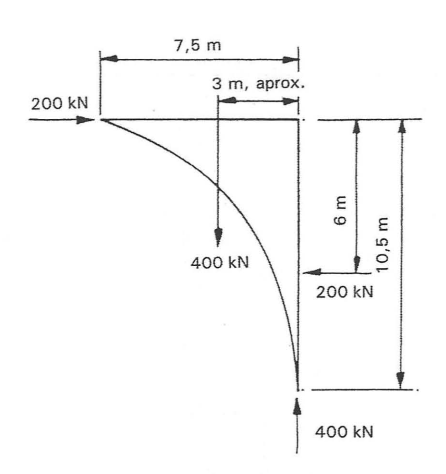


Figura 1.48
Empuje de la bóveda, análogo de Reims

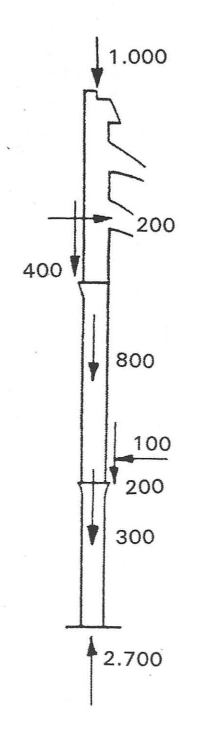


Figura 1.49
Pilar principal. Analogía de Reims (cargas en kN)

Para una piedra con un peso específico de 24 kN/m^3, el peso por unidad de superficie ω es 4,8 kN/m^2. A partir de la figura 1.45 se deduce que el empuje en la clave es por tanto, aproximadamente, (0,5)(4,8)(11) = 26,4 kN/m (correspondiente a un tensión muy baja de 0,13 N/mm^2); el empuje total a lo largo de un tramo (empuje de la bóveda) es por tanto de (26,4)(7,5) $\simeq$ 200 kN.

Englobando en un coeficiente de 1,5 el incremento de peso por los nervios y por la curvatura de la cáscara, el peso de medio tramo de bóveda es aproximadamente (1,5)(4,8)(7,5)^2 $\simeq$ 400 kN. Por tanto, refiriéndose a la figura 1.48, en la que se introducen estos valores, el empuje desde los arbotantes (200 kN) debería estar aplicado 6 m por debajo de la clave de la bóveda, coincidiendo casi exactamente con la posición del arbotante inferior existente (figura 1.46).

La máxima fuerza en un nervio crucero será de alrededor de la mitad del peso de medio tramo de bóveda, es decir unos 200 kN. Para una tensión admisible de 4 N/mm^2 una carga de 200 kN necesita una sección del nervio de 5×10^4 mm^2, es decir 250×200 mm^2.

Es interesante indicar que Fitchen[19] estima que la carga de viento horizontal que se debe considerar para los arbotantes superiores es alrededor de 150 kN, para una carga de viento unos 1,4 kN/m^2 actuando sobre la gran cubierta de Reims. (Los tramos de la fábrica de Reims son de 7 m (23 pies) y no de 7,5 m como en la figura 1.47.)

Fitchen estima también el peso propio de la gran techumbre en casi 520 kN por cada tramo de fábrica. Así, en cada tramo podría haber un peso total de 1.000 kN por encima del arbotante superior, debido a la cubierta y a los muros superiores macizos de piedra. En cualquier caso, hay suficiente peso propio disponible como para contrarrestar los empujes inclinados de los arbotantes.

Los arbotantes de la figura 1.46 están bien colocados, aunque quizá se habrían podido hacer ligeramente más esbeltos e inclinados (como los de Lichfield, figura 1.23); el arbotante inferior, que resiste un empuje de la bóveda de 200 kN, estará trabajando más en un estado activo que pasivo.

El botarel no presenta problemas de cálculo y ha sido tratado adecuadamente por Moseley. Viollet-le-Duc (artículo *Cathédrale*) llama la atención sobre la desproporción, figura 1.46, entre la parte inferior y la superior del botarel, reforzando su teoría de que el dinero empezó a escasear en esa etapa de la obra.

La figura 1.49 resume algunas de las fuerzas que probablemente actúan en el pilar principal de la nave y que suman casi 2.700 kN. (Nótese el empuje de la bóveda de la nave lateral estimado en 100 kN; la carga vertical de 200 kN se aplica excéntricamente al pilar de la nave, por medio de modillones. Compárese con la figura 408 de Ungewitter, aquí figura 1.11). Trabajando otra vez con una tensión admisible de 4 N/mm^2, una carga de 2.700 kN necesita una sección de casi 7×10^5 mm^2, que corresponden a un diámetro del pilar de la nave de poco más de 900 mm, considerablemente más esbelto que los de Reims.

La esbeltez mecánica de un pilar de 11 m de altura y 900 mm de diámetro es $l/i = 11.000/225 = 490$. Esta esbeltez parece estar dentro de los límites permisibles. Por ejemplo, suponiendo que la esbeltez mecánica fuese $l/i = \pi\sqrt{E/\sigma_{rot}}$, donde E es el módulo elástico y σ_{rot} la resistencia de rotura a compresión de la piedra. Por tanto, un elemento con una esbeltez así se rompería antes de pandear como un pilar articulado en sus extremos. Tomando un valor de E bajo, como parece probable, de 22.000 N/mm^2 (ver por ej. Ungewitter) y una σ_{rot} de 45 N/mm^2, l/i se determina como 70.

2

Soluciones de cáscara para cúpulas de fábrica

Normalmente se considera que una cáscara es «delgada» cuando tiene un espesor t menor del 5% del radio de curvatura local R (que, por supuesto, es variable); una cáscara con esbeltez $t/R = 0{,}01$ es, desde luego, una cáscara delgada y se considera que un análisis de membrana puede dar una estimación precisa de las resultantes de tensiones, excepto en la proximidad de los bordes o en el caso de formas poco afortunadas de cáscara. En un análisis de membrana se supone que todas las resultantes de tensiones actúan en la superficie media de la cáscara y que no se producen flexiones; así, por ejemplo, los esfuerzos generales que actúan sobre un elemento de una cáscara de revolución serán como los indicados en la figura 2.1.

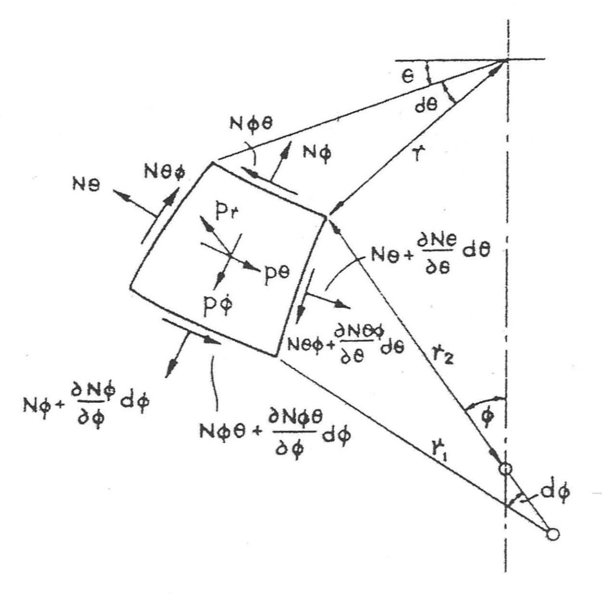


Figura 2.1
Elemento de cáscara (según Flügge)

Para una cáscara de ese tipo, se pueden escribir tres ecuaciones para las tres resultantes de tensiones en las direcciones θ y φ, y en la dirección radial; estas ecuaciones comprenderán las componentes de carga p_θ, p_φ y p_r (seguiremos a Flügge[1] en esta exposición). De ese modo, este problema en particular está estáticamente determinado, ya que se pueden deducir las resultantes de tensión sin referencia a las condiciones de compatibilidad ni a las propiedades del material (utilizando funciones arbitrarias de integración que deben obtenerse a partir de las condiciones de borde); las tres ecuaciones de equilibrio bastan para determinar las tres resultantes de tensión.

Por ejemplo, una cáscara de revolución sometida tan solo a peso propio tendrá un sistema de tensiones

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «On shell solutions for masonry domes,» *International Journal of Solids Structures* 3 (1967): 227-41. Traducción Fernando Inglés Musoles.

independiente de θ; en la figura 2.1, $p_\theta = 0$ y $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = 0$. Las dos ecuaciones de equilibrio restantes se convierten en:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(rN_\varphi) - r_1 N_\varphi \cos\varphi + p_\varphi r r_1 = 0$$
$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = p_r \qquad (1)$$

donde

$$r = r_2 \operatorname{sen}\varphi$$
$$p_\varphi = p \operatorname{sen}\varphi \qquad (2)$$
$$p_r = -p \cos\varphi$$

siendo r_1 y r_2 los dos radios de curvatura definidos en la figura 2.1; p es el peso por unidad de superficie de la cáscara.

La solución para $r_1 = r_2 = R$ (cúpula esférica) es particularmente sencilla y se obtiene que

$$N_\varphi = -p\frac{R}{1+\cos\varphi} \qquad (3)$$

en la que el valor de N_θ se puede determinar a partir de la segunda de las ecuaciones (1), $N_\varphi + N_\theta = Rp_r = -pR\cos\varphi$. (Se podría haber deducido directamente la expresión del valor de N_φ considerando el equilibrio de un casquete de cúpula, figura 2.2).

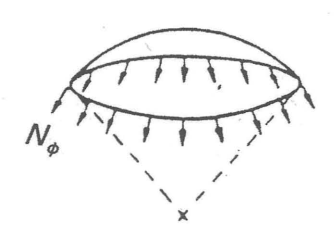


Figura 2.2
Casquete de cúpula

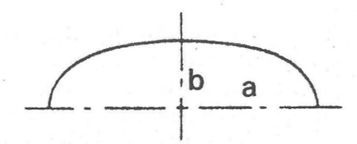


Figura 2.3
Sección transversal elipsoidal

Si la sección transversal de la cúpula no es circular sino elíptica, como se muestra en la figura 2.3, y se trata entonces de un elipsoide de revolución, Flügge da la siguiente expresión para la resultante de tensiones N_φ (que corresponde a la ecuación (3) para la esfera):

$$N_\varphi = -\frac{pb^2}{2}\frac{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}}{\operatorname{sen}^2\varphi}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{\cos\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2ac}\ln\frac{(a+c)(a-c\cos\varphi)}{(a-c)(a+c\cos\varphi)}\right] \qquad (4)$$

donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Para comparar las soluciones esférica y elipsoidal, la tensión en la clave de la cúpula ($\varphi = 0$) viene dada por la ecuación (3) como:

$$N_\varphi = -\frac{pR}{2} \qquad (5)$$

y por la ecuación (4) como:

$$N_\varphi = -\frac{pa^2}{2b} \qquad (6)$$

Así pues, la tensión en la clave de la cáscara elipsoidal se ve incrementada, en relación con la esférica, por un coeficiente en el que interviene a/b, el cociente entre el eje mayor y el eje menor de la elipse. (Nótese que estas soluciones son independientes del tamaño exacto de la cáscara; como ya se dijo, los bordes introducen alteraciones locales en las expresiones.)

Planteándolo numéricamente, supongamos que se utiliza una cúpula en casquete esférico para cubrir un área de 30 m de diámetro, con un radio de cáscara también de 30 m y una altura de 4,02 m (figura 2.4). De acuerdo con los estándares modernos, no se trata de una cúpula especialmente rebajada, como lo confirma el valor relativamente bajo del nivel de tensiones.

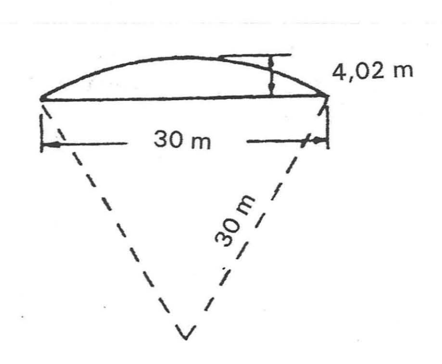


Figura 2.4
Cúpula esférica

Adoptando un peso específico del material de 20 kN/m^3 y empleando en la ecuación (5) un radio R = 30 m, se obtiene para la esfera una tensión en la clave de unos 0,3 N/mm^2. (Se puede comparar este valor con la tensión normal de servicio del hormigón a compresión de 8 N/mm^2 o la resistencia de rotura a compresión media de la arenisca, 40 N/mm^2.)

Supongamos ahora que al retirar los encofrados de la cáscara se producen pequeñas deformaciones al entrar en carga (o, como alternativa, supongamos que tales deformaciones obedecen a un replanteo ligeramente imperfecto de la cimbra original), de modo que la clave desciende 0,10 m y el conjunto de la cúpula adopta la forma de un casquete de elipsoide de revolución (obsérvese que 0,10 m es un 0,33 % del radio de 30 m). Para las dimensiones dadas, esta pequeña imperfección lleva a un elipsoide con una relación a/b entre eje mayor y eje menor igual a 2, y un valor de a = 18 m; el nivel de tensiones en la clave —ecuación (6)— aumenta hasta 0,36 N/mm^2.

Expresándolo en otros términos, es posible trazar una circunferencia y una elipse (de eje mayor doble que el menor) que salven un vano de 30 m con una altura de 4,02 m y hacer que coincidan con una holgura de ±0,10 m. Construir un encofrado con esta precisión es una tarea formidable lo que debería suscitar en el ingeniero o arquitecto que emplee la teoría de la membrana serias dudas respecto a sus herramientas de cálculo, si de verdad es consciente de la aproximación geométrica entre elipse y circunferencia.

Cuando los cálculos estructurales resultan ser tan sensibles a pequeñas deformaciones como en este ejemplo, se pueden sacar dos tipos de conclusiones. Una de dos, o la propia estructura es peligrosa, con tendencia a desarrollar tensiones de magnitud no prevista por el proyectista, o bien los cálculos realizados no son los correctos para esa estructura en particular. Ahora bien, una cáscara de dimensiones razonables (es decir, ni demasiado delgada ni demasiado rebajada) no es especialmente peligrosa; por el contrario, la supervivencia de la cúpula de Santa Sofía desde el siglo VI y de numerosas bóvedas góticas muy esbeltas a partir del siglo XII, muchas de ellas tan «mal» construidas como para que difieran toscamente de cualquier superficie matemática reconocible, y sujetas por ende a deformaciones accidentales por asientos diferenciales, indican que la cáscara de fábrica es una forma estructural particularmente estable. La conclusión debe ser en este caso la de que los cálculos convencionales según la teoría de membrana tienen escasa validez para la estimación del comportamiento de la cáscara.

Esta conclusión queda reforzada por el desarrollo numérico planteado más arriba. En general, las tensiones en una cáscara delgada de curvatura continua sometida únicamente a su peso propio son del orden de $R\rho$, siendo R el radio de curvatura local y ρ el peso específico del material (la tensión, por supuesto, es independiente del espesor —constante— de la cáscara). El tipo de cáscara analizada en este artículo tiene el radio R medido en m; volviendo a tomar ρ = 20 kN/m^3 ,las tensiones estarán por debajo de 1 N/mm^2. No habrá, pues, riesgo alguno de aplastamiento del material y, dado que la *resistencia* no es un criterio prioritario de diseño, no tiene ningún sentido el cálculo numérico detallado de los valores de la tensión a lo largo de la cáscara.

De la misma forma, tampoco es problema la inestabilidad *local*. Ahm y Perry,[2] citando a otros autores, concluyen que un valor aceptable de la tensión crítica de pandeo local de una cúpula viene dado por:

$$\sigma_{cri} = 0{,}2E\frac{t}{R} \qquad (7)$$

donde E es el módulo de Young. Tomando un valor de E de 20.000 N/mm^2 y haciendo σ_{cri} igual a un nivel de tensión de unos 0,4 N/mm^2, se obtiene de la ecuación (7) un valor de t/R de 10^{-4}. Las cáscaras de

una esbeltez como ésa quedan fuera del marco estructural. (Las tensiones de Smithfield eran más del orden de 4 que de 0,4 N/mm^2 y el pandeo era significativo. Nótese que un huevo de gallina tiene una esbeltez t/R de, aproximadamente, 10^{-2}.)

Nuevamente, es poco probable que las deformaciones supongan una limitación al proyecto, ya que una cáscara de forma razonable es rígida en sí misma. Así pues, ni la resistencia, ni la rigidez, ni la estabilidad local parecen ser parámetros que rijan el diseño del tipo de cáscara aquí considerado. Dos artículos recientes[3,4] han estudiado la aplicación a las obras de fábrica del cálculo plástico, desarrollado inicialmente para el cálculo de estructuras metálicas porticadas, llegando a la conclusión de que en muchos casos la estabilidad general es el criterio prioritario de diseño estructural. Desarrollaremos aquí dicho trabajo para tratar el problema de las cúpulas de fábrica.

ANÁLISIS LÍMITE DE FÁBRICAS

Se supondrá que las tensiones son lo suficientemente bajas como para poder considerar prácticamente infinita la resistencia a rotura de la fábrica. Además, se supondrá una construcción en seco, despreciando de ese modo la débil resistencia a tracción de los morteros. En tales condiciones, la fábrica resistirá cualquier tensión de compresión y tendrá resistencia nula a tracción. Se supondrá además que no se puede producir el deslizamiento de una piedra sobre otra.

En estas condiciones, el fallo en una sección transversal de un elemento de fábrica se produce por *articulación* sobre un borde libre del mismo, y se ha demostrado[3] que es posible aplicar los teoremas límite del cálculo plástico. Quizá se puede ilustrar mejor el efecto de articulación con el simple ejemplo bidimensional de un arco de dovelas (figura 2.5). Según el dibujo, este arco circular rebajado encaja perfectamente entre los estribos. En la práctica, por supuesto, las imperfecciones reales producirán un ajuste imperfecto; la figura 2.6 muestra dos casos en que los apoyos están ligeramente más próximos y más separados entre sí. Para adaptarse a la luz del vano, el arco ha desarrollado en ambos casos tres articulaciones.

Obsérvese que, en términos convencionales, el arco tiene tres vínculos hiperestáticos, y la formación de las tres articulaciones convierte la estructura hiperestática en isostática. Así, en la figura 2.6(a) se puede obtener fácilmente el valor del empuje horizontal H_1 tomando momentos para el arco mitad. Tales articulaciones (que implican que la obra de fábrica se agrieta) son totalmente inocuas desde el punto de vista de la estabilidad del arco: se precisa una cuarta articulación para que se forme un mecanismo de colapso y puede ocurrir que la cuarta articulación no se produzca nunca para la carga y la geometría consideradas.

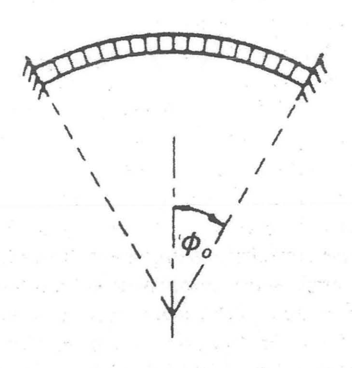


Figura 2.5
Arco de dovelas

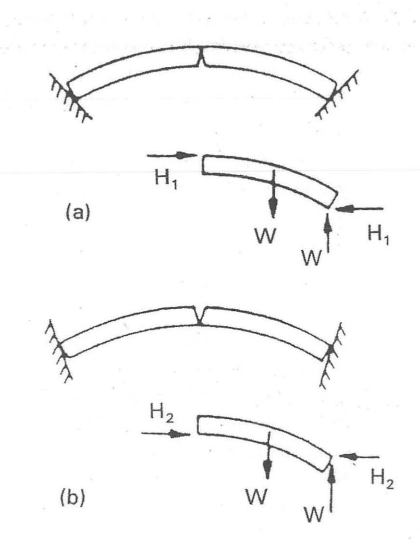


Figura 2.6
Arcos de dovelas, agrietados

La línea de empujes del arco debe pasar, por supuesto, por los puntos de articulación. Así, las líneas de empuje de las dos configuraciones de la figura 2.6 tendrán un trazado similar al de la figura 2.7. (Queda por demostrar si de hecho, las líneas de empuje quedan contenidas dentro de la fábrica, según el esquema de la figura 2.7; este problema se analiza más adelante.) Resulta evidente a la vista de los trazados esquemáticos de la figura 2.7 que los valores de H_1 y H_2 deben ser bastante distintos; el cálculo numérico a partir de los valores de $\varphi_0 = 30°$ en la figura 2.5 y de $t/R = 0{,}05$ permite obtener los valores $H_1 = 1{,}27\ W$ y $H_2 = 2{,}91\ W$, siendo W el peso de la mitad del arco. Por tanto, en este caso —que es análogo al de la cúpula de la figura 2.4— el empuje en la clave del arco puede variar más del doble, dependiendo de pequeños movimientos de los estribos. El hecho de que en los arcos existieran esas posiciones límite de la línea de empujes se descubrió bastante pronto; Coulomb, en su memoria de 1773,[7] afirma claramente que la línea de empujes puede aproximarse al trasdós o al intradós de un arco, y Breymann[8] hace un análisis detallado de los valores máximo y mínimo del empuje.

Todo el problema de la determinación de la estabilidad de una obra de fábrica se puede reducir en realidad a la cuestión, formalmente sencilla, de si la línea de empujes (superficie de empujes en una estructura tridimensional) queda o no enteramente contenida dentro de la fábrica. A partir de la hipótesis de resistencia cero a tracción no se puede aceptar que la línea de empujes se salga fuera de la fábrica, pero si es posible encontrar dentro de la misma *una* línea cualquiera de empujes que esté en equilibrio con las cargas exteriores aplicadas, el teorema de la «seguridad» del análisis límite garantiza que la estructura será estable. Así, tanto la figura 2.7(a) como la 2.7(b) podrían emplearse como prueba definitiva de que el arco, tal como está dibujado, será estable. Estas líneas de empuje no tienen por qué ser necesariamente las que aparecerían en la práctica, y el empuje horizontal puede alcanzar cualquier valor entre H_1 y H_2, pero ningún valor de H entre dichos límites podrá ocasionar el colapso del arco.

Es bien sabido que un arco circular del tipo dibujado en la figura 2.5 no tiene la forma «adecuada» para soportar su propia carga uniformemente repartida; la forma debería ser la de una catenaria invertida. No obstante, se pueden trazar muchas catenarias dentro del espesor real del arco circular considerado, siendo los dos casos límite precisamente los dibujados en la figura 2.7. Guiados por este razonamiento, se puede formular en otros términos el problema del análisis de cáscaras, o su problema bidimensional análogo, el análisis de arcos.

Por supuesto, las soluciones de membrana siguen siendo necesarias, ya que necesitamos una superficie de empujes (o una línea de empujes bidimensional). Sin embargo, la solución no tendría por qué constreñirse a que la membrana coincida con la superficie media de la estructura original. Antes bien, la geometría de la estructura define simplemente una zona —probablemente bastante reducida— dentro de la cual debe obtenerse una solución de membrana si se quiere que la estructura sea estable.

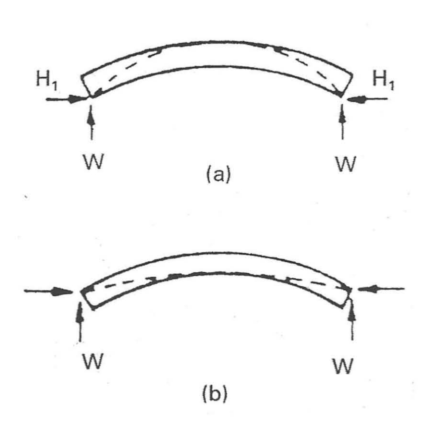


Figura 2.7
Líneas de empuje límite

EL ARCO DE DOVELAS

Si seguimos trabajando con el arco bidimensional como analogía de la cáscara, se pueden clarificar quizá las ideas realizando algunos cálculos límite. La figura 2.8 muestra un arco circular de radio medio R que abarca un ángulo de valor $2\varphi_0$; se ha elegido el espesor del arco de modo que la línea de empujes quede contenida estrictamente dentro del mismo. De ese modo, la línea de empujes toca la clave del arco en el trasdós y pasa también por el trasdós en los apoyos; la línea de empujes toca el intradós en un punto de ángulo β a determinar.

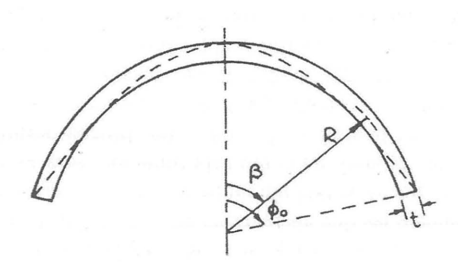


Figura 2.8
Arco de dovelas de espesor mínimo

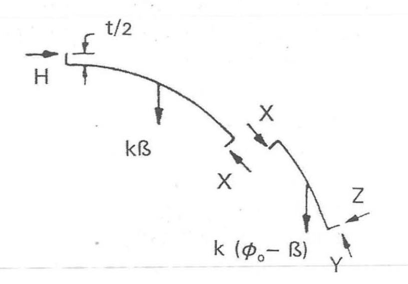


Figura 2.9
Elementos de arco

En la figura 2.9 se representa la directriz del arco, con una excentricidad $t/2$ del empuje; si el peso por unidad de longitud del arco es k, habrá unas cargas $k\beta$ y $k(\varphi_0-\beta)$ actuando como se indica. Se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio para cada una de las dos partes de la figura 2.9, y despejar a continuación las cuatro incógnitas H, X, Y y Z para obtener dos ecuaciones que relacionen t/R, β y φ_0. Se puede obtener así el valor de t/R para cualquier valor del ángulo de apertura φ_0.

La figura 2.10 da la gráfica de la esbeltez estricta necesaria para que el arco sea estable. Un arco semicircular completo requiere un valor de t/R algo mayor del 10%, pero se pueden utilizar arcos con esbeltez del 5% hasta un ángulo de apertura máxima φ_0 de cerca de 75°. (Estos sencillos cálculos se usarán más adelante en el análisis de ciertos aspectos del comportamiento de las cúpulas.)

Se puede dar una interpretación física a esta posición límite de la línea de empujes. Allí donde la línea de empujes toca la superficie de la fábrica, aparece una articulación incipiente y de acuerdo con el esquema de la figura 2.8, se formarán las articulaciones dibujadas en la figura 2.11. El número de articulaciones es suficiente para producir un mecanismo de colapso en el conjunto del arco; de hecho, para la rotura sólo son necesarias cuatro articulaciones (del signo apropiado, es decir, cerrándose y abriéndose alternativamente si se miran, por ejemplo, desde el intradós) y la quinta articulación aparece debido a la simetría de estructura y carga.

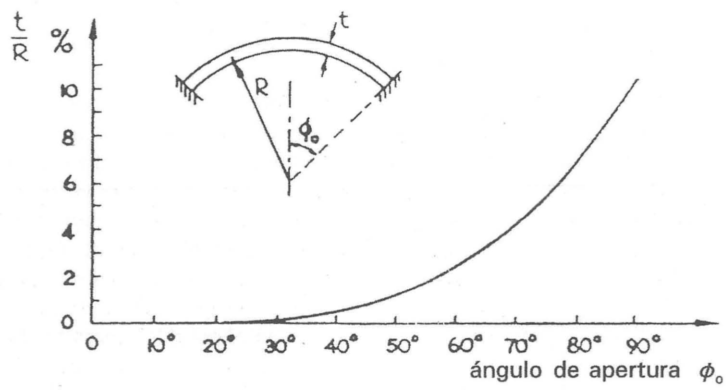


Figura 2.10
Espesor necesario de un arco

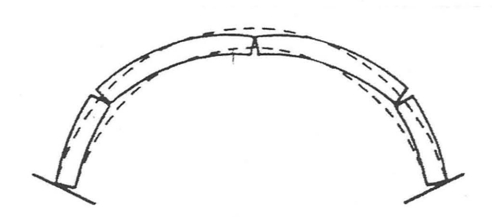


Figura 2.11
Mecanismo de colapso de un arco

Así, en correspondencia con el problema analítico de encontrar una línea de empujes contenida enteramente dentro de la fábrica, existe el problema físico de organizar una secuencia de articulaciones que formen un mecanismo de colapso para la estructura. El problema del mecanismo de colapso es fundamentalmente un problema de geometría, y bien puede suceder que la configuración geométrica de un elemento particular de fábrica sea tal que no dé lugar a ningún esquema de articulaciones que produzca ese mecanismo. Ello es cierto, por ejemplo, en el caso de un arbotante bien proyectado,[3] en el que siempre es posible encontrar una línea de empujes contenida dentro de la fábrica y se puede hacer por tanto la afirmación taxativa de que únicamente la disgregación de la sillería puede conducir a su ruina.

LA CÚPULA

Parsons[9] estima el peso de la cúpula de Santa María del Fiore, que salva una luz de más de 42 m, en 300.000 kN; esta cifra corresponde aproximadamente a una carga de 100 kN/m² de superficie de cúpula. La cúpula principal de Santa Sofía, que es mucho más delgada (unos 0,75 m), tiene un peso unitario de un orden menor de magnitud. Compárense estas cifras con la carga de viento, de magnitud habitual 1 kN/m². La fuerza de viento, pues, es pequeña o muy pequeña en comparación con los pesos propios de las estructuras que aquí consideramos y por ello, en todos los cálculos que siguen no se tendrá en cuenta la acción del viento.

Se estudiará en primer lugar la solución de membrana esférica de la ecuación (3); exclusivamente bajo peso propio, las dos componentes de la tensión son:

$$N_\varphi = -\frac{pa}{1+\cos\varphi} \qquad (8)$$
$$N_\theta = -pa\left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right)$$

Considerando en primer lugar una semiesfera completa, el valor de la tensión N_φ —siempre de compresión— aumenta desde $^1/_2\, pa$ en la clave ($\varphi = 0$) hasta pa en el arranque ($\varphi = 90°$). Por contra, el valor de N_θ, que también es de compresión en la clave (de valor $^1/_2\, pa$) cambia de signo en $\varphi = 51{,}8°$ (que es la solución de $\cos^2\varphi + \cos\varphi = 1$, es decir, $\cos\varphi = {}^1/_2(\sqrt{5}-1)$). Para $\varphi > 51{,}8°$, aparecen tensiones de tracción en dirección anular, como se indica en la figura 2.12 para la semicúpula.

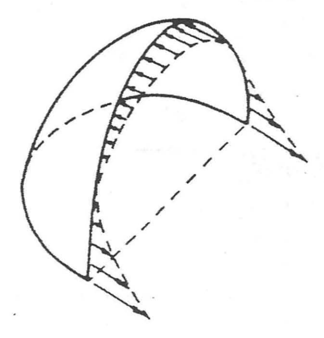


Figura 2.12
Semicúpula

Estas tensiones de tracción no son admisibles para el material que aquí consideramos y, en realidad, para la estructura de fábrica en general; la presencia de zunchos y cadenas de hierro en la zona de los apoyos de muchas cúpulas existentes dan fe de la preocupación que los ingenieros o arquitectos han sentido siempre a este respecto. (Resulta interesante que Poleni,[10] en su análisis de la estabilidad de la cúpula de

San Pedro en Roma, defendiera el uso de tales cadenas de atado, aunque había llegado a la conclusión de que, a pesar del agrietamiento, la cúpula se mantendría en pie sin atado.) Así, la solución de membrana dada por la ecuación (8) no es válida para la cúpula semiesférica sin refuerzos de tracción.

Por supuesto, no habrá dificultades con los casquetes esféricos cuyo ángulo de apertura sea menor de 51,8°. Siempre que una cúpula incompleta de tales características cargue adecuadamente en su base, las tensiones serán siempre de compresión. En tal caso, el espesor de la cúpula depende únicamente en teoría de la necesidad de prevenir el pandeo local, y cualquier cúpula tendrá en la práctica un espesor dictado por exigencias de orden constructivo. Sin embargo, la semiesfera y, en general, las cúpulas de ángulo de apertura mayor de 51,8°, requieren un cierto espesor mínimo para contener una superficie de empujes a compresión que siga pasando por el interior del material de la fábrica, aunque se separe ligeramente de la superficie de la semiesfera.

De acuerdo con Poleni, se puede cortar la cúpula en una serie de «gajos» (figura 2.13) y estudiar separadamente la estabilidad de cada una de estos segmentos fusiformes; si se puede probar que cada uno de los elementos de esta estructura dividida es estable, se podrá utilizar de nuevo el teorema de la seguridad del cálculo límite para demostrar que la estructura original tiene que ser estable. El problema analítico es muy similar al del arco de dovelas; ahora, sin embargo, el ancho del arco se reduce hasta anularse en la clave, de modo que el peso no está distribuido uniformemente. Hay que encontrar para cada huso esférico un línea de empujes que quede contenida dentro del espesor de la fábrica; como antes, se estudiará como caso límite el momento justo en que se produce el mecanismo de colapso, obteniendo entonces el espesor mínimo de la cúpula.

Formalmente, en términos matemáticos, se iguala a cero la tensión anular N_θ de las ecuaciones (1), dejando indeterminado de momento el término r_1; se resuelven entonces las ecuaciones (1) para obtener

$$prr_1\cos^2\varphi = \text{cte.} \tag{9}$$

como ecuación intrínseca de la superficie de empujes. La forma de la ecuación (9) no resulta especialmente adecuada a efectos de comparación con la superficie esférica, de modo que se aplicarán al segmento fusiforme de la figura 2.13 las técnicas utilizadas más arriba para el arco de dovelas, ilustradas en las figuras 2.8 y 2.9.

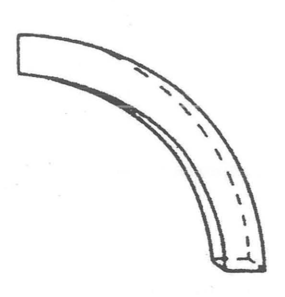


Figura 2.13
«Gajo» de una cúpula

Aunque se considerará aisladamente cada segmento, el mecanismo de colapso que corresponde a la posición límite de la línea de empujes debe ser un mecanismo posible para la cúpula considerada en su conjunto. Además, se debe demostrar que, aunque la línea de empujes alcance la superficie de la fábrica en un número limitado de puntos, las articulaciones, en el resto queda contenida siempre dentro de la fábrica. En la figura 2.14 se dibuja la posición límite correcta de la línea de empujes para un gajo; toca el trasdós de la cúpula en P y el intradós en Q. La figura 2.15 muestra el mecanismo de colapso correspondiente, según el cual hay una zona próxima a la clave que no deforma sino que tan solo desciende verticalmente; por supuesto, los tramos contiguos se separarán entre P y la base conforme la cúpula colapsa, expresando la condición de tracción nula en la fábrica.

Obsérvese en la figura 2.14 que el empuje H que actúa sobre el segmento en la clave debe estar contrarrestado por un empuje igual y contrario en el segmento diametralmente opuesto; por tanto, el análisis sólo es de aplicación a cúpulas simétricas completas y no, por ejemplo, a la semicúpula de la figura 2.12.

En la figura 2.14, los tramos entre la clave y P, entre P y Q, y entre Q y los apoyos pueden considerarse exactamente igual que en la figura 2.9 en el

caso del arco; como alternativa, se puede hacer un análisis por el método de los trabajos virtuales. En cualquiera de los casos, es posible resolver las ecuaciones numéricamente para obtener la esbeltez buscada t/R en función del ángulo de apertura φ_0 de la cúpula; la figura 2.16 ofrece una gráfica de dicho espesor. Para la semiesfera completa ($\varphi_0 = 90°$) el espesor buscado es el 4,2% del radio; al disminuir φ_0 se reduce también el espesor necesario, que se anula teóricamente para un ángulo $\varphi_0 = 51{,}8°$. Las coordenadas angulares β y β' de los puntos P y Q de la figura 2.14 están siempre relacionadas por la siguiente expresión:

$$(1-\cos\beta)\mathrm{tg}\beta' = (1-\cos\beta')\mathrm{tg}\beta \qquad (10)$$

El valor máximo de la expresión $(1-\cos\beta)/\mathrm{tg}\beta$ viene dado por:

$$\cos\beta = {}^1/_2(\sqrt{5} - 1), \text{ es decir, } \beta = 51{,}8°$$

De ese modo, una cúpula semiesférica completa que tenga un espesor del 5% del radio, por ejemplo, y que esté construida con una fábrica incapaz de resistir tracciones, se mantendrá en pie a pesar de ello sin necesidad de refuerzos. El dictamen de Poleni sobre la cúpula de San Pedro está justificado. (Siegel[11] da un diámetro de 40 m y un espesor de 3 m para la cúpula de San Pedro, con un cociente t/R del 15%; la cúpula, por supuesto, consta de dos hojas que abarcan desde la clave hasta un ángulo de $\varphi_0 \approx 70°$, siendo la esbeltez individual t/R de cada una de las hojas de entre un 6 y un 8%.) No obstante, la cúpula sin refuerzos debe estar correctamente apoyada en la base; la figura 2.14 muestra la reacción H que se debe ejercer hacia el interior, así como la reacción vertical W.

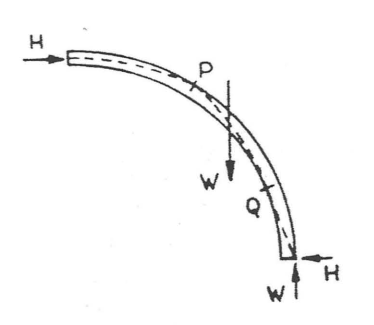


Figura 2.14
Gajo de espesor mínimo

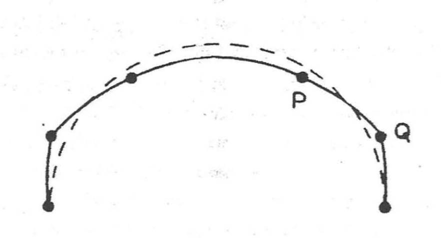


Figura 2.15
Mecanismo de colapso de la cúpula

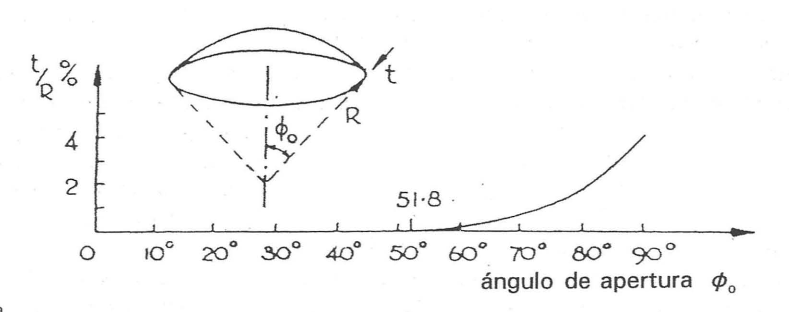


Figura 2.16
Espesor necesario de una cúpula

Se puede hacer una buena estimación del valor de H para una cúpula semiesférica considerando el equilibrio general del segmento, que se ha redibujado en la figura 2.17. La línea de acción del peso W de la cuña está situada donde se indica, de donde $H = (1-\pi/4)W = 0{,}215W$. Así pues, una cúpula semiesférica de fábrica que cubra una luz de 30 m y pese por ejemplo 26.000 kN, desarrollará un empuje horizontal total H de 5.600 kN repartido uniformemente alrededor de la base; es decir, unos 60 kN por metro lineal. Esta fuerza puede contrarrestarse con un anillo de atado en la base; en ausencia del mismo, se debe prever en la construcción el contrarresto adecuado para absorber este empuje. En Santa Sofía se encuentran dos tipos distintos de tales sistemas de contrarresto, como se comentará más adelante.

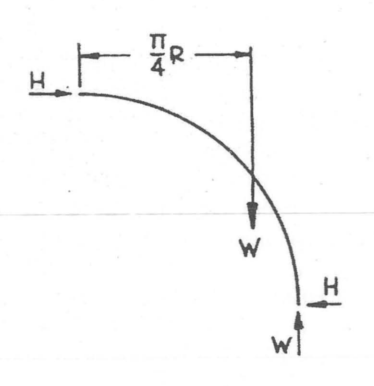


Figura 2.17
Equilibrio de un gajo

Antes de proseguir con el análisis, es interesante repasar el discurso desarrollado hasta aquí sobre la cúpula a la luz de la teoría del cálculo límite convencional. Se ha obtenido una superficie de empujes (figura 2.14) en equilibrio con las cargas aplicadas (peso propio de la cúpula) y contenida por completo dentro de la fábrica; en correspondencia con esta posición de la superficie de empujes, existe un mecanismo de colapso (figura 2.15), obteniéndose a partir de los cálculos un espesor determinado para que se cumplan todas estas condiciones. De acuerdo con los teoremas fundamentales del cálculo límite, el valor del espesor obtenido es único; más aún, es imposible que una cúpula de mayor espesor colapse bajo su propio peso y, a la inversa, no se puede construir una cúpula de menor espesor que carezca de refuerzos.

Cúpulas incompletas

Por supuesto, en una cúpula se puede prescindir completamente de la clave (es decir, la cúpula puede tener un «óculo») sin que sea necesaria ninguna modificación estructural aparente. De igual modo, también es posible cargar una pesada linterna sobre la coronación (unos 5.000 kN en la de Florencia). En ambos casos se puede volver a hacer un sencillo análisis cortando la cúpula en gajos y construyendo líneas de empuje similares a las de la figura 2.14.

De mayor interés es la media cúpula (figura 2.12). Las ecuaciones de membrana sólo admiten como posible la solución simétrica de las ecuaciones de la semiesfera completa (8), y sólo son válidas para la semicúpula si el borde vertical está sometido a fuerzas de compresión y tracción como las indicadas. Así pues, no existe ninguna solución de membrana para la semicúpula esférica exenta. No obstante, parece claro intuitivamente que una semicúpula de espesor suficiente se *sostendrá* en pie, y se puede hacer una estimación segura de dicho espesor recurriendo de nuevo a la técnica de dividir la cúpula en segmentos.

Supongamos, por ejemplo, que se corta la semicúpula en una serie de arcos semicirculares paralelos (figura 2.18), cada uno de ellos independiente de los contiguos. Según la gráfica de la figura 2.10 para el arco de dovelas, cada arco será estable si tiene un espesor t/R de algo más del 10%. Análogamente, si la semicúpula tuviera un ángulo de apertura de 75°, de forma que los arcos de las rebanadas no fueran completamente semicirculares, sería estable con una esbeltez del 5%. Estas estimaciones del espesor son seguras, ya que se ha supuesto que cada uno de los arcos funciona de forma independiente; la traba de la estructura real asegura, en virtud del teorema de la seguridad del cálculo límite, que una cáscara más delgada también se sostendría en pie.

De hecho, el corte de la figura 2.18 en arcos paralelos tiene que destruir fuerzas de interconexión bastante grandes entre los arcos, y de ahí que pueda resultar una solución de tensiones bastante distinta de

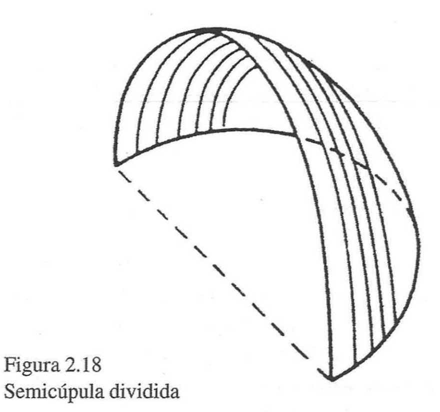


Figura 2.18
Semicúpula dividida

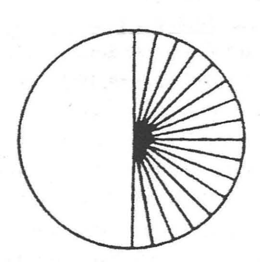


Figura 2.19
Semicúpula dividida

las tensiones efectivas en la cúpula real; no obstante, los arcos paralelos llevan a un sistema de tensiones que está en equilibrio con el peso propio de la fábrica y que resulta admisible por ello para el tipo de análisis que aquí se plantea. En la práctica, la falta de apoyo a lo largo del borde vertical libre (véase la figura 2.12 en la que se indican las fuerzas de membrana) hará que la cúpula se venza ligeramente hacia delante si la traba entre las dovelas es imperfecta. Mainstone[12] ha estudiado tal tipo de inclinación en las semicúpulas de Santa Sofía (ver más adelante) y atribuye el movimiento a las gruesas juntas de mortero entre los ladrillos, de secado muy lento.

Por tanto, una semicúpula que tenga el suficiente espesor se sostendrá como elemento estructural exento. Por otra parte, a la vista de la figura 2.12 es evidente que una semicúpula puede constituir un buen contrarresto, ya que el borde vertical libre puede admitir grandes fuerzas de compresión, al menos en la mitad superior. Como ejemplo, trivial en apariencia, considérese que se corta en primer lugar una cúpula completa (indicada en planta en la figura 2.19) en dos medias cúpulas —que se sostienen exentas— y a continuación se sigue cortando una de ellas en gajos más pequeños. Cada gajo será estable si lo empuja una fuerza H en la coronación, tal y como se explicó antes, y como se muestra en la figura 2.14. En tal caso, la resultante de las fuerzas H de todos los gajos tendrá una componente no equilibrada actuando sobre la otra mitad de la cúpula. Por definición, la cúpula completa se sostiene, y de ahí que también se sostenga la mitad de cúpula sometida a esa fuerza no equilibrada (de magnitud 0,068 W, siendo W el peso de la cúpula completa).

En consecuencia, una semicúpula (si tiene el suficiente espesor) se puede sostener de dos formas, o bien exenta, o bien «apoyada» sobre otra mitad igual de cúpula. Se puede demostrar —y resulta intuitivamente «obvio»— que si una estructura (del tipo aquí considerado) sometida a una serie de fuerzas estáticas y a una única fuerza variable P es estable para un valor P_1 de la misma, y también lo es para un valor P_2, será también estable para cualquier valor de P intermedio entre los límites P_1 y P_2. De ahí que como la semicúpula se sostiene con empuje lateral nulo en la clave (cuando está exenta) y con todo el empuje lateral cuando se apoya contra otra mitad igual de cúpula, se sostendrá también con cualquier empuje de valor intermedio.

Como curiosidad estructural, consideraremos la cúpula de tres cuartos mostrada en planta en la figura 2.20. En esta figura, la cúpula se ha dividido en una semicúpula y dos «octavos» de cúpula, que se han

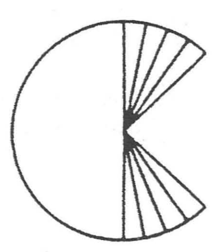


Figura 2.20
Cúpula de tres cuartos dividida

dividido a su vez en gajos más pequeños. Comparando la figura 2.19 con la figura 2.20, se observará que se ha eliminado un cuarto de la cúpula completa; por supuesto, los restantes gajos de la figura 2.20 empujarán contra la mitad completa de la cúpula con una fuerza menor a la que ejercería otra mitad entera de cúpula. Así, si el espesor de la fábrica es suficiente para que una semicúpula exenta se sostenga, también se sostendrá la cúpula de tres cuartos.

Las dificultades en el análisis exacto de cúpulas incompletas estriban en su asimetría. Un análisis seguro requiere la construcción de una superficie de empujes tridimensional que esté contenida dentro de la fábrica y que satisfaga las condiciones de borde de la carga; la geometría de una superficie así puede llegar a ser muy compleja. Es por esta razón por la que las rebanadas bidimensionales pueden llevar a soluciones mucho más sencillas; sin embargo, aunque tales soluciones son seguras, pueden estar tan alejadas de la realidad como para que los resultados sean demasiado conservadores. Un enfoque alternativo del problema consistiría en formular la ecuación de trabajos virtuales para los hipotéticos mecanismos posibles de rotura; pero esta técnica, además de llevar a soluciones inseguras, sigue teniendo el inconveniente de que la geometría de la deformación es difícil.

Para las estructuras reales aquí consideradas, con esbelteces t/R del 5% o superiores, la técnica segura de cortar en gajos es perfectamente adecuada; pero en ocasiones, esta técnica puede resultar demasiado «tosca» para tratar con otras cáscaras más delgadas.

SANTA SOFÍA

Como se ha visto, toda cúpula debe estar estribada en su contorno, para lo cual hay varios métodos posibles. Choisy[13,14] examina las soluciones bizantinas, de las que se muestran en la figura 2.21 las tres combinaciones principales. En cada una de estas figuras una cúpula esférica se levanta sobre planta cuadrada, y se estriban los cuatro lados del cuadrado con arcos (a), con semicúpulas (b) y con arcos en dos lados y semicúpulas en los otros dos (c). Santa Sofía tiene este tipo mixto de contrarresto; la sección horizontal dibujada por Choisy[13] a una cota por encima de las naves laterales (reproducida en la figura 2.22) muestra los dos arcos A y las dos medias cúpulas C, las cuales están a su vez estribadas por semicúpulas mucho más pequeñas (exedras). Se pueden observar los masivos estribos (huecos por dentro) que soportan los arcos A; la figura 2.23 muestra la isométrica de Choisy.[14] La combinación de contrarrestos en arco y en semicúpula da un énfasis longitudinal a la iglesia, resultando un espacio totalmente diáfano (flanqueado por naves laterales) de 67 m por 32,5 m.

La luz de la cúpula central es de unos 30 m y su espesor de 0,75 m, con lo que la relación t/R es del 5%. Las semicúpulas de contrarresto tienen las mismas dimensiones y las cúpulas de las exedras tienen un espesor de 0,37 m. (Estas cifras se deben a Mainstone,[12] que se basó en la obra de van Nice, de la que se ha publicado algún avance.[15,16]) En realidad, las cúpulas están lejos de tener sección semicircular

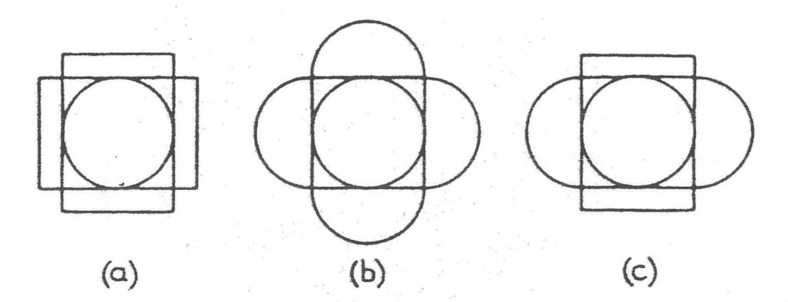


Figura 2.21
Sistemas de contrarresto bizantinos (según Choisy)

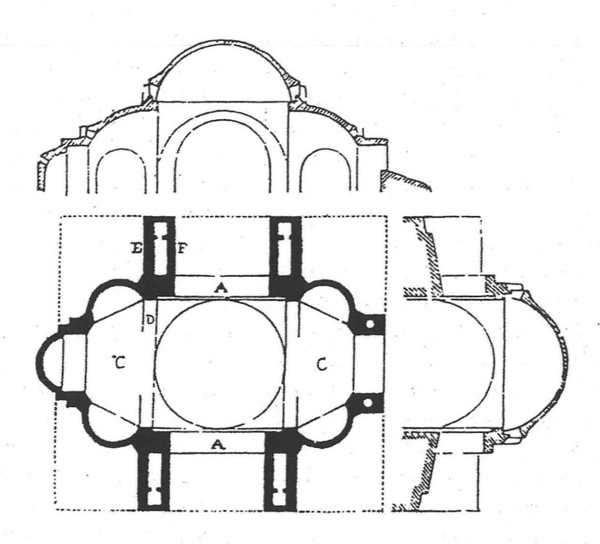


Figura 2.22
Planta de Santa Sofía (según Choisy)

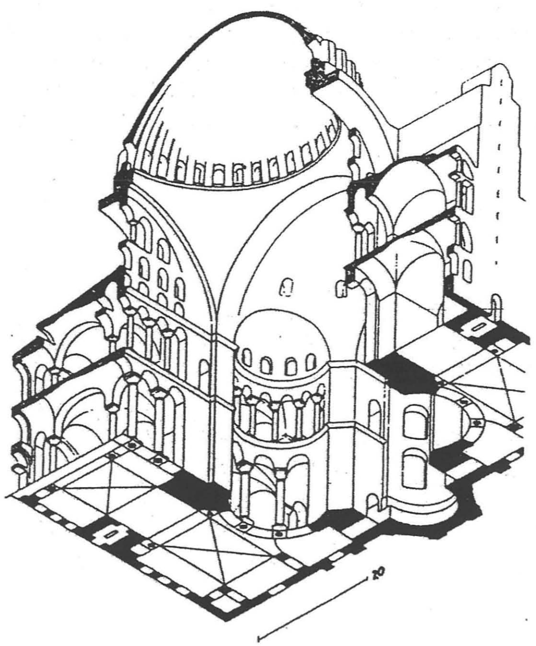


Figura 2.23
Isométrica de Santa Sofía (según Choisy)

y, de hecho, son bastante rebajadas; por añadidura, en las figuras 2.22 y 2.23 se puede observar un regruesamiento considerable cerca de la periferia, que a su vez está soportado por un anillo de pequeños contrafuertes individuales exteriores.

De esta manera, el ángulo de apertura φ_0 de la cúpula principal y de las semicúpulas de arriostramiento lateral de Santa Sofía es relativamente pequeño y el valor nominal de t/R del 5% resulta perfectamente adecuado para asegurar la estabilidad de la estructura en condiciones normales. Se puede plantear alguna duda respecto a la capacidad de los arcos de contrarresto, que no sólo deben transmitir parte de la carga vertical de la cúpula principal sino también el empuje lateral de la misma. En realidad, Santa Sofía se podría haber construido con arcos todavía más estrechos, sirviendo de estribo únicamente las semicúpulas, figura 2.24. Hemos dibujado aquí la cúpula principal cortada en arcos paralelos, igual que en el caso de la semicúpula de la figura 2.18, y se puede observar que es posible construir una solución de equilibrio que solo implique empujes laterales contra las semicúpulas.

Una estructura así modificada vería reducida su resistencia en condiciones sísmicas, y los graves terremotos de los años 986 y 1346 demostraron en la práctica la capacidad de contrarresto de los arcos reales para resistir empujes laterales. El primero de estos terremotos produjo la caída de la semicúpula occidental junto con un cuarto de la cúpula principal, permaneciendo en pie los tres cuartos restantes. En esta situación, los arcos norte y sur habrían estado sometidos a un empuje lateral considerable producido por la cúpula de tres cuartos. Se reparó la estructura, y el segundo terremoto de importancia produjo la caída de la semicúpula oriental junto con la cuarta parte correspondiente de la cúpula principal.

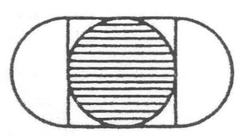


Figura 2.24
Santa Sofía, únicamente con los estribos este y oeste

3

Agujas y bóvedas de abanico

Algunas publicaciones recientes[1,2,3] han aplicado los teoremas fundamentales del análisis plástico,[4,5] formulados originalmente para las estructuras porticadas de acero, a las construcciones de fábrica. Se demostró que se pueden deducir resultados seguros suponiendo que la fábrica puede resistir tensiones de compresión pero es incapaz de resistir tracciones (es decir, se ignora la débil resistencia a tracción del mortero de las juntas de la fábrica). En particular, se adaptó la teoría de la membrana al análisis de cúpulas[3] y se descubrió que su estabilidad estaba asegurada si se podía encontrar una superficie de empujes que estuviese contenida completamente dentro de la fábrica, pero no necesariamente coincidente con la superficie media de la cáscara.

LA AGUJA DE FÁBRICA

La aguja de fábrica tiene casi invariablemente una sección octogonal y la correspondiente membrana convencional para su análisis sería, por tanto, una pirámide de ocho caras planas. Si se analiza tal solución de membrana (es decir, sin flexión), la superficie de la aguja en cualquier punto sólo puede resistir cargas cuando actúan en su propio plano; además existirán discontinuidades en las intersecciones de las caras planas. Por lo tanto, existen serias objeciones al uso de la pirámide como modelo para el análisis de agujas reales.

Si el espesor de la fábrica no es demasiado reducido en comparación con el «radio» medio de la aguja, un cono recto de base circular puede estar contenido totalmente en el interior de la cáscara real; si se puede establecer una solución de membrana para este cono, los teoremas fundamentales aplicables a las fábricas asegurarán que la estructura real es, al menos, tan segura como el cono hipotético. La condición para que un círculo de radio R pueda estar contenido dentro de un octógono con unas paredes de espesor t es que $R(1-\cos 22{,}5°)<t$ ó $t/R>7{,}61\%$. La figura 3.1 muestra el dibujo de Banister Fletcher[6] de la iglesia de San Andrés en Heckington; el valor mínimo de t/R, para un valor de t de 0,22 m en la mitad superior de la aguja, es más o menos del 10,5%.

La figura 3.2 muestra un elemento de la superficie de un cono recto de base circular de semiángulo β solicitado por las tres resultantes de tensiones de membrana, N_s, N_θ y $N_{s\theta}$, en el que la carga del elemento ha sido descompuesta en tres componentes p_s, p_θ y p_r (perpendicular a la superficie hacia el exterior): las dos coordenadas que se usan para especificar la posición del elemento son s y θ. Proyectando en las direcciones de las componentes de la carga, se pueden escribir las tres ecuaciones (de acuerdo con Flügge[7]):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s}(sN_s) + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\,\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \theta} - N_\theta + sp_s = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial s}(sN_{s\theta}) + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\,\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{s\theta} + sp_\theta = 0 \\ &N_\theta = sp_r \operatorname{tg}\beta \end{aligned} \qquad (1)$$

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Spires and Fan Vaults,» *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967): 243-57. Traducción de Efrén García Grinda.

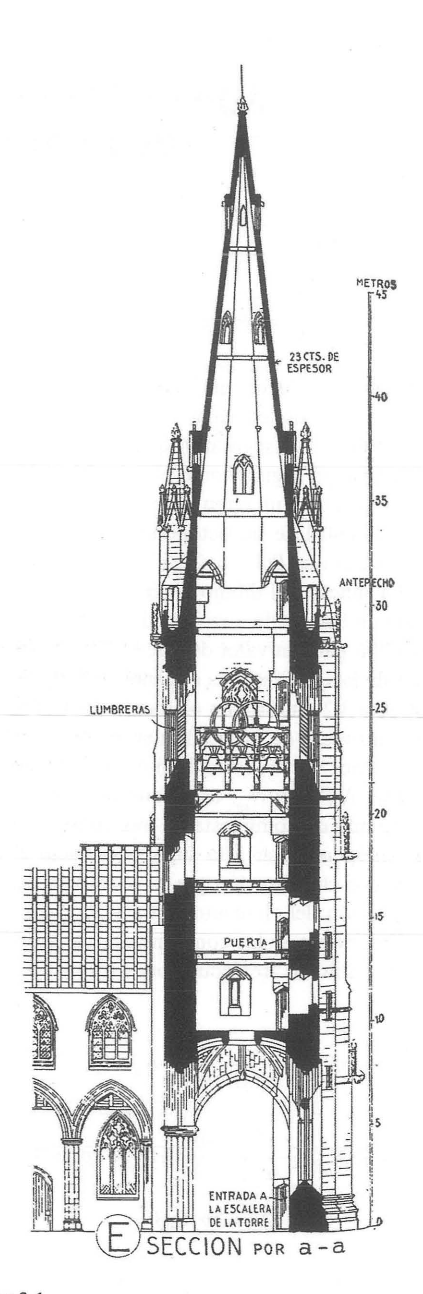


Figura 3.1
Sección de San Andrés, Heckington (según Sir Banister Fletcher)

Considerando primero las tensiones en la aguja debidas al peso propio w por unidad de superficie, las ecuaciones se pueden resolver para $p_s = w \cos \beta$, $p_\theta = 0$, $p_r = -w \operatorname{sen} \beta$ y se obtiene:

$$N_s = -\frac{1}{2} ws \sec\beta$$

$$N_\theta = -ws \operatorname{sen}^2\beta \sec\beta \qquad (2)$$

$$N_{s\theta} = 0$$

Se puede observar que N_θ se obtiene inmediatamente de la tercera de las ecuaciones (1), que la segunda de las ecuaciones (1) se puede integrar para obtener $N_{s\theta}$ y, por último, que la primera ecuación se puede integrar igualmente obteniéndose N_s; por otra parte, para este problema simétrico, N_s se puede hallar igualmente sin necesidad de integrar, considerando el equilibrio vertical de un tramo s de la aguja. Para un ángulo β pequeño es evidente que N_s es la resultante de tensiones de mayor magnitud y que N_s y N_θ son siempre de compresión.

Es habitual y razonablemente correcto[7] representar el efecto del viento por medio de una presión normal que actúa sobre la aguja:

$$p_s = p_\theta = 0$$

$$p_r = -\frac{1}{2} p \cos\beta \cos\theta \qquad (3)$$

donde p es la carga de viento por unidad de superficie especificada en la normativa convencional. Introduciendo estas componentes de la carga en las ecuaciones se obtiene que:

$$N_s = \frac{1}{12} ps \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\beta} (1-3 \operatorname{sen}^2\beta)$$

$$N_\theta = -\frac{1}{2} ps \cos\theta \operatorname{sen}\beta \qquad (4)$$

$$N_{s\theta} = -\frac{1}{6} ps \operatorname{sen}\theta$$

Como cabría esperar, la resultante de tensiones longitudinal N_s es de tracción en la generatriz de barlovento, $\theta = 0$; para β pequeño N_s es de nuevo dominante.

Considerando la aguja como una ménsula la teoría de flexión simple habría dado una resultante de tensión de flexión debida al viento de magnitud

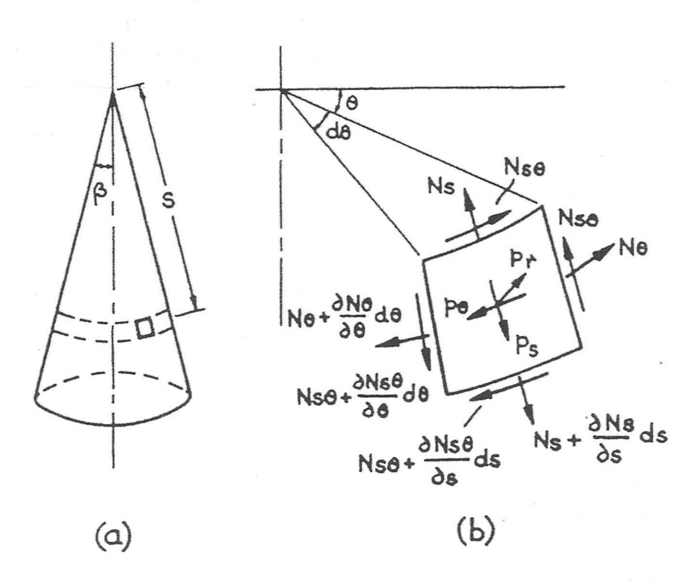


Figura 3.2
Cáscara cónica

$ps/12\beta$, donde la aproximación sen $\beta=\beta$, etc., se ha hecho para una aguja esbelta. La resultante de tensión de compresión debida al peso propio es $^1/_2ws$, de manera que la condición límite para que no haya tracción es:

$$p = 6w\beta \qquad (5)$$

independientemente de la altura de la aguja. Por lo tanto, la ecuación (5) se deduciría por simple teoría, como la condición de diseño contra viento.

A modo de ejemplo numérico, Bond[8] da las dimensiones de la aguja de Louth, de 130 mm de espesor en la parte superior y para la cual el semiángulo β es de unos 5°. Suponiendo una fábrica de peso específico 23 kN/m³, $w = 3$ kN/m² y de la ecuación (5) obtenemos $p = (6)(3{,}0)(0{,}0873) \simeq 1{,}57$ kN/m²), la mayor presión de viento que la aguja puede soportar sin que aparezcan tracciones. La aguja de Louth tiene una altura de más de 60 m y la presión de viento unitaria en exposición D que un proyectista moderno usaría se obtiene en el capítulo 5 de la norma CP3 como 1,5 kN/m² (normativa inglesa).

Un proyecto realizado con la condición de que esa tracción no debe aparecer tiene un coeficiente de seguridad (para el viento) de 2; un cálculo sencillo muestra que si se satisface la condición de la ecuación (5), la presión p tiene que duplicarse para conseguir que la aguja vuelque alrededor de la base. La aguja de Louth es, al parecer, una de las más esbeltas que todavía se conservan.

Introduciendo $p=6\beta w$ en las ecuaciones de la cáscara y aproximando sen $\beta=\beta$, las resultantes de tensión totales obtenidas sumando las ecuaciones (2) y (4) son:

$$\begin{aligned} N_s &= -\frac{1}{2}ws + \frac{1}{2}ws\cos\theta \\ N_\theta &= -\beta^2 ws - 3\beta^2 ws\cos\theta \\ N_{s\theta} &= -\beta\, ws\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \qquad (6)$$

Numéricamente, tomando una cáscara de 130 mm (Louth) para la cual $w = 3$ kN/m² y $s = 30$ m son:

$$\begin{aligned} N_s &= -45\,(1 - \cos\theta) \\ N_\theta &= -90\,\beta^2\,(1 + 3\cos\theta) \\ N_{s\theta} &= -90\,\beta\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \qquad (7)$$

Sustituyendo β = 0,0873 (5°) y trabajando directamente en tensiones (en vez de en resultantes de tensiones) las ecuaciones (7) se convierten en (kN/m²):

$$\sigma_s = -346\,(1 - \cos\theta)$$

$$\sigma_\theta = -5{,}3\,(1 + 3\cos\theta) \qquad (8)$$

$$\sigma_{s\theta} = -60{,}4\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Es interesante tabular estas tensiones, así como las tensiones máximas y mínimas alrededor de la aguja (tabla 3.1).

θ (°)	σ_s	σ_θ	$\sigma_{s\theta}$	$\sigma_{máx}$	$\sigma_{mín}$
0	0	–21	0	0	– 21
30	– 46	–18	–30	0	– 67
60	–173	–14	–54	2,3	–189
90	–346	– 5	–60	5	–355
120	–519	2	–53	7	–524
150	–646	9	–30	11	–648
180	–692	11	0	11	–692

Tensiones en kN/m²

Tabla 3.1

Se verá que se producen unas débiles tensiones de tracción debidas a tensiones de tracción en los anillos y a los esfuerzos cortantes inducidos por el viento. Aunque se haya supuesto que la fábrica no puede soportar tracciones, lo cierto es que en una aguja real, la unión debida al mortero y a la trabazón física de los sillares, permitirá que se soporten estas pequeñas tensiones de tracción. De este modo, la teoría simplificada será suficiente para valores de β pequeños; el examen de las ecuaciones (2) y (4) conduce a la conclusión de que si se evita toda tracción, el valor de p está limitado a $2\beta w$ en vez de a $6\beta w$.

Vibración de las agujas

Las oscilaciones de una aguja se pueden producir debido a la acción de un viento constante sobre la torre y la aguja, o estar provocadas por el tañido de las campanas (particularmente en Inglaterra, donde el gusto por las secuencias matemáticas más que por la melodía puede conducir, en un tañido cambiante, a una serie muy regular de impulsos; si la frecuencia de estos impulsos es similar a la frecuencia natural de la torre junto con la aguja, se producirán grandes oscilaciones). Como quiera que las oscilaciones se produzcan, si son bastante grandes pueden originar un sistema fluctuante de tensiones de suficiente magnitud como para causar el agrietamiento.

Para el propósito del análisis, se supondrá que la aguja oscila horizontalmente en un movimiento armónico simple de amplitud a y frecuencia natural (circular) w_0. De este modo, la aceleración en cualquier punto de la aguja es $-aw_0^2\,\mathrm{sen}\,w_0 t$ y la fuerza de d'Alembert sobre un elemento de superficie unidad es:

$$\frac{wa\omega_0^2}{g}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t = f \qquad (9)$$

Las componentes de carga son, por tanto

$$p_s = f\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta$$
$$p_\theta = -f\,\mathrm{sen}\theta \qquad (10)$$
$$p_r = f\cos\theta\cos\beta$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones (1) las resultantes de tensión se convierten en :

$$N_s = -\frac{1}{3}fs\cos\theta\,\mathrm{cosec}\beta$$

$$N_\theta = fs\cos\theta\,\mathrm{sen}\beta \qquad (11)$$

$$N_{s\theta} = -\frac{2}{3}fs\,\mathrm{sen}\theta$$

Estas resultantes de tensión son similares en forma y magnitud relativa a las debidas al viento, ecuaciones (4); el valor de f, dado por la ecuación (9), varía con el tiempo entre límites positivo y negativo idénticos.

Usando de nuevo una teoría «simple» para pequeños valores de β e ignorando las escasas tracciones (similares a las de la tabla 3.1) la condición para tracción cero en θ=0, π, es que:

$$\frac{1}{3}\,\frac{s}{\beta}|f| < \frac{1}{2}ws$$

es decir,

$$a < \frac{3}{2}\beta\frac{g}{\omega_0^2} \qquad (12)$$

Por supuesto, este resultado es independiente del espesor de la aguja, pero cuanto mayor sea el semiángulo β, mayor será la amplitud de oscilación a que se puede tolerar.

Es poco probable que el período de oscilación sea mayor de 2 segundos ni menor de $^1/_2$ segundo, es decir, w_0 permanecerá aproximadamente entre π y 4π. La desigualdad (12) proporciona las máximas amplitudes correspondientes a Louth (β=5°) entre 130 mm y 8 mm, siendo la amplitud máxima para un período de 1 segundo de 33 mm.

Los esfuerzos debidos al viento y a la oscilación son aditivos; las campanas de iglesia no deberían tocarse mientras sopla un viento fuerte.

BÓVEDAS DE ABANICO

La figura 3.3(a) muestra una cáscara de revolución definida por la rotación de una curva (de radio de curvatura local r_1) alrededor de un eje vertical; esta cáscara se dividirá posteriormente en dos por un plano vertical que pasa por el eje, y la media cáscara resultante se usará como modelo matemático de la bóveda de abanico. Los dos radios de curvatura de la figura 3.3(a), r_1 y r_2, se relacionan con las coordenadas (r,θ) mediante las expresiones (véase Flügge[7]):

$$r_1 \cos\varphi = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \tag{13}$$

$$r_2 \operatorname{sen} \varphi = r$$

Se tendrá en cuenta la condición de simetría de la carga debida al peso propio, de manera que sólo actuarán dos resultantes de tensiones, N_φ y N_θ, como se muestra en la figura 3.3(b).

Si la curva que define la superficie de la cáscara de revolución fuera una línea recta que cortara el eje, la cáscara sería un cono apoyado en su vértice, es decir, una aguja invertida. La curvatura real r_1 de la superficie implicará alguna complicación, pero se pueden formular ecuaciones muy parecidas a las ecuaciones (1) para la bóveda de abanico; debido a la simetría, la segunda de las ecuaciones (1) se satisface idénticamente y las dos restantes se sustituirán por:

$$\frac{d}{\mathrm{d}\varphi}(rN_\varphi) + r_1 N_\theta \cos\varphi = -wr r_1 \operatorname{sen}\varphi \tag{14}$$

y por:

$$\frac{N_\theta}{r_2} = \frac{N_\varphi}{r_1} + w \cos\varphi \tag{14}$$

donde, como antes, w es el peso por unidad de superficie de la cáscara. La resultante de tensiones N_θ se puede eliminar de estas ecuaciones y, usando las ecuaciones (13), llegamos a

$$\frac{d}{\mathrm{d}\varphi}(rN_\varphi \operatorname{sen}\varphi) = -wr r_1 \tag{15}$$

Imaginando todavía que la ecuación (15) se aplica a la cáscara de revolución completa (y no a la media cáscara para la bóveda de abanico) se debe investigar, primero, la solución para un perfil circular. En la figura 3.4(a) el círculo es tangente al eje, por lo tanto la cáscara arranca de un punto y cabe esperar resultantes de tensión infinitas, pero la solución de membrana, en cualquier caso, carece completamente de sentido en esta zona, como veremos más adelante.

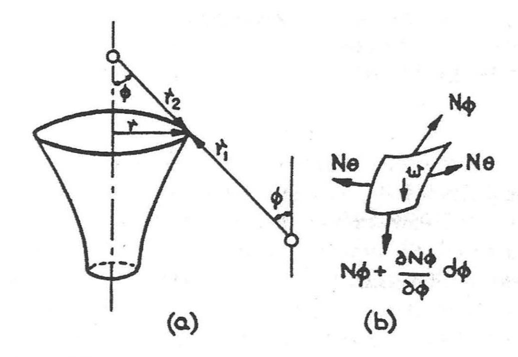


Figura 3.3
Conoide completo de una bóveda de abanico

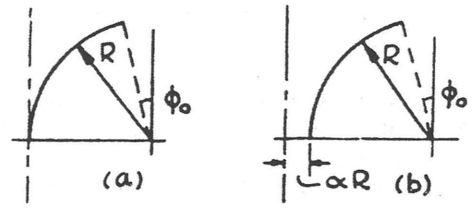


Figura 3.4
Bóveda de abanico de perfil circular

Para $r_1 = R =$ cte., en la figura 3.4(a), las ecuaciones (13) dan $r = R(1-\text{sen}\ \varphi)$, $r_2 = R(\text{cosec}\ \varphi-1)$; la ecuación (15) puede integrarse para obtener:

$$N_\varphi = -wR\frac{(\varphi + \cos\varphi + C)}{\text{sen}\varphi\,(1-\text{sen}\varphi)} \tag{16}$$

donde C es una constante de integración. La segunda de las ecuaciones (14) da como resultado, entonces:

$$N_\theta = -wR\left[\frac{\varphi + \cos\varphi + C}{\text{sen}^2\varphi} - \frac{\cos\varphi(1-\text{sen}\varphi)}{\text{sen}\varphi}\right] \tag{17}$$

El análisis de las expresiones (16) y (17) muestra que no existe una solución general para $\varphi_0=0$ en la figura 3.4(a) debido a los ceros de los denominadores. Para la cáscara incompleta, cortada en φ_0, se supone, primero, que el borde $\varphi = \varphi_0$ no está sometido a ninguna fuerza exterior, es decir, la cáscara es independiente. De este modo, N_φ en $\varphi = \varphi_0$ tiene que ser cero y la ecuación (16) da que $C = -\varphi_0 - \cos\ \varphi_0$. Introduciendo este valor de C en las expresiones (16) y (17) se puede construir la tabla 3.2(a) que da las resultantes de tensiones para $\varphi_0 = 10°$.

Se obtienen resultados muy parecidos para el perfil de la figura 3.4(b) donde se supone que la cáscara arranca de una columna de radio medio αR. La tabla 3.2(b) da las resultantes de tensiones para $\alpha = 0{,}05$.

En la tabla 3.2(b), la resultante de tensiones meridional N_φ ya no llega a ser infinita, aunque la pauta general es la misma en ambas tablas 3.2(a) y (b). En particular, mientras N_φ es siempre de compresión, la resultante de tensiones anulares N_θ es de tracción en el borde superior de la cáscara, lo que es una condición inaceptable.

Se buscará, por lo tanto, una nueva solución en la cual la tensión anular sea de compresión en todos los puntos. Se usará la condición de borde $N_\theta = 0$ en $\varphi = \varphi_0$ (más adelante se comenta cómo se puede conseguir esa condición). La ecuación (17) para la cáscara apoyada en un punto da, entonces, que $C = \text{sen}\ \varphi_0 \cos\ \varphi_0\,(1-\text{sen}\ \varphi_0) - \varphi_0 - \cos\ \varphi_0$ y en la tabla 3.2(c), se ofrece el nuevo sistema de tensiones, de nuevo para $\varphi_0 = 10°$. La configuración no es muy distinta para la cáscara apoyada en una columna, tabla 3.2(d).

Es obvio que la parte superior de la cáscara, alrededor de los 30° ó 40°, no se ve «afectada» por las condiciones de apoyo de la base.

Las soluciones de las tablas 3.2(c) y 3.2(d) tienen ahora las características necesarias, es decir, que las fuerzas sean de compresión en todos los puntos, pero está implícita una carga de compresión que actúa en el borde «libre» de la cáscara, $\varphi = \varphi_0$. Esta carga de compresión implica a su vez que para una bóveda de abanico completa, las bóvedas contiguas tienen que apoyarse unas en otras: los pinjantes, las claves pesadas, y en general el material de los tímpanos entre las bóvedas han de proporcionar la componente vertical de esta carga de borde.

Tabla 3.2 $\varphi_0 = 10°$

Caso	Apoyo	Condición de borde	α		φ (°) 10	20	30	40	50	60	70	80	90
(a)	Puntual	$N_\varphi = 0$	0	N_φ/wR	0	–0,57	–0,92	–1,32	–1,98	–3,34	–7,12	–27,50	$-\infty$
				N_θ/wR	4,68	0,71	–0,05	–0,31	–0,41	–0,44	–0,44	–0,42	–0,41
(b)	Puntual	$N_\theta = 0$	0,05	N_φ/wR	0	–0,57	–0,90	–1,26	–1,79	–2,71	–4,40	–7,34	–9,62
				N_θ/wR	4,97	0,77	–0,03	–0,31	–0,43	–0,47	–0,48	–0,48	–0,48
(c)	Sobre pilar	$N_\varphi = 0$	0	N_φ/wR	–0,99	–1,19	–1,49	–1,94	–2,77	–4,56	–9,61	–37,00	$-\infty$
				N_θ/wR	0	–0,50	–0,62	–0,65	–0,65	–0,63	–0,60	–0,57	–0,55
(d)	Sobre pilar	$N_\theta = 0$	0,05	N_φ/wR	–0,99	–1,20	–1,44	–1,83	–2,48	–3,65	–5,85	–9,68	–12,60
				N_θ/wR	0	–0,52	–0,64	–0,68	–0,68	–0,67	–0,65	–0,63	–0,63

Supongamos ahora que se corta la cáscara completa en dos mitades (iguales), una de las cuales se representa en la figura 3.5. El sistema de tensiones de la tabla 3.2(c) (o de la tabla 3.2(d)) es un sistema en equilibrio para la cáscara, siempre que se hayan introducido unas cargas exteriores adecuadas. La semicáscara de la figura 3.5 debe estar, en realidad, en equilibrio global; por ejemplo, la carga puntual en la base (procedente del muro o columna portante) debe igualar el peso de la semicáscara junto con las componentes verticales de la carga de borde N_φ en $\varphi = \varphi_0$. Estas cargas de borde tienen también componentes horizontales que han de compensarse con fuerzas horizontales exteriores aplicadas en los bordes cortados verticalmente, procedentes de los muros (y transmitidas, probablemente, a botareles: véase más adelante). Estas fuerzas horizontales son, por supuesto, los valores resultantes de integrar la resultante de tensiones anulares N_θ; si llamamos F a la suma de estas fuerzas anulares a lo largo de la sección, entonces,

$$F = 2\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} N_\theta R \, d\varphi \qquad (18)$$

De este modo, si se aplica una fuerza de esta magnitud (a una altura adecuada por encima del arranque), junto con la fuerza vertical de apoyo en el arranque, la semicáscara se encontrará en equilibrio sometida a un estado de tensiones interno dado por la tabla 3.2(c), calculado para la cáscara completa. La tabla 3.2(c) no proporcionará las tensiones que real y necesariamente se producirían en la semicáscara, pero se ha demostrado que estas tensiones constituyen un sistema de fuerzas en equilibrio posible para aquélla. El teorema de la «seguridad» del análisis límite aplicado a las fábricas,[1] establece que si se puede encontrar un estado de equilibrio cualquiera para el que la estructura sea estable, su estabilidad está completamente asegurada sin necesidad de calcular el estado de tensiones real. Por tanto, a pesar del hecho de que la semicáscara de la figura 3.5 ya no es una cáscara de revolución completa, no es necesario realizar análisis posteriores.

Sustituyendo el valor de N_θ obtenido de la ecuación (17) en la ecuación (18) encontramos que $F = 2wR^2 \cot \varphi_0[\varphi_0 + \cos \varphi_0 + C]$, y usando el valor adecuado de C, $F = 2wR^2\cos^2\varphi_0(1 - \text{sen}\, \varphi_0)$. Para $\varphi_0 = 10°$, $F = 1{,}60wR^2$, que se ha representado en la figura 3.6(a), junto con las otras fuerzas necesarias para el equilibrio del abanico. Numéricamente, si $w = 3$ kN/m^2, $R = 7{,}5$ m, las fuerzas son tal como se muestran en la figura 3.6(b). Para cada abanico se requiere una carga permanente (claves y similares) de 70 kN; el empuje horizontal de 270 kN es elevado. Las tensiones son de pequeña magnitud, excepto cerca del arranque de la bóveda; si los valores de la tabla 3.2(c) se multiplicasen por 0,17 (para $R = 7{,}5$ m y un peso específico del material de 23 kN/m^3) las cifras resultantes expresarían las tensiones en N/mm^2.

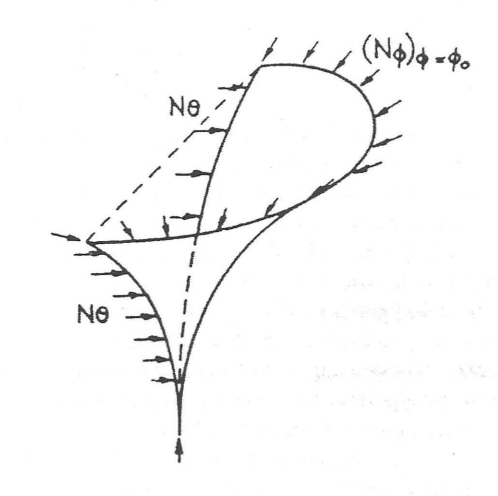


Figura 3.5
Equilibrio general de la bóveda de abanico

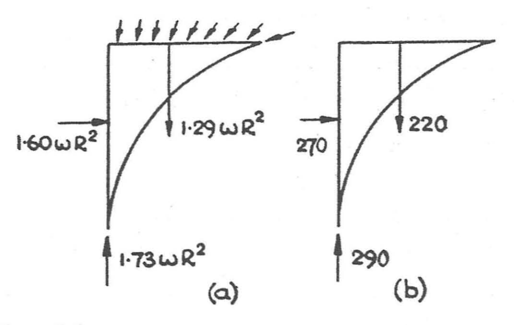


Figura 3.6
Fuerzas exteriores en la bóveda de abanico (kN)

Todos estos resultados se han obtenido para un hipotético perfil circular que, en cierto sentido, es una aproximación no muy precisa a la forma de las bóvedas de abanico reales. Por otra parte, una *membrana* (de espesor infinitamente pequeño) de perfil circular puede estar contenida dentro del espesor real de una amplia serie de bóvedas reales. En este contexto, el problema del análisis de cáscaras no es la determinación de las resultantes de tensiones para la superficie media de la bóveda real, sino establecer un sistema de resultantes de tensiones para cualquier membrana que pueda estar contenida dentro del espesor de la bóveda.

Como se vio en la figura 3.6, el perfil circular conducía a un empuje horizontal elevado necesario para el equilibrio de la bóveda. Las soluciones de cáscara a menudo son extremadamente sensibles al perfil considerado y pequeñas alteraciones en la forma pueden producir grandes variaciones en las tensiones.[3] Estas variaciones pueden afectar no sólo a los valores concretos de las resultantes de tensiones sino que pueden alterar radicalmente la distribución de tensiones en la cáscara. Por tanto, investigando otros perfiles se podría encontrar una distribución «mejor» (que implicase, desde un punto de vista práctico, empujes menores).

Como ejemplo, se buscará una solución inversa de las ecuaciones de la cáscara para la que la resultante de tensiones anulares N_θ sea cero en todos los puntos. Tal cáscara se podría dividir en dos bóvedas de abanico por un plano vertical (cf. figura 3.5) sin necesidad de ninguna fuerza que la compense en el muro; la componente horizontal de cualquier carga de compresión aplicada en el borde superior del abanico debe equilibrarse por medio de un empuje en el arranque, como veremos más adelante. Un artículo reciente de Anderson et al.[9] trata el problema de cuál es la mejor forma para un vehículo espacial que se adentra en atmósferas planetarias delgadas. Efectivamente, una membrana delgada se diseña como una especie de paracaídas y, si el requisito que rige el diseño es evitar el pandeo, las tensiones tienen que ser de *tracción* en todos los puntos. Este problema es una analogía casi exacta del problema de las bóvedas de fábrica y, aunque las condiciones de carga son diferentes, el paracaídas propuesto es extraordinariamente similar a una bóveda de abanico completa, que entrase en la atmósfera de punta. En la parte más ancha del abanico, el borde del paracaídas tiene que estar armado con un anillo de refuerzo; no existe solución para un borde libre. De nuevo, esto es análogo a las cargas de compresión de borde que se necesitaban antes para la bóveda de perfil circular; para el diseño inverso de la bóveda se necesita una carga de borde similar.

Haciendo $N_\theta = 0$ en las ecuaciones (14) y eliminando N_φ, una integración doble conduce a la ecuación intrínseca de la forma del abanico:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{sh}\left(\ln C - \frac{r^2}{x_0^2}\right) \qquad (19)$$

donde C y x_0 son constantes de integración; el valor de N_φ, viene dado por:

$$N_\varphi = -\frac{w x_0^2}{2r\cos\varphi} \qquad (20)$$

Pasándolo a las coordenadas rectangulares de la figura 3.7, con origen en el eje del abanico, la constante x_0 se puede identificar con el radio máximo del abanico, para el cual $y = 0$. De la figura 3.7, $\operatorname{tg}\varphi = -dy/dx$ y la ecuación (19) se puede integrar para obtener finalmente:

$$y = C\frac{x_0}{2}\left[\int_{x/x_0}^{1} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{C^2}\int_{x/x_0}^{1} e^{t^2}\,dt\right] \qquad (21)$$

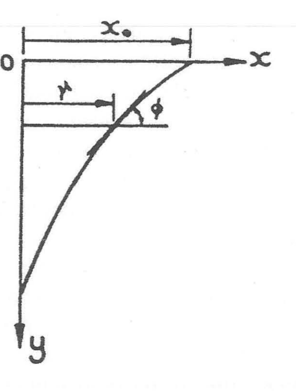


Figura 3.7
Ejes de la bóveda de abanico

La forma del abanico determinada por la ecuación (21) consta de una única familia de curvas que dependen del valor de *C*; la constante x_0 es meramente un factor de escala (que se puede considerar, por el momento, la mitad de la anchura de la nave). La primera integral de la ecuación (21) es fundamentalmente la integral de la función error, tabulada por Jahnke y Emde,[10] que también dan una breve tabla para la segunda integral. De la ecuación (19), φ es positivo cuando $r=x_0$ si $C>e$ y éste es el límite inferior para *C*, de interés práctico. En la figura 3.8 se han dibujado los perfiles de los abanicos para $C=e$, $C=3$, $C=3{,}24$ ($\varphi=10°$) y $C=4$, y se ha superpuesto el contorno aproximado de la bóveda de abanico de la capilla del King's College (para el ancho de la semi-nave).

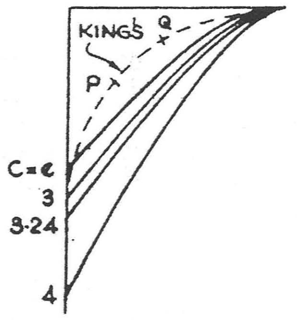


Figura 3.8
Perfiles inversos

En la figura 3.9 se presentan con detalle tres de los perfiles, donde se muestran las condiciones de equilibrio del conjunto (todos los valores se deben multiplicar por wx_0^2). El empuje horizontal ejercido por la bóveda tiene un valor wx_0^2, que es independiente del valor de *C*; comparando con la figura 3.6 se puede ver que el empuje actúa mucho más abajo que en la bóveda de perfil circular. Mackenzie[11] da el espesor de la bóveda del King's College como variable entre 50 y 150 mm. Tomando 130 mm (w = 3 kN/m² como antes) y x_0= 6 m, wx_0^2= 108 kN, que es un valor del empuje razonablemente bajo. De la ecuación (20), la resultante de tensiones meridional N_φ, siempre de compresión, incrementa su valor desde aproximadamente $\frac{1}{2}wx_0$, en la parte superior de la bóveda, a infinito en el arranque; de nuevo el abanico real debe arrancar de un muro portante o una columna. Por lo tanto, para x_0=6 m, la tensión de compresión de borde aplicada externamente por el peso del tímpano será de unos 0,07 N/mm².

Howard[12] clasifica las bóvedas de abanico en aquellas con conoides separados, figura 3.10, en cuyo caso el tímpano puede adoptar diversas configuraciones alternativas, figura 3.11, y aquellas con conoides intersecados, figura 3.12. De hecho, la figura 3.12 muestra simplemente una alternativa más para el tímpano, cuyas superficies resultan ser continuación de las superficies de los conoides. Todos los casos pueden resumirse en la planta de la figura 3.13, en a que los abanicos, de planta semicircular, soportan

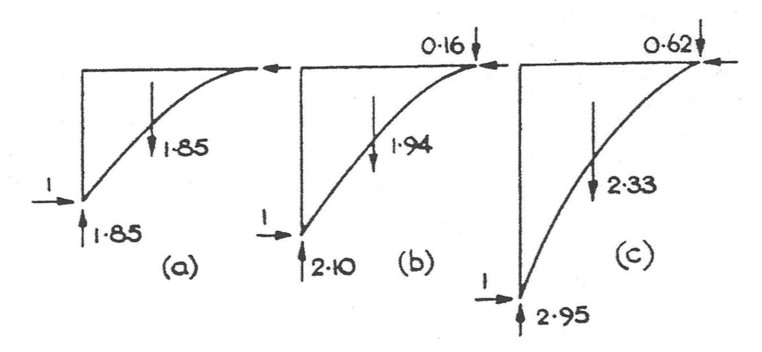


Figura 3.9
Fuerzas exteriores en perfiles de bóveda inversos (todos los valores × wx_0^2)

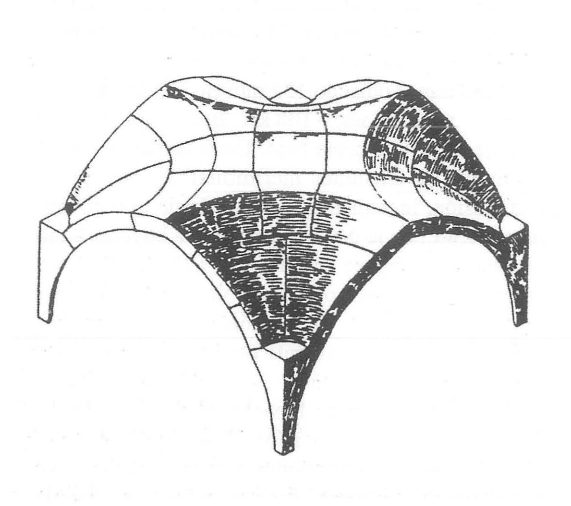


Figura 3.10
Bóveda de abanico con senos conoidales separados (según F.E. Howard)

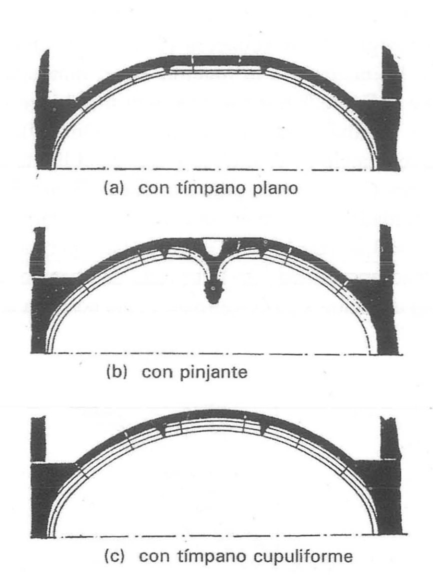


Figura 3.11
Tipos de tímpanos (según F.E. Howard)

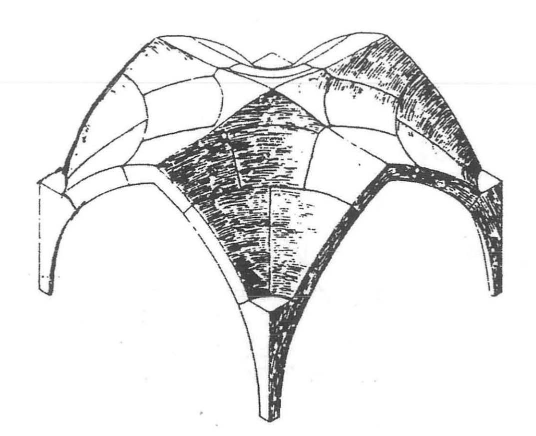


Figura 3.12
Bóveda de abanico con senos conoidales que se cortan (según F.E. Howard)

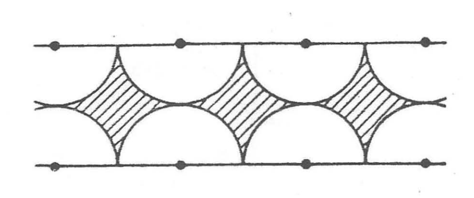


Figura 3.13
Nave cubierta con bóveda de abanico: tramos cuadrados

tímpanos de fábrica, dibujados con rayado. Considerando que el abanico y el tímpano son elementos estructurales independientes, el tímpano, relativamente plano, que se aproxima a un arco adintelado, es extraordinariamente estable.[1] Además, la superficie de empuje del tímpano se adaptará sin dificultad a los empujes de borde que requieren los abanicos contiguos, ya que, en elementos estructurales tan pequeños, una gama amplia de empujes sólo producirá pequeñas variaciones en la superficie de empuje.[3]

Las figuras 3.10, 3.12, y 3.13 han supuesto tácitamente tramos de bóveda cuadrados (que se adaptan mejor a la bóveda de abanico) aunque la mayoría de las naves no tengan tramos cuadrados. El dibujo según Bond[8] de la nave de Sherborne, figura 3.14, muestra una disposición rectangular típica, y en la planta de la figura 3.15 aparece la división resultante en abanicos y tímpanos. Esta disposición es la que tiene, en efecto, la capilla del King,s College (aunque esté oculta por los pesados e inútiles arcos perpiaños que marcan cada tramo abovedado). La capilla de Enrique VII en Westminster introduce pinjantes alejados de los muros, de los cuales arrancan las bóvedas, convirtiendo así los tramos rectangulares en casi cuadrados.

En la figura 3.14 se puede ver el relleno de mampostería en los senos conoidales de las bóvedas de Sherborne, que se eleva hasta casi la mitad de la altura de la bóveda. Rellenos similares se encuentran en la capilla del King's College, en la de San Jorge en Winsord, y también en los senos formados por los nervios de muchas bóvedas de crucería góticas (por ejemplo Beauvais, Amiens); la función de este relleno ha sido comentada por Fitchen.[13] Este relleno permite que la superficie de empuje salga fuera de la cáscara de la bóveda de abanico al macizo interior que ésta forma. De este modo el «auténtico» abanico de la capilla del King's College no es en absoluto como se muestra en el perfil completo de la figura 3.8, que es simplemente el perfil de media nave, sino que se aproxima más al segmento PQ de ése perfil. Es evidente que un segmento tan pequeño, si tiene el espesor real de la bóveda, puede contener fácilmente una serie de los perfiles obtenidos de forma inversa que corresponden a una gama de valores de la constante C. Es decir, indudablemente será posible encontrar para el tramo PQ del abanico, una membrana que esté completamente dentro de la fábrica para la cual la resultante de tensiones anulares sea cero.

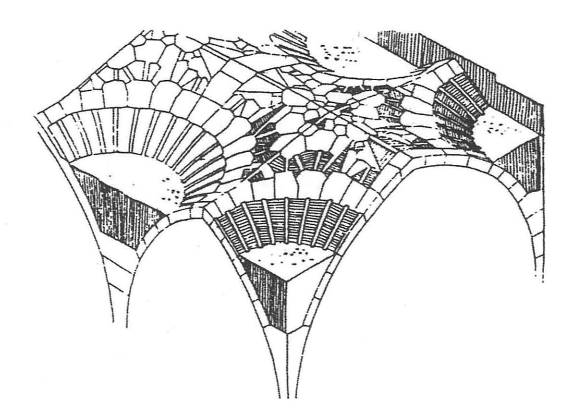


Figura 3.14
Dibujo de la nave de Sherborne (según Francis Bond)

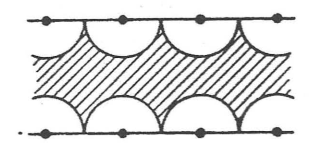


Figura 3.15
Nave cubierta con bóveda de abanico; tramo rectangular

Finalmente, la figura 3.16 muestra un tramo abovedado rectangular dividido en tres zonas para el análisis estructural. En la línea media, el tímpano, de escaso o nulo peralte, se extiende entre los abanicos y soporta pinjantes y claves a voluntad del proyectista; como se mencionó antes, el tímpano será muy estable, incluso para cáscaras de fábrica delgadas. Los abanicos propiamente dichos son de extensión limitada y un perfil de cualquier forma «razonable» y de espesor suficientemente pequeño puede contener la curva de la ecuación (21). En el muro, el relleno de los senos conoidales permite a los empujes de la bóveda actuar a distintas alturas.

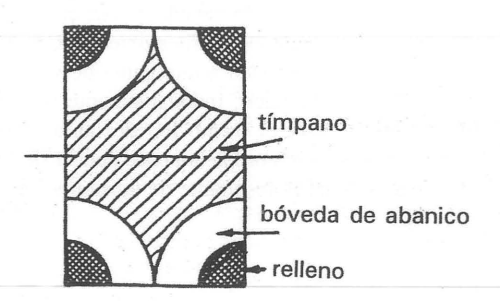


Figura 3.16
Tramo rectangular de bóveda

Sin embargo, siempre habrá un empuje horizontal; al igual que la estructura gótica fundamental de la bóveda nervada se mantiene en equilibrio por medio de los arbotantes, la bóveda de abanico también necesita contrarrestos exteriores para asegurar el equilibrio del conjunto. En la figura 3.9 se dibujó el empuje horizontal, y su línea de acción descenderá debido a la presencia del relleno de mampostería de los senos; verdaderamente la línea de acción puede descender lo suficiente como para poder suprimir los arbotantes completamente, como en la nave de Sherborne (no así en el coro). En el King's College los enormes estribos exteriores absorben los empujes de la bóveda.

Por tanto, si la bóveda de abanico se construye sin arbotantes, la superficie de empuje deberá descender hasta un nivel en el que el empuje horizontal pueda transmitirse desde la bóveda hasta cualquier contrarresto que, de hecho, se haya colocado. La superficie de curvatura continua del abanico, junto con la parte inferior maciza del seno permiten al abanico construir por sí mismo esta superficie de empuje tan baja. Por el contrario, el empuje de una bóveda nervada gótica se recoge, en su mayor parte, en los nervios cruceros[12] y se pueden hacer pocos ajustes en la línea de acción de la resultante global de empujes horizontales; los arbotantes se deben situar aproximadamente en la posición óptima o la bóveda nervada se hundirá.

En resumen, un proyectista de obras de fábrica de finales del siglo XV especializado en bóvedas de abanico (el King's College fue abovedado entre 1512 y 1515 por John Wastell) podría elegir cualquier perfil agradable, decorar la superficie de la bóveda con nervios no estructurales, insertar en la línea central de la nave una serie de pesados pinjantes o claves y prestar una atención relativamente escasa al sistema de arbotantes, todo ello con la casi completa seguridad de que su estructura sería estable. Es más, la permanencia continuada de tales bóvedas a pesar de los asentamientos de la cimentación y de otras deformaciones en el conjunto de la obra es una prueba experimental suficiente de que la bóveda de fábrica es una estructura en esencia estable.

4

La armadura de Westminster Hall

Westminster Hall... (73 por 20,6 m) fue construido bajo el reinado de Guillermo II a finales del siglo XI. En este período el Hall estaba formado por doce tramos y, casi con seguridad, estaba dividido en tres naves mediante columnas de madera o de piedra. Todavía existen partes importantes de los muros laterales de este edificio. La reconstrucción del Hall fue comenzada por Ricardo II en 1394 y se terminó en 1402. Las alteraciones consistieron en la elevación de los muros laterales, la cubrición del edificio mediante un único vano, la adición de arbotantes para soportar la techumbre,... y otros trabajos varios... El conjunto de la fábrica de piedra exterior y gran parte de la interior fueron renovadas... en los siglos XVIII y XIX... En los últimos años la techumbre ha sido reparada y consolidada mediante refuerzos de acero (figura 4.1.)

Las significativas alteraciones estructurales realizadas en el siglo XIV en Westminster Hall se describen en este extracto del Informe de la Comisión de Monumentos Históricos.[1] Hugh Herland, el maestro carpintero de Ricardo II, proyectó la armadura de madera que salva la enorme luz de 21,3 m, 70 pies, sin columnas intermedias. Se consideró que esta nueva armadura requería contrarresto exterior, y Henry Yevele, maestro de obras y encargado general de la reconstrucción, añadió arbotantes cada dos tramos.[2,3]

La techumbre fue inspeccionada cuidadosamente justo antes de la Primera Guerra Mundial por Sir Frank Baines.[4] Baines descubrió que se le habían añadido riostras en el siglo XIX, y que todo la techumbre estaba en peligroso estado debido al avanzado deterioro de la madera. Fue él quien propuso los refuerzos de acero; sin embargo, desde un punto de vista estructural, no encontró ningún fallo en la techumbre de Herland.

En realidad, sería más correcto decir que Baines no llegó a comprender de manera completa los principios estructurales del tipo particular de armadura de palomillas empleada en Westminster. Hizo un «diagrama de esfuerzos» de la armadura, pero los resultados diferían de forma tan evidente del comportamiento observado que él mismo concluyó que «los esfuerzos teóricos en los miembros no pueden en absoluto corresponderse con los reales».

Los métodos de análisis estructural de finales del XIX no eran de uso común antes de la Primera Guerra Mundial, por lo que la base teórica de Baines no era adecuada para el análisis de una estructura hiperestática. Pippard[5] utilizó la armadura de la cubierta de Westminster Hall para ilustrar la aplicación de los teoremas de Castigliano y da, en forma abreviada, los cálculos de un trabajo anterior.[6]

Los resultados de Pippard son diferentes y mucho más satisfactorios que los de Baines, pero su solución final también atribuye a parte de la estructura un comportamiento del que no es capaz. William Harvey[7] comentó que los resultados de ambos análisis «están en desacuerdo con los hechos, como se puede comprobar en la misma armadura», y propuso un enfoque intuitivo basado en observaciones sobre un

---

Impreso y traducido con autorización del autor del original «Westminster Hall Roof,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 37: 137-62. Traducción de Rafael García García.

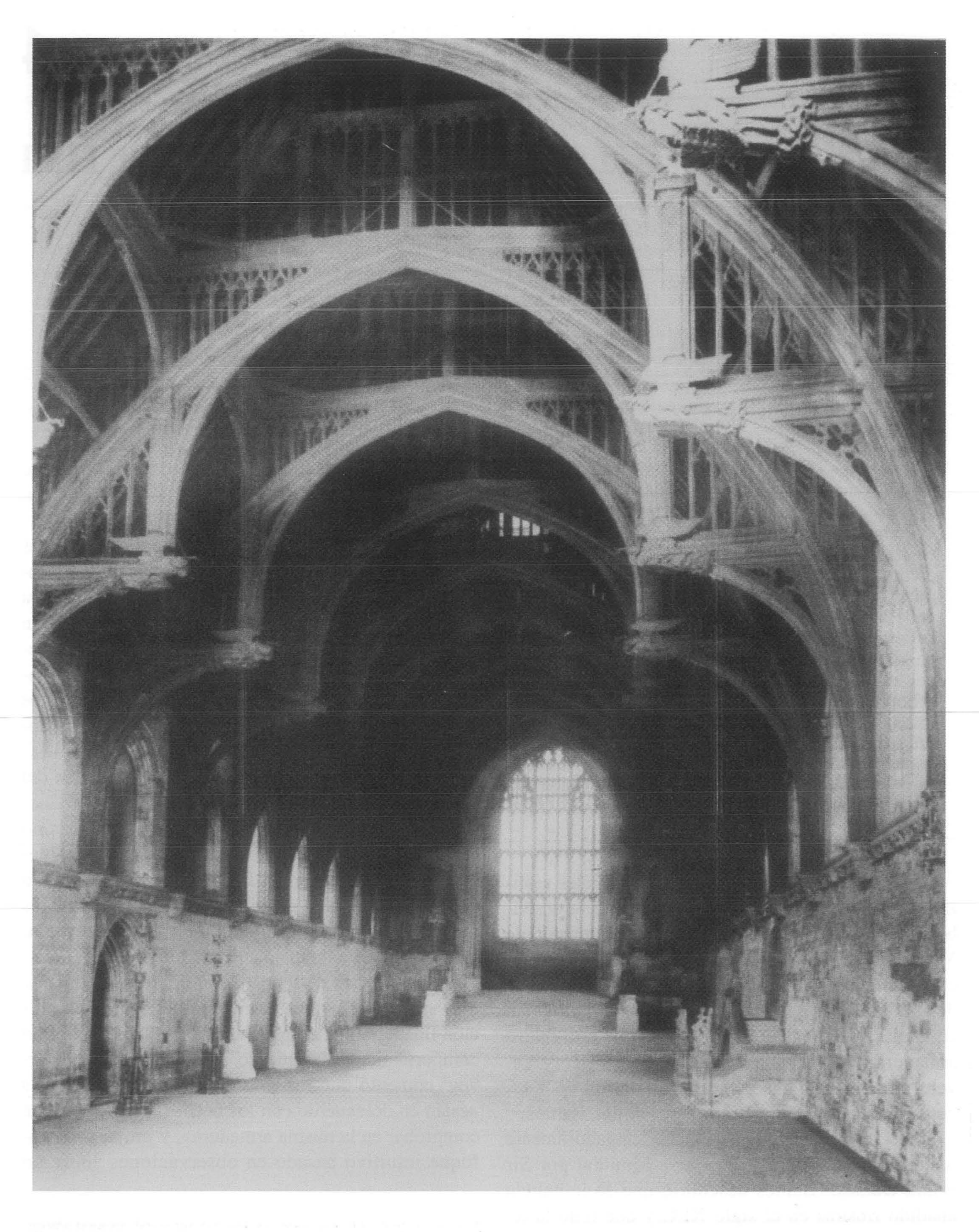


Figura 4.1
Westminster Hall

modelo realizado con piezas de madera. Todas estas «soluciones» del comportamiento estructural de la armadura de Westminster Hall se comentarán con detalle más adelante.

DESCRIPCIÓN

Las figuras 4.2 y 4.3 reproducen dos dibujos de Viollet-le-Duc;[8] la figura 4.4 es un dibujo esquemático a línea de un cuchillo de la armadura, con la nomenclatura de sus miembros. Los cuchillos están separados 6,1 m (20 pies) entre ejes. Los miembros de la Comisión Real continúan:

La techumbre de roble... es de doce tramos y del tipo *hammerbeam* o de palomillas. Todos los maderos principales están moldurados; los principales están curvados y forman arcos de dos centros bajo los puentes; los nudillos... tienen debajo jabalcones curvos y terminan en grandes figuras... de ángeles vestidos con dalmáticas, emergiendo de nubes y sosteniendo escudos de armas reales (Francia antigua e Inglaterra, en disposición cuartelada); desde los pies derechos laterales se elevan jabalcones principales curvos que se encuentran en la cabeza del arco principal; las correas básicas, al nivel de los puentes, tienen riostras curvas longitudinales que nacen de pilastras empotradas en los pies derechos laterales. Las enjutas tienen rellenos de tracería...; hay rellenos similares sobre los puentes.

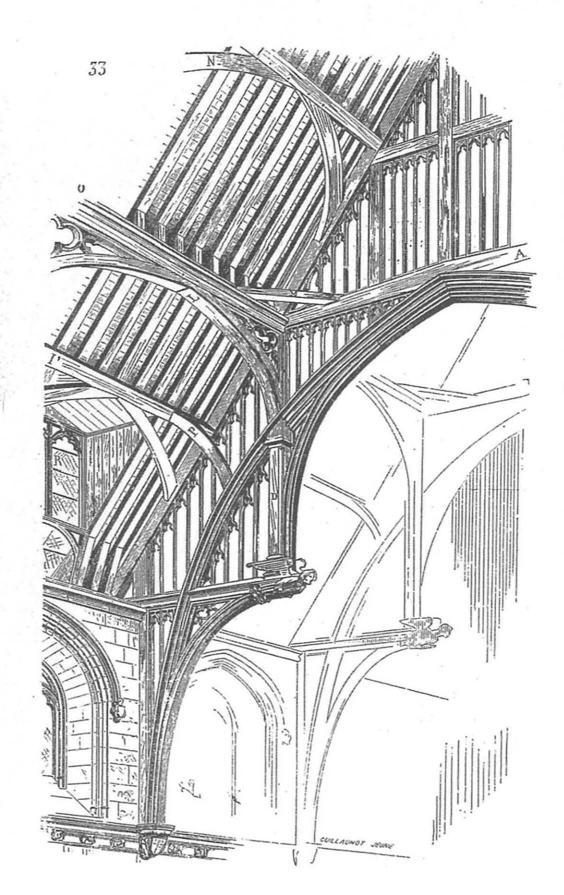


Figura 4.2
Westminster Hall; perspectiva según Viollet-le-Duc

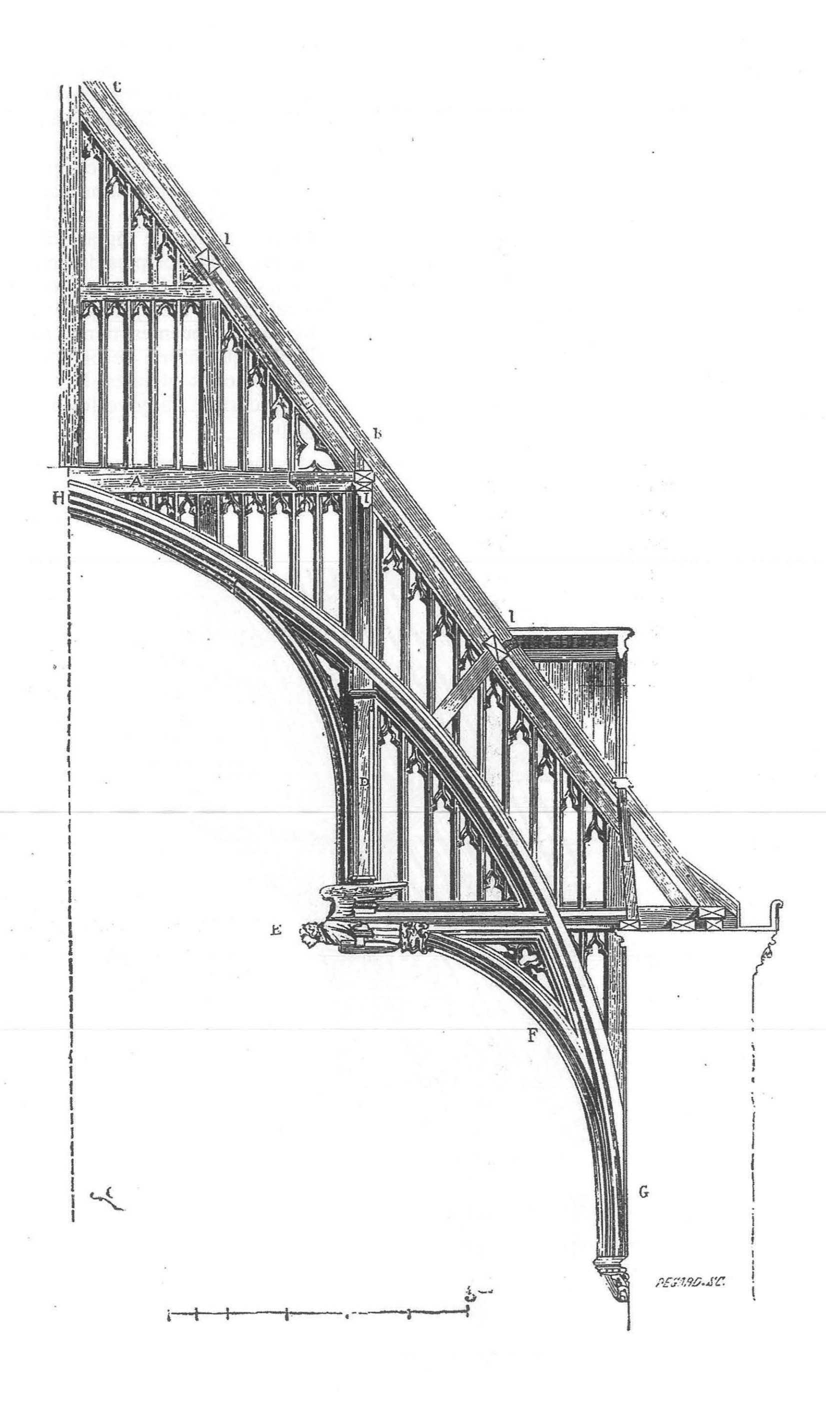


Figura 4.3
Westminster Hall. Alzado según Viollet-le-Duc (algunos detalles son conjeturales)

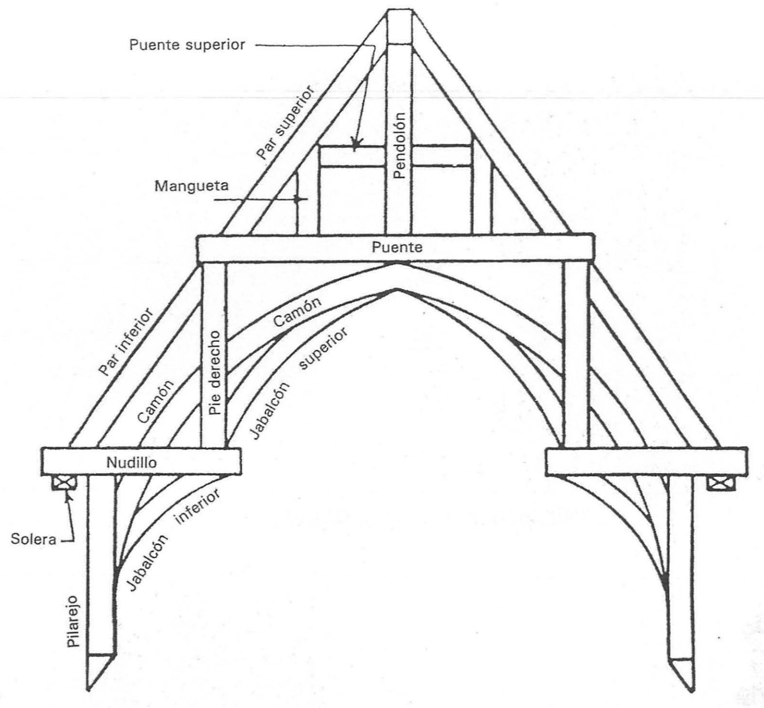


Figura 4.4
Armadura de palomillas; nomenclatura

El término «principal» se utiliza técnicamente de acuerdo con el uso común; aplicado a una armadura de madera, indica «los pares, pies derechos o jabalcones más importantes... que soportan los esfuerzos principales» (Shorter Oxford English Dictionary). Así, en la descripción anterior, el gran arco que forman los camones se ha considerado el principal elemento estructural, siendo también de importancia los jabalcones superiores e inferiores; los denominados nudillos y pies derechos son también, supuestamente, elementos principales.

Baines no tiene dudas sobre las funciones de los nudillos y pies derechos:

> El pie derecho... es... el elemento principal que soporta y recibe las cargas desde el puente principal y las correas arriostradas... El peso del par principal inferior, tendido sobre la cola del nudillo, y así hasta el propio muro, está proyectado para equilibrar el peso del pie derecho y sus cargas sobre el extremo libre del nudillo.

Pevsner[9] define de forma similar el nudillo como «una viga proyectada horizontalmente... y soportada por un jabalcón arqueado que avanza desde un pilarejo adosado al muro». Howard y Crossley,[10] Cautley,[11] y Crossley,[12] todos ellos, explícita o implícitamente, están de acuerdo con este análisis de la estructura. Por ejemplo, Cautley habla de la cubierta de Earl Stonham, figura 4.5 («la más bella armadura sencilla de palomillas de Inglaterra» según Pevsner):

> Nudillos verdaderos tallados como figuras tumbadas, alternan con nudillos falsos, es decir, en lugar de un pie derecho descansando sobre el nudillo, se trata de un pinjante colgando de la viga, sujeto exclusivamente por espigas.

(Las figuras tumbadas son ángeles, mutilados quizá por Edmund Blomfield por orden de William Dowsing entre 1640 y 1650.)

El motivo del ángel es común en las armaduras de palomillas de East Anglia; por ejemplo, la figura 4.6 muestra un nudillo tallado correspondiente a St. Mary's, Bury St. Edmunds.



Figura 4.5
Earl Stonham, Suffolk



Figura 4.6
St. Mary´s, Bury St. Edmunds, Suffolk

La armadura de Westminster Hall parece tener un doble sistema estructural. Además de la armadura de palomillas clásica, compuesta de pares, puente, pies derechos y nudillos, y jabalcones superiores e inferiores, presenta dos enormes camones que forman un arco de dos centros. Viollet-le-Duc justifica este doble sistema haciendo notar que el triángulo superior, formado por el puente A y los pares superiores BC (figura 4.3):

> carga sobre los pies derechos D cuyas bases descansan en los extremos de los nudillos E. El nudillo se mantiene horizontal por el jabalcón curvo F y por el relleno de tracería. Pero si la carga es muy fuerte en el extremo del nudillo, entonces, dicha carga producirá un empuje en G, en la base del jabalcón F. Los grandes camones H fueron construidos para aliviar dicha carga y empuje...

Crossley afirma: «Las armaduras pueden dividirse de forma aproximada en tres clases: armaduras con empujes, con empujes coaccionados, y sin empujes; siendo el empuje el factor determinante.»[12] La armadura de pares (dos pares apoyados uno contra otro) es claramente una armadura con empujes, y la armadura atirantada al nivel de los aleros es sin empujes; Crossley considera que el entramado de palomillas no produce empujes. Así, de Needham Market, figura 4.7, afirma que «el empuje de la armadura es muy pequeño o inexistente». Ya se ha dicho que Herland y Yevele dispusieron arbotantes en Westminster, por lo que, evidentemente, no compartían la opinión de que una armadura de palomillas no produce empujes.

Crossley observa que hay una variación de peralte en cubiertas de diferentes épocas; en los siglos XIII y XIV el ángulo oscilaba entre 60° y 45°. Según mediciones, el ángulo de Westminster es de unos 55°.



Figura 4.7
Needham Market, Suffolk

William Harvey,[13] basándose en un razonamiento numerológico, argumenta de manera convincente que la cubierta fue proyectada con una pendiente de unos 53°, que corresponden al triángulo Pitagórico de proporciones 3:4:5; el vano «ideal» de 21 m ó 69 pies, (cf. 20,6 m ó 67 pies 6 pulgadas, en la medición real) es el resultado de tres módulos de 7 m (23 pies), y la altura total del Hall puede expresarse en cuatro módulos de 7 m (20 más 3 pies). Esté o no Harvey acertado en los detalles, es indudable que en el gótico se usaron reglas numéricas simples,[14,15] tales como triángulos pitagóricos, para la determinación de las pendientes de las cubiertas.

En el manuscrito de Villard de Honnecourt de ca. 1235 aparece el dibujo de una armadura simple de palomillas (figura 4.8). «Or poes veir. i. bo(n) conble leg(ie)r, por hierbegier deseur une chapele a volte.» La traducción según Willis[16] es: «Aquí vemos una armadura buena y ligera (o simple) para cubrir una capilla abovedada», observando que «léger» puede significar tanto fácil como ligera, al igual que cuando decimos una tarea ligera; (cf. Hahnloser[17] que da los dos significados *leicht*, *einfach*).

La luz de la armadura de Villard es, evidentemente, bastante pequeña, a juzgar por el espesor relativo de los muros de fábrica y por el hecho de que cada

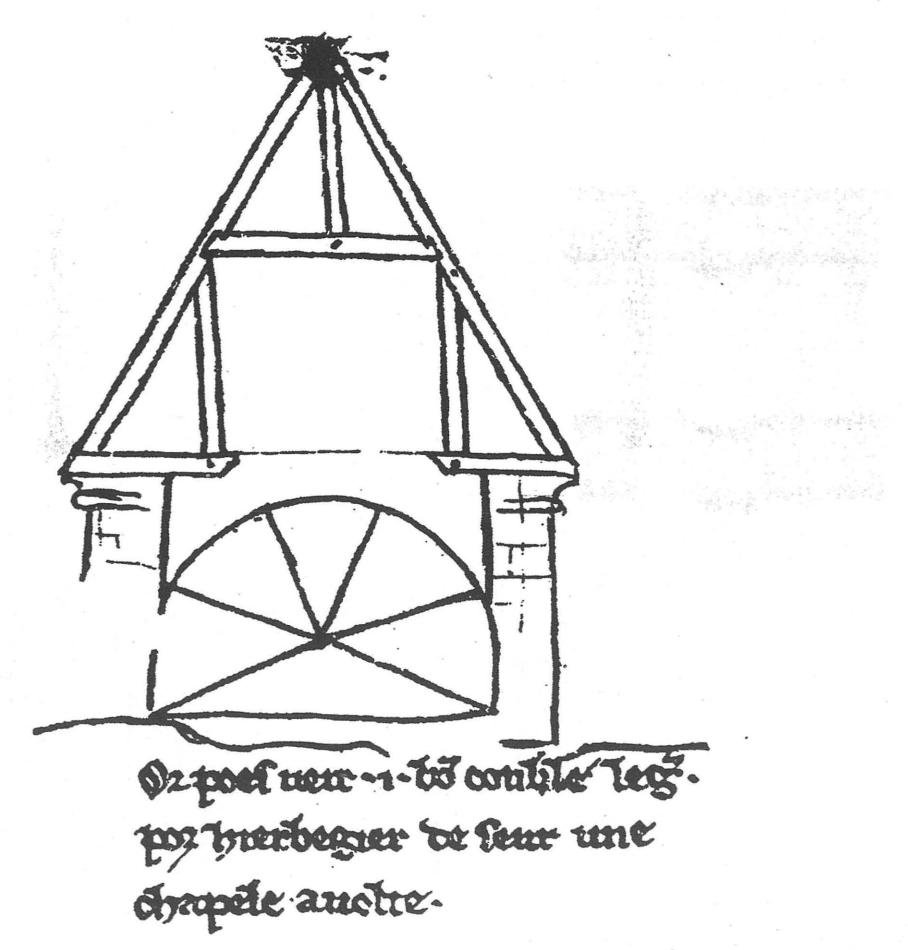


Figura 4.8
Fragmento de una página del Álbum de Villard de Honnecourt

par parece ser de una sola pieza. El debilitamiento de los pares por las entregas del puente es evidente; los puntos del dibujo indican espigas de sujeción, por lo que los pies derechos también debilitan las pares en esos mismos puntos. Baines, en su análisis de la armadura de Eltham Palace Hall, describe la misma forma de construcción, y comenta «la causa de debilidad en un punto del par principal en el que se requiere la máxima resistencia».

La teoría de Baines se ve aquí, como en otras ocasiones, contradecida por sus propias y muy exactas observaciones. Viollet-le-Duc no sabía si los pares de Westminster Hall discurrían sin interrupción desde la cumbrera a las soleras, y su dibujo (figura 4.3) contiene algunas conjeturas de detalle; Baines descubrió que los pares constaban de dos piezas: no sólo estaban «debilitados» en su unión con el puente, sino que, en realidad, estaban completamente separados en este punto. En la figura 4.9 (cf. figura 4.4) se muestra esquemáticamente el entramado de Westminster Hall, habiéndose eliminado los camones, los jabalcones, el puente superior y las manguetas laterales. A partir de la figura 4.9 puede construirse inmediatamente la clásica retícula de nudos articulados de la figura 4.10(a) que sirve como modelo para determinar los esfuerzos de primer orden en la armadura de palomillas.

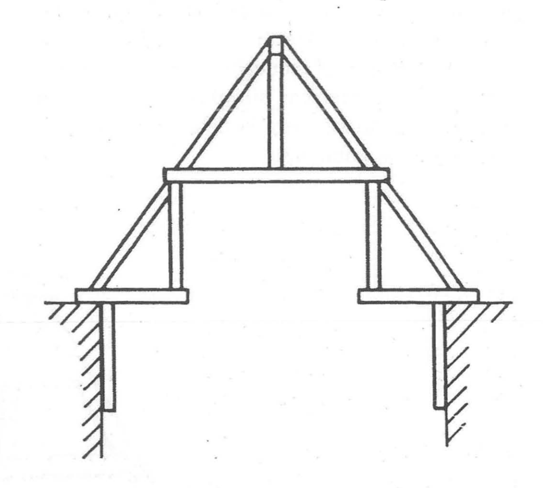
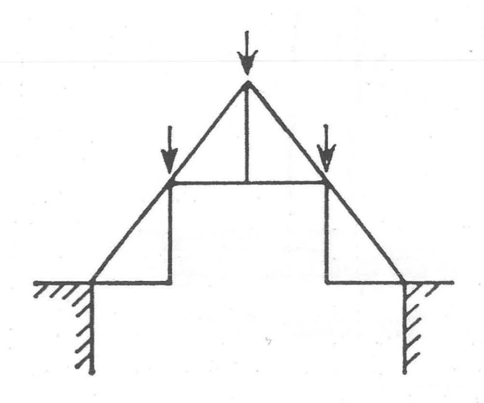


Figura 4.9
Entramado básico de una armadura de palomillas



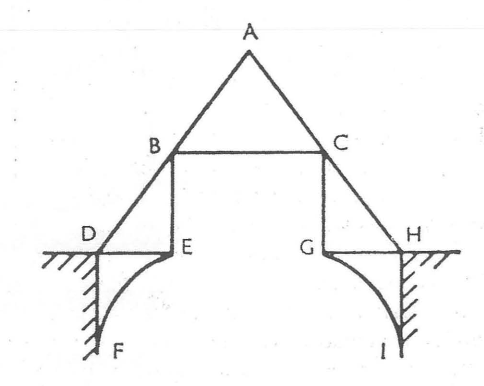


Figura 4.10
(a) Armadura de palomillas sin jabalcones

(b) Armadura de palomillas básica, según Baines

En el esquema de la figura 4.10(a), ningún miembro tiene mayor dimensión que el puente, cuya longitud es la mitad del vano. La armadura de palomillas es una solución al problema de cubrir un gran vano con piezas relativamente cortas; esto ya fue observado por Baines:

> El aspecto decisorio del problema podría, por tanto, haber sido la longitud de los maderos disponibles que, para las grandes escuadrías necesarias, podría haber estado comprendida entre 8 y 12 m. A causa de esta limitación, Herland pudo, en consecuencia, haber desarrollado otro tipo de armadura, notable por su gran belleza y simplicidad de diseño.
>
> Su armadura estaba dividida en tres partes separadas y distintas, cada una de ellas formando un entramado estructural en sí mismo, como se muestra en el esquema (figura 4.10(b)). A un entramado triangular ABC, soportado en dos estructuras ajabalconadas de palomillas BDEF y CGHI, se le añaden otros elementos, tales como los grandes camones,... pero esas tres estructuras son las partes esenciales de la armadura...

Baines tuvo aquí la esencia de la solución completa; sin embargo, tras llegar a este punto, ignoró su propio razonamiento en favor de sus ideas preconcebidas sobre el comportamiento estructural de las armaduras de palomillas.

Las cargas en la armadura de la figura 4.10(a), en la que se han omitido los jabalcones (cf. figura 4.10(b)), representan el peso propio de la techumbre, y se suponen aplicadas en la cumbrera y en las correas principales. Bajo esta carga, queda claro inmediatamente que los pies derechos y los nudillos no trabajan, y que el pendolón tampoco soporta carga. Los únicos elementos portantes son los pares superiores e inferiores, ambos a compresión, y el puente, también a compresión.

Las nudillos y los pies de derechos no reciben cargas bajo el peso propio; su función es la de formar con los pares una estructura triangulada rígida. Por consiguiente, la armadura de Villard es realmente un sistema de arriostramiento para los pares. Análogamente, la distinción de Cautley[11] entre nudillos verdaderos y falsos en Earl Stonham carece de sentido; es irrelevante cómo se realizan las uniones entre elementos, en tanto que den lugar a un triángulo rígido. La verdadera función de los distintos miembros de una armadura de palomillas esta implícita en Needham Market, donde a simple vista parece evidente que los nudillos son demasiado delgados para soportar mucho peso. (La armadura de Needham Market es única, ya que el característico triángulo sobre el puente, está sustituido por un marco rectangular, cuyos montantes laterales se continúan en los pies derechos.)

Resulta obvio también que si los pares son los elementos que principalmente soportan las cargas, la construcción de palomillas no hace nada para reducir el empuje de la cubierta. La conversión de Westminster Hall de tres naves en un solo vano debió de implicar necesariamente un empuje hacia el exterior sobre los antiguos muros normandos, por lo que se construyeron arbotantes para asegurar la estabilidad. Podemos hacernos una idea de las magnitudes de las fuerzas implicadas mediante el cálculo de una armadura de dimensiones aproximadas a las de Westminster Hall, pero con proporciones 3:4:5 y sin los camones que forman el arco.

Las cargas de 120 kN señaladas en la figura 4.11(a) están próximas a las estimadas para Westminster Hall;[5,6] el entramado es isostático, y las fuerzas en los pares se han representado en la figura 4.12(a). El empuje horizontal sobre el muro es de 135 kN, un valor muy próximo al del empuje de la bóveda de piedra de una nave gótica francesa típica.[18]

Los pares superiores de Westminster tienen una sección de: 406 mm × 305 mm, con un área de 123.830 mm^2; los valores correspondientes para los pares inferiores y para el puente son: 419 mm × 330 mm (138.354 mm^2) y 559 mm × 305 mm (170.495 mm^2), respectivamente. Por tanto, y según la figura 12(a), las tensiones en los tres miembros son aproximadamente de: 0,60; 1,63 y 0,53 N/mm^2, respectivamente. Comparando estos valores con una resistencia a compresión del roble inglés entre 50 y 70 N/mm^2, resulta evidente que, al igual que para las fábricas,[18-21] la resistencia del material es irrelevante. El coeficiente de seguridad en relación con la resistencia parece ser del orden de 50, y el material debería sufrir una enorme degradación, antes de que la carga sobre uno de los miembros pusiera en peligro a la armadura en su conjunto.

Para el cálculo de las deformaciones se tomarán asimismo las rigideces de los miembros de Westminster Hall; conforme a la tabla 4.1 los valores para los pares superiores, inferiores, y la mitad del puente son de: 128×10^3; 152×10^3 y 312×10^3 kN/m,

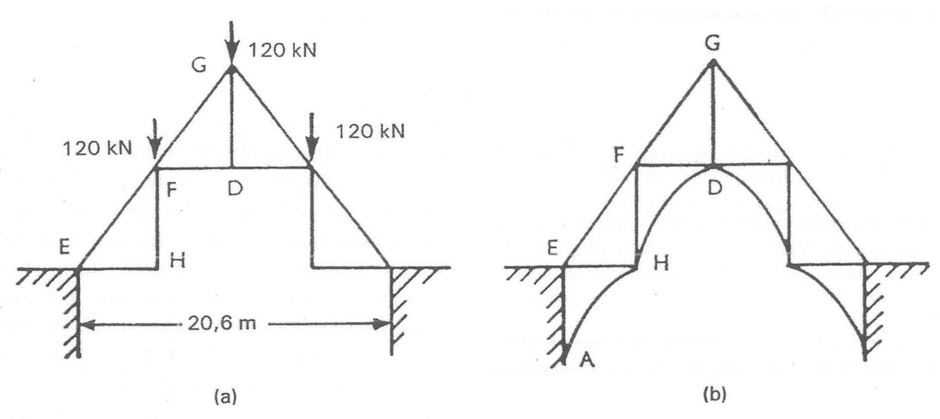


Figura 4.11
Análogo de Westminster Hall, con y sin jabalcones curvos

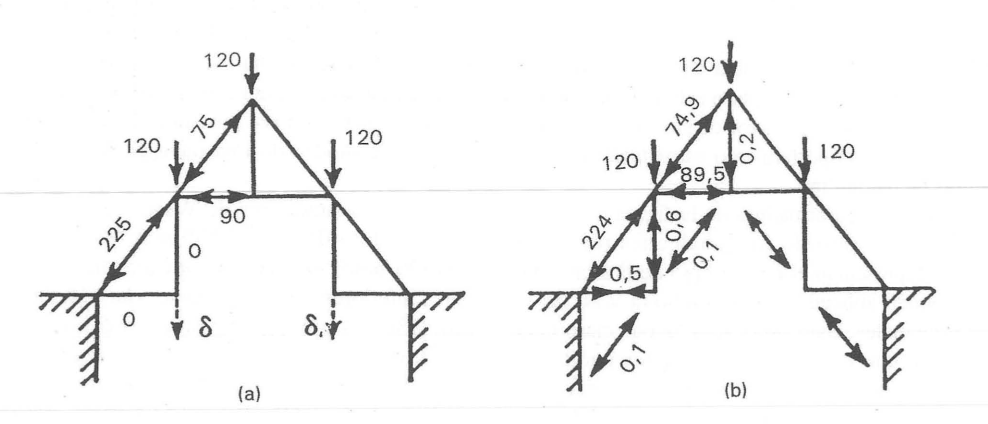


Figura 4.12
Esfuerzos correspondientes a la figura 4.11

respectivamente. Un cálculo simple nos da un descenso δ en el extremo del nudillo (figura 4.12(a)) de 2,07 mm; la estructura es suficientemente rígida.

Como un paso hacia el análisis completo de la estructura real, se puede investigar el comportamiento de la armadura con el añadido de los jabalcones curvos superior e inferior (figura 4.11(b)). En su análisis por energía de deformación, Pippard sustituye dichos elementos curvos por otros rectos de rigidez equivalente, y da fórmulas para calcular la «constante de resorte» efectiva de una barra curva. Como se observa en la tabla 4.1, para los dos jabalcones AH y HD, las rigideces son entre 100 y 1.000 veces menores que las de los otros elementos. Por consiguiente los términos correspondientes a dichos jabalcones practicamente «desaparecerán» en relación con los otros en un cálculo elástico. Si, como en este caso, la estructura esta bien proyectada y es capaz de soportar sus cargas sin la adición de jabalcones flexibles e hiperestáticos, entonces los esfuerzos en estos débiles jabalcones serán virtualmente cero.

Tabla 4.1

Elemento		Longitud (m)	Área (mm² × 10³)	Rigidez (kN/m × 10³)	(*a*) Básico	(*b*) Solución completa	(*c*) Sin jabalcones	(*d*) Pilarejo rígido	(*e*) Sin jabalcones	(*f*) Baines	(*g*) Pippard Nº 1	(*h*) Pippard Nº 2	(*i*) Harvey Nº 2	(*j*) Harvey Nº 3	(*k*) Viento		(*l*) Peso propio más viento (*e*) + (*k*)	
Pendolón	DG	7,7	100,6	128	0	–46	–46	–27	–27	Tracción	–140	–09	–1.030	0	–5		–32	
Par superior	FG	9,4	123,8	129	–72,9	45	–45	–57	–57	Tracción	10	–66	550	–73	–34	16	–91	–41
Puente	FD	5,3	170,3	315	–85,6	–67	–68	–75	–75	Compresión	40	–84	300	–28	34	–111	–41	–186
Par inferior	EF	8,8	138,4	154	–224,6	–164	–165	–193	–194	Tracción	80	–217	1.100	–122	26	–82	–168	–276
Pie derecho	FC	3,1	395,1	1.249	0	–27	–26	–16	–15	Tracción	–185	–3	–570	–84	–49	44	–64	29
	CH	4,3		900	0	–1	0	0	0	Tracción	–71	3	0	–84	0	0	0	0
Nudillo	EB	1,5	331,9	2.168	0	–27	–28	–16	–16	Compresión	–48	–8	–620	69	–53	–53	–69	31
	BH	3,5		929	0	1	0	0	0	Compresión	64	–2	0	69	0	0	0	0
Arco camón	AB	6,3		56	0	–50	–50	–30	–30	Tracción	–203	–9	–1.120	—	–96	–96	–126	55
	BC	5,4	162,5	147	0	–63	–63	–37	–37	Tracción	–254	–12	–1.410	—	–120	–120	–157	69
	CD	6,1		30	0	–46	–46	–27	–27	Compresión	–186	–9	–1.030	—	–88	–88	–115	51
Jabalcón inferior	AH	7,9	81,3	0,6	0	–1,3	—	–0,8	—		–75	3,6	—	–109	—		—	
Jabalcón superior	HD	9,0	81,3	0,4	0	0,0	—	–0,1	—		28	–0,2	—	—	—		—	
Pilarejo	AE	6,1	77,4	124	–240,0	–190	–191	—	—		15	–234	850	–156	—		—	
Empuje en la solera (kN)					127	120	121	125	126		0	120	0	0				
Empuje en el canecillo (kN)					0	13	12	8	7		97	0	273	69				
Descenso del nudillo (mm)					2,07	2,79	2,79	1,78	1,78		170	–8,13	68,58	248,92	5,84	–5,08		

Cargas en kN; tracciones positivas.

La adición de los cuatro jabalcones curvos hace que el entramado de la figura 4.11(b) sea hiperestático de segundo orden bajo carga vertical simétrica, y mediante el análisis de la energía de deformación, (utilizando de nuevo las rigideces de la tabla 4.1) se llega a los esfuerzos en las barras de la figura 4.12 (b). Su comparación con la figura 4.12(a) muestra que los jabalcones, que soportan fuerzas de compresión de 1 y 0,1 kN en sus extremos, apenas afectan (menos del 0,5 %) los esfuerzos de los elementos principales. El descenso en el extremo del nudillo se reduce de 2,07 a 2,06 mm.

Las «constantes de resorte» de los elementos curvos del entramado son muy sensibles a la particular geometría de los mismos, y por consiguiente, las rigideces de AH y HD indicadas en la tabla 4.1, deben considerarse aproximadas. Sin embargo, estos dos valores pueden alterarse considerablemente sin que la conclusión principal se vea afectada, es decir, que la armadura de la figura 4.11(b) puede ser sustituida, a efectos del peso propio, por la de la figura 4.11(a). Los esfuerzos en las barras correspondientes a la figura 4.12(a) son entonces, una buena aproximación de la distribución de los esfuerzos en una armadura de palomillas de grandes dimensiones (no se ha considerado todavía el efecto de los camones).

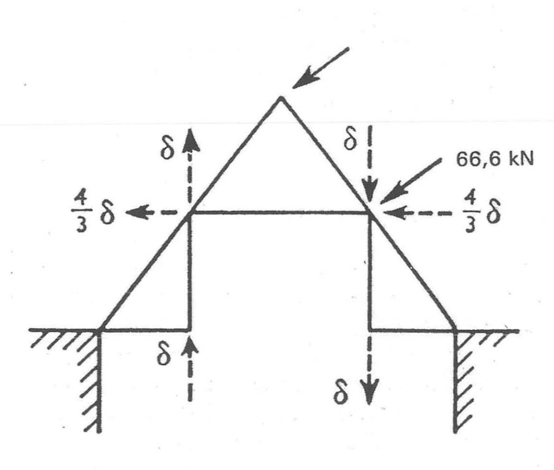


Figura 4.13
Carga de viento

La función de los jabalcones curvos cobra sentido cuando consideramos la acción de cargas asimétricas. Por ejemplo, bajo la acción normal del viento (figura 4.13), los triángulos rígidos pueden moverse como se indica, y toda la cubierta se comporta como un mecanismo de cuatro bielas. Los únicos miembros que se oponen a dicho movimiento son los jabalcones. Puesto que las rigideces de los pares, el puente, los pies derechos y los nudillos son muy grandes en relación con las de los jabalcones, un análisis simplificado en el que se supone que toda la deformación se debe a la mucho menor rigidez de los jabalcones, proporciona resultados muy aproximados. Para las acciones indicadas en la figura 4.13, las fuerzas resultantes en los jabalcones superiores e inferiores son de 18 y 26 kN respectivamente, y el desplazamiento del extremo del nudillo es de 39,4 mm.

Esta deformación es importante debido a que los jabalcones de Westminster son muy débiles; el análisis completo, incluyendo el efecto de los camones, mostrará que la deformación real producida por el viento es menor. Los jabalcones de Earl Stonham, cuya cubierta es de mucha menor luz, son claramente más efectivos.

WESTMINSTER HALL

La figura 4.14, tomada de Brandon,[22] muestra un detalle típico de los ensambles de una armadura de palomillas en la coronación del muro de fábrica; este detalle puede compararse con la zona correspondiente de Westminster en la figura 4.3. Un elemento destacable es el pilarejo adosado al muro que, como dice Cautley, fue un descubrimiento del constructor medieval de cubiertas: «en tanto en cuanto el muro permaneciese estable por sí mismo, ya no había miedo de que la solera se moviera y la armadura se abriera hacia fuera».[11] Brandon da una interpretación similar de la función del pilarejo adosado al muro; el nudillo y el pilarejo forman un tope que impide el deslizamiento de la armadura sobre la cabeza del muro.

Por el contrario, anteriormente se vio que Viollet-le-Duc supuso que el pilarejo adosado al muro formaba parte de los elementos fundamentales de la armadura; por medio de este elemento, el empuje horizontal de la cubierta era llevado más abajo de la coronación del muro (al punto G en la figura 4.3). Este punto de vista fue adoptado por Pippard[6] y por

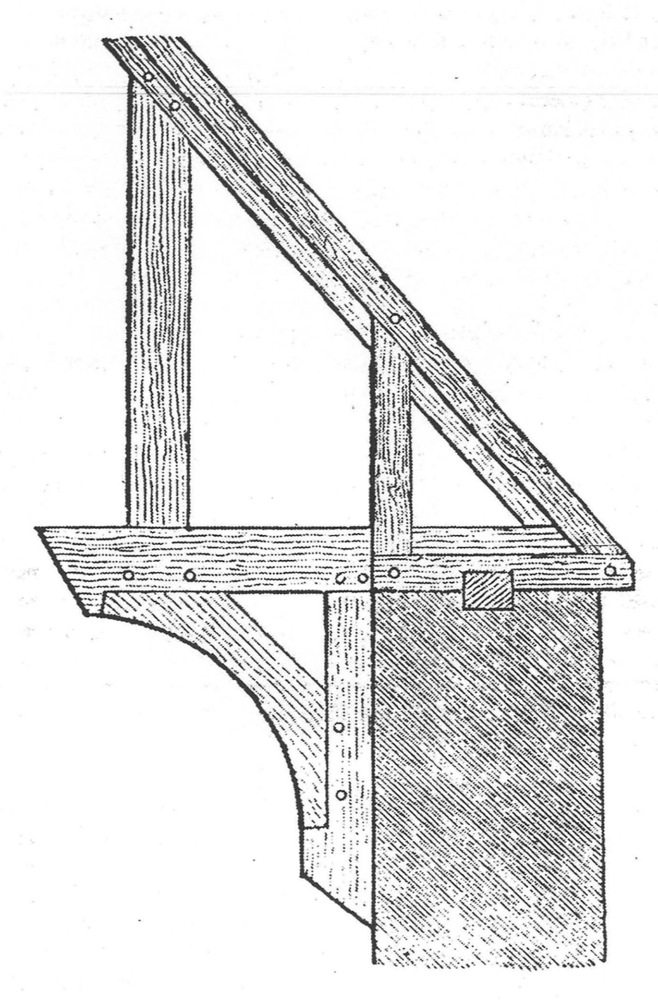


Figura 4.14
Detalle del pilarejo, según Brandon

Harvey,[7] quienes finalmente consideraron que el comportamiento más probable se deducía de la hipótesis de que el muro no recibía ningún empuje al nivel del nudillo (ver tabla 4.1), estando toda la cubierta soportada, tanto vertical como lateralmente, en la base de los pilarejos. El detallado examen de Baines sobre el estado de Westminster Hall en 1914, arroja nueva luz sobre este particular. En muchos casos Baines encontró que los pilarejos estaban tan degradados que sus pies ya no estaban en contacto ni con el muro ni con el canecillo «de soporte». Por consiguiente eran incapaces de transmitir carga alguna de la armadura.

En Earl Stonham puede verse claramente (figura 4.15), que la función primaria de los pilarejos adosados no es conducir la carga hacia el muro. Los grande arcos de diafragma intersectan dos tramos de la armadura de la nave, y los pilarejos correspondientes quedan colgando en, aproximadamente, la mitad de su longitud.

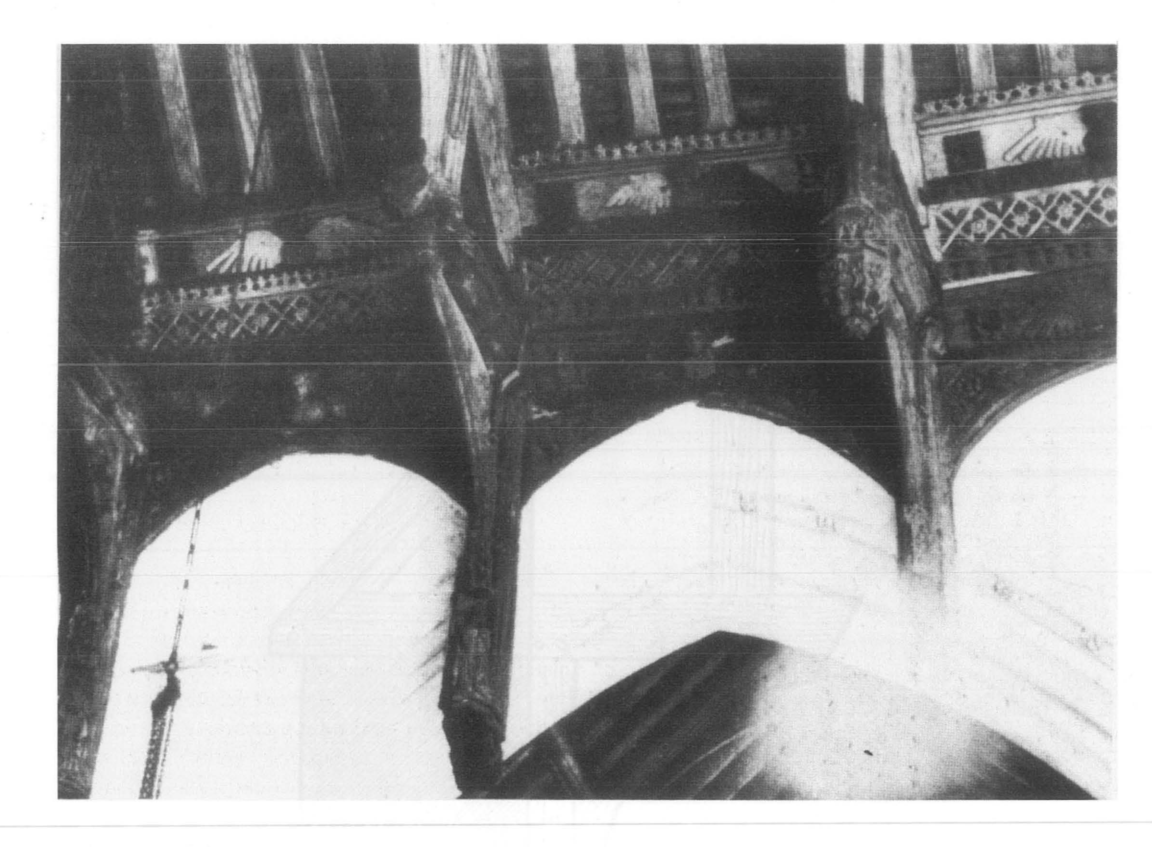


Figura 4.15
Pilarejos, Earl Stonham, Suffolk

En el caso de que el empuje actúe sobre la solera, que el pilarejo esté o no incluido en la estructura principal no tiene, en realidad, importancia alguna. Con el objeto de poder comparar directamente con los resultados de Pippard, se incluirá el pilarejo en el análisis de la armadura de Westminster Hall, si bien la hipótesis más probable es que el peso de la cubierta se soporte al nivel de la solera. Los grandes camones empujan contra el muro, evidentemente, a un nivel más bajo.

Siguiendo fielmente las hipótesis tanto de Baines como de Pippard, consideraremos que:

(a) se ignora la tracería de relleno de las enjutas;
(b las manguetas laterales y el puente superior no son eficaces estructuralmente;
(c) los ejes de los miembros que acometen una ensambladura concurren en un punto (nudo), y dichos miembros están articulados en los nudos;
(d) los camones y los jabalcones curvos pueden sustituirse entre los nudos por elementos rectos equivalentes;
(e) los muros son rígidos;
(f) las cargas se aplican sobre la armadura solamente a la altura del puente y de la hilera (como en la figura 4.11).

Las hipótesis (a)-(d) parecen dar un modelo estructural razonable para la determinación de los esfuerzos principales del entramado; la hipótesis (c) se discute más adelante. La hipótesis (e) es dudosa, pero resulta no ser crítica; es la única hipótesis razonable que se puede hacer a los efectos de un análisis por energía de deformación, y da lugar a distribuciones de esfuerzos que no contradicen el sentido común.

En la figura 4.2 parece claro que la correa situada a la altura del puente, es el apoyo principal de los pares secundarios, aunque las otras dos correas transmiten *alguna* carga a la armadura. Para que sea eficaz, la correa más alta necesita la presencia del puente superior, ya que las hipótesis (b) y (f) están ligadas. La correa inferior es soportada por el camón mediante los débiles jabalcones P (figura 4.2).

La tabla 4.1 resume los cálculos para las cargas indicadas en la figura 4.16; los primeros diez casos se refieren a peso propio exclusivamente, y los dos últimos a la acción del viento. Las longitudes y áreas de los elementos han sido tomadas de Pippard; se ha corregido un pequeño y evidente error de imprenta. En el cálculo de las rigideces, *AE/L*, se ha adoptado para E un valor de 9.660 N/mm^2; el valor real de E no afectará, evidentemente, la distribución de esfuerzos en el entramado, pero las deformaciones son inversamente proporcionales a dicho valor. Para los elementos curvos se han empleado las rigideces efectivas de Pippard. Los resultados se han ilustrado en la figura 4.17, en la que los espesores de cada miembro se han dibujado en proporción a sus cargas; las líneas discontinuas indican miembros a tracción. Pueden sugerirse las siguientes variantes de solución referidas tanto a la tabla 4.1 como a la figura 4.17.

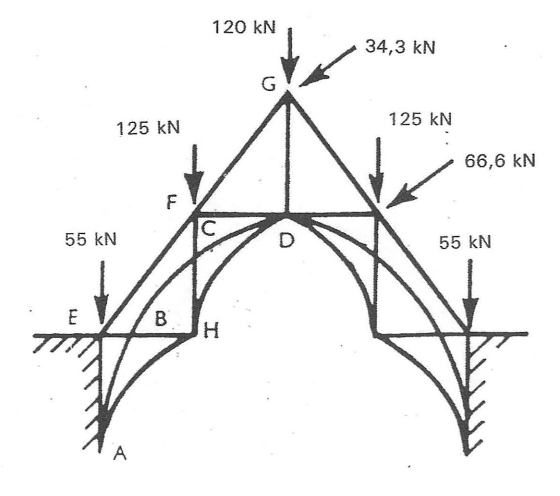


Figura 4.16
Peso propio y carga de viento en la armadura de Westminster Hall

(a) Armadura de palomillas básica. Esta es la solución básica de equilibrio de la cubierta (cf. figura 4.12(a)) exclusivamente bajo carga vertical; sobre esta solución se superpondrán los esfuerzos producidos por las tres barras redundantes consideradas: los jabalcones superior e inferior, y el camón. Como ya se dijo anteriormente, la estructura básica no es estable bajo la acción de fuerzas laterales (resistencia al viento).

(b) Solución completa incluyendo los pilarejos. Esta solución se incluye para compararla con las de Pippard y Harvey. La cabeza del pilarejo se supone fija lateralmente pero no verticalmente. Los esfuerzos en las barras redundantes se han calculado basándose en la teoría clásica de la elasticidad.

(c) Como la anterior (b), pero eliminando los jabalcones curvos. Esta solución es virtualmente idéntica a (b), como era de esperar, y no se hace ninguna distinción en la figura 4.17. Comparada con (a), puede verse que los camones soportan una parte del peso, descargando los pares.

(d) Solución completa omitiendo los pilarejos (soleras fijas). Los pies de los pares inferiores están articulados al muro rígido; los pies de los camones están articulados por debajo de la coronación del muro. Comparada con (b) y (c), los camones reciben un poco menos de carga.

(e) Como (d) pero omitiendo los jabalcones curvos. La solución es virtualmente idéntica a (d).

Las cinco soluciones anteriores para carga vertical parecen «razonables». Las soluciones (b), (c) y (d) dependen de la hipótesis relativamente improbable, de que los muros sean completamente rígidos. Por otra parte, la solución (a) no depende de esta hipótesis, puesto que con la supresión de los camones y de los jabalcones curvos el entramado es isostático. El empuje sobre la solera es sensiblemente constante entre 120 y 130 kN.

Esta insensibilidad del valor del empuje en relación con las hipótesis hechas en los cálculos, se debe a la relativamente baja rigidez de los camones. Despreciando los jabalcones curvos, cuyo efecto es muy pequeño, los camones sólo aligeran muy levemente los pares principales en cuanto a su carga vertical. En particular, cualquier separación de los supuestamente rígidos muros tendrá solamente un efecto secundario sobre el valor del empuje en la solera.

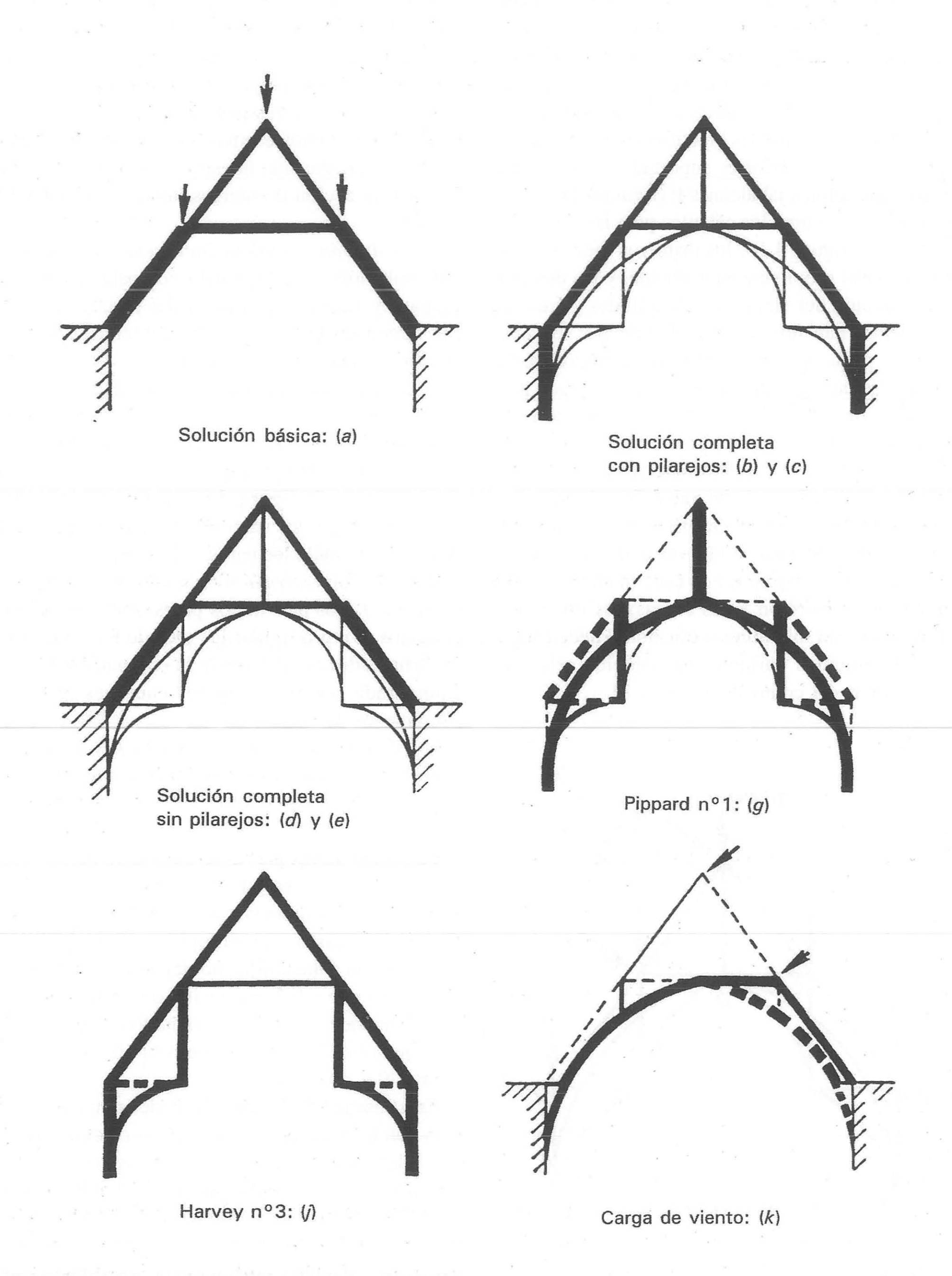


Figura 4.17
Esfuerzos en la armadura de Westminster Hall (véase tabla 4.1)

En estas cinco primeras soluciones «razonables» la práctica totalidad de los elementos están trabajando cómodamente a compresión; los ensambles a caja y espiga son eficaces a compresión, pero dudosos a tracción. El descenso en el extremo del nudillo en las cinco soluciones es, aproximadamente, de 2 a 3 mm. Como ya se ha dicho anteriormente, este valor depende del módulo de elasticidad de cada elemento; pero, sobre todo, depende del comportamiento real de los muros «rígidos». Sin embargo, un incremento de la luz entre las soleras de 25 mm produciría un descenso del nudillo de sólo 10 mm. La armadura parece tener a la vez una buena configuración geométrica y ser muy rígida intrínsecamente. A continuación se consideran otras posibles soluciones.

(f) Solución de Baines. Esta solución no es estrictamente comparable con las otras aquí presentadas, puesto que Baines incluye las riostras del siglo XIX en su análisis. Sin embargo, bajo carga vertical exclusivamente, encontró que el pendolón, los pares inferiores y los camones, en su mayor parte trabajaban a tracción. Éste y otros de sus resultados contradecían su sentido estructural, y le condujeron a la conclusión de que sus esfuerzos teóricos no se correspondían en modo alguno con los reales. El hecho de que los pies derechos trabajaran a tracción, cuando Baines «sabía» que éstos eran los elementos principales que soportaban el puente, solamente reforzó su desconfianza en el análisis.

(g) Solución N°1 de Pippard. Pippard utilizó un sistema de cargas que difería ligeramente del aquí considerado. A efectos de comparar directamente los resultados incluidos en la tabla 4.1 se han recalculado para las cargas de la figura 4.16. En su trabajo original,[6] Pippard consideró tres casos diferentes de apoyo en el muro: (i) sin empujes laterales en la solera, (ii) sin empujes laterales en el canecillo del pilarejo, y (iii) solera y canecillo del pilarejo rígidos (este último caso corresponde exactamente al caso (b) de la tabla 4.1, y por consiguiente no será discutido en adelante). Pippard consideró que la primera de sus resoluciones era la que mejor representaba el comportamiento real, y sólo cita resultados de este caso en su libro.[5] Puede verse en la figura 4.17 que el arco que forman los camones aparece como el elemento principal, y que los pares, el puente y los pilarejos trabajan todos a tracción. Este improbable estado está acompañado por una deformación importante de más de 150 mm en el nudillo. Además, aunque la rigidez perfecta del muro sea dudosa, la solución de Pippard requiere que el entramado se abra 230 mm al nivel de las soleras.

(h) Solución N°2 de Pippard. Suponiendo que todo el empuje lateral es absorbido por la solera, se obtiene la muy razonable distribución mostrada en la tabla 4.1 (no se ilustra en la figura 4.17). Esta solución puede ser considerada al igual que las (a)-(e) de la tabla 4.1, como una distribución de esfuerzos aceptable.

(i) Solución N°2 de Harvey. William Harvey[7] mostró el funcionamiento de la armadura de Westminster Hall mediante un modelo formado por piezas de madera. Da fotografías de diversas disposiciones de las piezas, pero no realiza cálculos. Encontró, inicialmente, que no se necesitaba ninguna reacción horizontal al nivel de la solera, por lo que sus tres soluciones corresponden a modelos apoyados únicamente en las bases de los pilarejos adosados a los muros. En efecto, al eliminar la ligazón al nivel de las soleras, la estructura tiene, para carga vertical, dos grados de hiperestatismo en vez de tres. La primera solución de Harvey se refiere, por tanto, a la armadura completa sustentada sobre los canecillos de los pilarejos; si hubiera realizado los cálculos, habría obtenido los resultados insatisfactorios del primer caso de Pippard ((g), tabla 4.1).

Harvey no parecía estar al tanto de la noción de hiperestatismo, pero encontró experimentalmente que podía prescindir de dos elementos de la armadura. La segunda solución de Harvey corresponde a una armadura aún soportada sobre los canecillos de los pilarejos, sin los jabalcones curvos superiores e inferiores; la solución de la tabla 4.1 (no ilustrada en la figura 4.17) es completamente absurda.

(j) Solución N°3 de Harvey. La tercera solución de Harvey es otro entramado isostático, formado por la eliminación de los camones y de los jabalcones curvos superiores; las esfuerzos en las barras se han incluido en la tabla 4.1 y se ilustran en la figura 4.17. Con independencia de la considerable tracción en las nudillos, la solución es inaceptable debido a la gran deformación (casi 250 mm) de las cabezas de los nudillos, y a una separación entre soleras de 330 mm. Las piezas de madera de Harvey no reproducen la rigidez de los elementos originales, y su modelo era inadecuado por cuanto que los jabalcones curvos inferiores eran aproximadamente 100 veces más rígidos que los reales.

(k) Acción del viento. De acuerdo con Baines, puede estudiarse la acción del viento sobre la armadura considerando una presión normal de 1,2 kN/m^2 solamente sobre el lado a sotavento (figura 4.16). En la tabla 4.1 las dos columnas de cifras se refieren a la parte izquierda y derecha del arco exclusivamente bajo la acción del viento; la distribución está esquematizada en la figura 4.17. Los esfuerzos en los jabalcones curvos son despreciablemente pequeños. Es patente la gran importancia de los camones para resistir la acción del viento. Las deformaciones de los nudillos son muy pequeñas, y en sentidos *opuestos* a los indicados en la figura 4.13. Si Herland hubiese suprimido los camones, y las fuerzas del viento fueran resistidas por los jabalcones curvos (como en el entramado análogo de la figura 4.13 discutido más arriba), las deformaciones del nudillo habrían sido de unos 40 mm.

(l) Peso propio más viento. Se han superpuesto las soluciones (e) y (j) de la tabla 4.1 para obtener los esfuerzos en las barras bajo el peso propio más la carga de viento (no aparece en la figura 4.17). Nótese que, en la parte a sotavento del entramado, permanecen algunas ligeras tracciones en el camón, y en las partes del pie derecho y del nudillo situadas sobre él. Si suponemos que ningún elemento de la armadura puede soportar tracciones, entonces puede prescindirse, a efectos de cálculo, del camón en el lado a sotavento. Esto es equivalente a la hipótesis de que un miembro a tracción se queda «suelto» debido al juego en el ensamble. Puede encontrarse entonces un sistema satisfactorio de esfuerzos a compresión para la armadura completa, que difiere muy poco de (k) en la tabla 4.1.

Conclusiones

Las soluciones examinadas más arriba son distintas entre sí debido a las diferentes hipótesis empleadas en el análisis. Si las condiciones de apoyo «reales» de la cubierta fueran conocidas, y si dispusiéramos de los detalles precisos de los ensambles entre los miembros, entonces se podrían calcular, teóricamente, los esfuerzos en el entramado. Tal cálculo no sería, sin embargo, de mucho valor ya que sería válido solamente para el momento en que fuera realizado. Con el paso de los años, los decenios y los siglos, la fábrica del conjunto de la estructura, inevitablemente, se mueve y asienta, y las hipótesis hechas en el análisis quedarán obsoletas.

No existe, en realidad, ningún estado «real» en sentido absoluto para Westminster Hall o para cualquier otra estructura. Hay solamente un estado «aquí y ahora», que cambia continuamente con el tiempo; estos cambios pueden ser muy grandes para alteraciones aparentemente triviales, por ejemplo, de las condiciones de sustentación.

Ésta es precisamente la situación que descubrió el Comité de Investigación de las Estructuras de Acero[23] en relación con los edificios de estructura porticada de acero. A partir de ensayos sobre estructuras reales, el Comité encontró que el estado de tensiones observado apenas guardaba relación con el calculado por el proyectista. Aunque el Comité intentó proporcionar reglas más refinadas para el cálculo elástico de estructuras porticadas de acero, finalmente se llegó a la conclusión de que cualquier intento de fundamentar un método de cálculo en el comportamiento «real» era en gran medida irracional. Inevitablemente, la estructura real estaba a la vez imperfectamente hecha e imperfectamente montada, y estaba sujeta, además, a deformaciones accidentales desconocidas.

Por esta razón se desarrolló la teoría plástica para las estructuras porticadas de acero.[24] La teoría plástica predice con exactitud la carga de colapso de una estructura porticada de acero, pero esto no debería enmascarar el hecho de que es, en realidad, una forma de deducir una distribución razonable y segura de esfuerzos en una estructura, en estado de *servicio.* El teorema de la seguridad de la teoría plástica es categórico: si en una estructura porticada de acero es posible encontrar una distribución *cualquiera* de fuerzas, que esté en equilibrio con las cargas exteriores y que no sobrepase los límites de resistencia de cada elemento, entonces, la estructura en su totalidad es segura, y *no es necesario* calcular la distribución «real» de esfuerzos. (Es el margen de seguridad, es decir, el factor de carga, lo que la teoría plástica predice con tal precisión.)

En realidad, la tarea del proyectista consiste en construir estados de equilibrio razonables en los que poder basar el cálculo. Dicha técnica, basada en el uso de la teoría plástica, que es ahora de uso común en estructuras de acero, ha sido aceptada hace tiempo para el hormigón armado, y recientemente ha sido aplicada a las fábricas.[18] Puesto que la teoría sola-

mente se aplica a materiales plásticos (dúctiles), es la herramienta fundamental para estructuras realizadas con materiales que no son frágiles, siempre que la inestabilidad local o general sea improbable, y que las deformaciones no sean importantes.

Así, para la armadura de la cubierta de Westminster Hall, cualquiera de las soluciones de equilibrio (a)-(e) de la tabla 4.1 (figura 4.17), o la solución (h) constituyen soluciones razonables de equilibrio (por el contrario, las soluciones de Baines (f), Nº1 de Pippard (g) y las de Harvey, (i) y (j), parecen irrazonables). Estas soluciones se han obtenido por análisis elástico convencional, puesto que ha sido conveniente, pero no son soluciones «elásticas»; representan únicamente diferentes estados de equilibrio posibles de la armadura, algunos plausibles y otros absurdos. Aunque hay alguna dispersión numérica, las soluciones (a)-(e) indican el patrón general de comportamiento del entramado; todos los elementos están sometidos a pequeñas fuerzas de compresión, y los niveles de tensión son, además, muy bajos. Los camones y jabalcones están sometidos a alguna tensión adicional de flexión, que puede calcularse, pero los resultados no son importantes excepto para los jabalcones en las soluciones (g) y (j), que, en cualquier caso, son inaceptables en su conjunto.

Cualquier intento de hacer cálculos más refinados parece inútil. Por ejemplo, si para algunos elementos de la armadura se supusieran valores diferentes del módulo de elasticidad, o si sufrieran modificaciones en su área, quizá por degradación del material, se obtendrían distribuciones de esfuerzos similares. De forma análoga, el cálculo de tensiones de segundo orden debidas a las excentricidades de los miembros en los ensambles, sería un esfuerzo estéril. El peor nudo en este sentido es el de la solera, pero no tiene importancia si el pilarejo no soporta carga vertical.

Por consiguiente, podemos decir con alguna certeza que los distintos elementos de la armadura de Westminster Hall realizan las funciones más abajo asignadas. Estas funciones pueden aplicarse también a armaduras de palomillas mucho más reducidas, tales como la de Earl Stonham. Aunque los espesores de los elementos de dichas cubiertas menores son mucho más grandes en relación a sus longitudes y, por tanto, las cubiertas en conjunto no son tan «de esqueleto» como la de Westminster Hall, pueden sin embargo, concebirse como si contuvieran una estructura de esqueleto. Las líneas de fuerza no están tan claramente definidas en una estructura pequeña, pero una solución de equilibrio segura para el esqueleto es *a fortiori* un solución de equilibrio segura para la cubierta real.

Pares superiores e inferiores. Son los elementos principales que, trabajando a compresión, transmiten el peso de la cubierta hasta las soleras. Los muros de fábrica deben ser suficientemente masivos como para resistir el empuje hacia el exterior de los pares, o estar reforzados por contrafuertes.

Puente. Forma con los pares superiores un triángulo rígido. La correa principal apoya a la altura del puente, que funciona en realidad como un codal. Para armaduras muy grandes tales como Westminster Hall, la presencia de una correa superior requiere otra puente situado más arriba.

Pendolón. El pendolón es un elemento de subentramado del triángulo superior de la armadura. También funciona como un montante (transmitiendo compresiones) si se incorporan camones formando un arco a la estructura. Las manguetas laterales en una armadura grande forman más bien parte del subentramado, pero no soportan carga.

Nudillo y pie derecho. Estos dos elementos forman un triángulo rígido con el par inferior (la palomilla), y están prácticamente sin carga bajo el peso propio de la cubierta.

Jabalcones curvos superiores e inferiores. En una armadura pequeña sin camones, los jabalcones arriostran el entramado contra el viento; ello implica la aparición de pequeños esfuerzos en los nudillos y en los pies derechos. En Westminster, los jabalcones son tan débiles que resultan ser prácticamente decorativos.

Arco de camones. En Westminster, el arco formado por los dos camones es el elemento responsable de la estabilidad frente a la acción del viento; soporta una pequeña parte de la carga vertical, pero no es ésta su función real.

Pilarejo. El pilarejo adosado al muro forma con el nudillo un tope que impide el deslizamiento hacia el exterior del muro, y no soporta, en general, cargas verticales.

Ángeles. El *rationalisme* de Viollet-le-Duc debería haberle conducido a un estudio más detallado de los ángeles. Viollet opinaba que cada aspecto del gótico era *funcional*, y dio razones lógicas para las grotescas gárgolas en el exterior de las cubiertas. Sin embargo, no se preguntó por la función de los ángeles tallados

mirando hacia el interior en los extremos de los nudillos. Por el contrario, aparentemente aceptó la sugerencia del arquitecto medieval de que los ángeles, con sus alas abiertas, sostenían la cubierta sobre sus espaldas y concluyó, por consiguiente, que los pies derechos soportaban el peso de la cubierta. Hoy en día, e incluso en la época de Viollet-le-Duc, encontramos dificultad en distinguir entre un ángel real y un ángel tallado en madera; ninguno de los dos es sobrenatural. Pero el carpintero que talló los nudillos sabía que estaba haciendo un ángel de madera que sería incapaz, salvo en broma, de soportar la cubierta a sus espaldas tal y como lo haría un ángel real. Los ángeles son en realidad una broma, una de esas bromas medievales que sin duda comprenden los ángeles de Bury (figura 4.6), pero difícil de entender para nosotros; la gracia de la broma está agudizada por el hecho de que haya durado seiscientos años.

5

Sobre las bóvedas «de goma» de la Edad Media y otros temas

El exhaustivo estudio de Frankl[1] sobre el gótico es un repaso completo a «lo que se ha pensado y escrito sobre el fenómeno del gótico como un todo, desde el Abad Suger».[2] Como tal, el estudio tiende a un enfoque histórico, o quizá historiográfico, en el que la cuestión fundamental que se plantea es, «¿Qué pensaban sobre lo que estaban haciendo los arquitectos coetáneos?», a la que se añade la discusión sobre qué pensaban los historiadores del arte sobre lo que consideraban que estaban haciendo los arquitectos.

Una pregunta tan válida como ésta es «¿Qué hicieron realmente los arquitectos de la época?» Este tema lo trata Frankl en detalle, si bien como tema secundario; proporciona una amplia bibliografía, pero no saca partido de la obra básica de Fitchen,[3] publicada en 1961. Como arquitecto, Fitchen hace un estudio exhaustivo de las técnicas que debieron utilizar los constructores medievales y aclara lo que se podrían denominar las cuestiones puramente históricas. No obstante, Fitchen clarifica asimismo lo que podríamos llamar temas específicamente estructurales. En su descripción de los métodos constructivos utilizados realmente por los arquitectos medievales, Fitchen se ve obligado a considerar también el comportamiento de la fábrica en las estructuras góticas.

Así, una tercera pregunta fundamental, que debe contestar el ingeniero, al igual que el historiador y el arquitecto contestaron las dos anteriores, es «¿Cómo se comporta realmente una estructura de piedra?» Un intento reciente[4] para responder a alguno de los problemas planteados por esta cuestión está expresado en gran parte en términos matemáticos. Por ejemplo, se ha estudiado la mecánica de las bóvedas nervadas y determinado los principales esfuerzos; sin embargo, no se hace ninguna referencia al problema concreto (que se tratará más adelante) que ha preocupado a los historiadores del arte en el pasado, de si los nervios son «portantes» o no.

El objetivo de este ensayo es presentar algunos hallazgos sobre la arquitectura medieval, desde un punto de vista técnico, es decir, desde el análisis estructural, y proporcionar algunas indicaciones específicas sobre cómo estos hallazgos se pueden aplicar a alguno de los problemas planteados por los historiadores del arte. Las tres preguntas sobre cómo una estructura fue realmente (a) proyectada, (b) construida, y (c) cómo se comporta, no pueden, en un análisis concluyente, contestarse por separado. Sin embargo, para el estudio de cómo se proyectó y construyó una catedral concreta, concentrarse en la tercera cuestión, el análisis estructural, es sólo relevante de forma marginal. Por tanto, hay que tener en cuenta que el enfoque técnico, al tiempo que conduce a conclusiones válidas e interesantes, arrojará muy poca luz sobre las racionalizaciones del arquitecto medieval. En particular, podemos caer en la tentación

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «On the rubber Vaults of the Middle Ages and other Matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177-88. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

de concluir que el arquitecto medieval *debió* pensar de la misma manera que un ingeniero o arquitecto moderno; contra esta tentación, Frankl proporciona una respuesta rotunda y eficaz.

Frankl se ve obligado de vez en cuando a considerar el análisis estructural de las catedrales góticas, y en la medida en que hace referencia a las obras publicadas, sus comentarios parecen justos y pertinentes. Sin embargo, con respecto a los temas estructurales sobre los que escasea la información, y sobre los que Frankl aventura alguna opinión, se equivoca con frecuencia. Resulta sorprendente encontrar, en un texto sumamente claro y de considerable polimatía, uno o dos errores que parecen cometidos deliberadamente.[5]

En el análisis de Frankl sobre el *rationalisme* de Viollet-le-Duc, tenemos un ejemplo.[6] «Toda forma tiene un cometido utilitario. Los pináculos son un ejemplo importante,'...que debido a su peso, dan a los botareles la estabilidad necesaria para soportar el empuje de los arbotantes'. Desde este punto de vista, que se remonta a Sir Christopher Wren, habría que llegar a la conclusión de que si se quitasen los pináculos los arbotantes cederían y, en consecuencia, las bóvedas de las naves se hundirían. Paradójicamente, según esta hipótesis, cuanto mayor fuese la carga vertical en los pilares, más delgados podrían ser».[7]

El que estas conclusiones parezcan paradójicas se debe a la confusión entre estabilidad y resistencia. Parece que Frankl piensa que el peso de un pináculo pondría en peligro el pilar, provocando quizá el colapso de la fábrica; pero el término empleado por Viollet, *fixeté*, es claro, y Frankl lo ha traducido adecuadamente por «estabilidad». No se hace mención de lo que modernamente se denominaría estado tensional de la fábrica.

Algunos cálculos sencillos revelan los valores soprendentemente pequeños que, generalmente, pueden tener estas tensiones en las estructuras de fábrica. Los ingenieros del siglo XIX utilizaban a menudo un parámetro significativo para expresar la resistencia de una piedra concreta: la altura que podría alcanzar una columna prismática antes de colapsar debido a su propio peso en la base.[8] Considerando una arenisca de peso específico 20 kN/m^3 y resistencia de rotura a compresión de 40 N/mm^2, la columna podría alcanzar una altura de 2.000 m.[9] Dicho de otra manera, añadir un metro más de superestructura del mismo diámetro que el pilar que la soporta, originaría un incremento de la tensión en el pilar de 0,02 N/mm^2; esta cifra se puede comparar con una resistencia de rotura a compresión de 40 N/mm^2.

Las dimensiones de la sección transversal del pilar no intervienen en los cálculos. Si la sección de un pilar de determinada altura tiene el doble de superficie, el peso del pilar será exactamente el doble y las tensiones debidas al peso propio no se ven afectadas.

Normalmente un pináculo es apuntado y, en cualquier caso, tendrá un diámetro menor que el pilar, de manera que se puede esperar que un pináculo de 5 m de altura, incremente las tensiones en el pilar en una cantidad considerablemente menor a 0,1 N/mm^2. En la práctica, la presencia de un pináculo adicional tendrá un efecto despreciable en la *resistencia* de la fábrica en su conjunto, pero producirá un efecto ligeramente beneficioso para su *estabilidad*.

A modo de ejemplo numérico consideremos un botarel de sección constante y 10 m de altura, la tensión en la base, en ausencia del pináculo, es 0,2 N/mm^2. Si esta tensión se incrementa con el pináculo hasta 0,3 N/mm^2, la componente horizontal del empuje transmitido por el arbotante se podría incrementar, aproximadamente, en la relación 3/2 con el mismo factor de seguridad contra vuelco del botarel. El incremento exacto depende de la colocación del pináculo; éste será más eficaz si se coloca lo más cerca posible del arbotante, como en Lichfield (figura 5.1).

El empuje horizontal del arbotante de Lichfield[10] es del orden de 30 kN, por lo que el pináculo debería concebirse para contrarrestar una fuerza horizontal de aproximadamente 10 kN. Por otra parte, la presencia de los pináculos ha permitido que los contrafuertes de Lichfield tengan la dimensión relativamente esbelta de la figura 5.1.

Es cierto que añadir el pináculo mejora la estabilidad del botarel en su conjunto, aunque el efecto es bastante pequeño, incluso para los pináculos relativamente masivos de Lichfield. La acción se puede ver en el diagrama de la figura 5.2. El empuje inclinado P que actúa desde el arbotante tiende a hacer rotar el conjunto del botarel alrededor del borde exterior A; esta tendencia a la inestabilidad está contrarrestada por el par que se opone debido al peso W del botarel y el peso adicional w del pináculo. Esta «articulación» es la clave para el análisis estructural de la

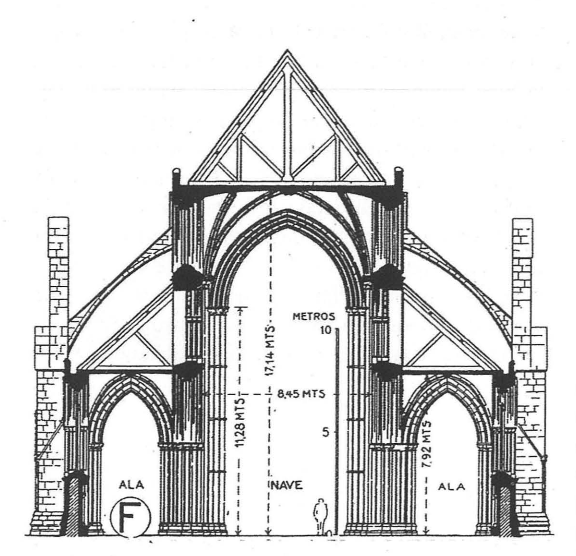


Figura 5.1
Nave de Lichfield. Los grandes pináculos permiten reducir el tamaño de los botareles

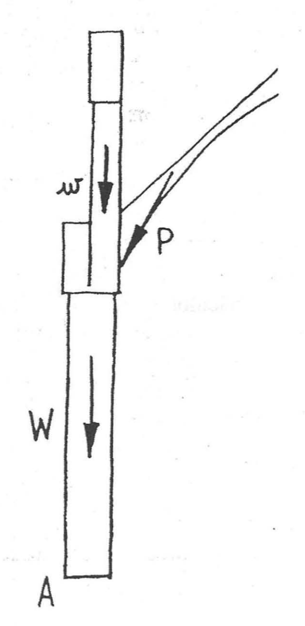


Figura 5.2
Fuerzas que actúan en un botarel (Lichfield). El botarel será estable si no vuelca con respecto al punto A

fábrica, y se tratará más adelante. Fue la forma fundamental de rotura considerada por Coulomb[11] en 1773, pero curiosamente, la idea fue abandonada hasta hace más o menos 25 años, en que sirvió de base para el desarrollo de un método de análisis estructural completamente nuevo, la denominada teoría plástica.[12]

El efecto estabilizador de un pináculo ya se entendía perfectamente en 1843; el libro de Moseley[13] de esta fecha trata las líneas de empuje en las fábricas, «la estabilidad de un pilar o un estribo coronado por un pináculo» y en concreto «el estribo gótico».[14] Moseley hace constantes referencias a obras francesas y expresa su agradecimiento a Dupin, Morin, Navier y otros, y sobre todo a Poncelet, cuya *Mécanique Industrielle* (plagiada) se había publicado en Bélgica en 1839.[15] En este libro, Poncelet no trata específicamente los estribos, pero había abordado problemas similares[16] en otras publicaciones y, en su época, se le consideraba uno de los ingenieros más importantes de Francia.[17]

Es inconcebible que Viollet-le-Duc ignorase la obra de estos ingenieros franceses, que estaban, según Moseley, más avanzados que sus colegas ingleses; Moseley ya incluyó en sus clases de 1840 a los estudiantes universitarios del King's College de Londres «...la teoría de los pilares, los muros soportados por contrafuertes y puntales, los estribos, los muros que soportan el empuje de las cubiertas y el peso de los forjados de las viviendas, y las estructuras góticas...».[18] Es difícil aceptar el comentario despectivo de Pol Abraham, citado por Frankl,[19] de «...que ni los arbotantes ni los pináculos eran necesarios. Más de una catedral francesa no tiene ninguno, y los adquirieron cuando las restauró Viollet-le-Duc».

Aún así, hay argumentos para dudar sobre la eficacia de los pináculos. A simple vista parece, y se confirma con los cálculos, que el pináculo tiene poca influencia en la estabilidad *general* del botarel. Abraham tiene razón cuando dice que un buen pináculo es el que pesa la centésima parte del peso total de un pilar.[20]

El efecto más importante de un pináculo no es en realidad la estabilidad del conjunto, sino que se localiza en la cabeza del botarel. La figura 5.3 muestra un botarel sin pináculo, y es evidente que, si la fuerza P transmitida por el arbotante se aparta mucho de la vertical, tenderá a producirse un fallo por deslizamiento. Para evitar esta rotura, el recurso más

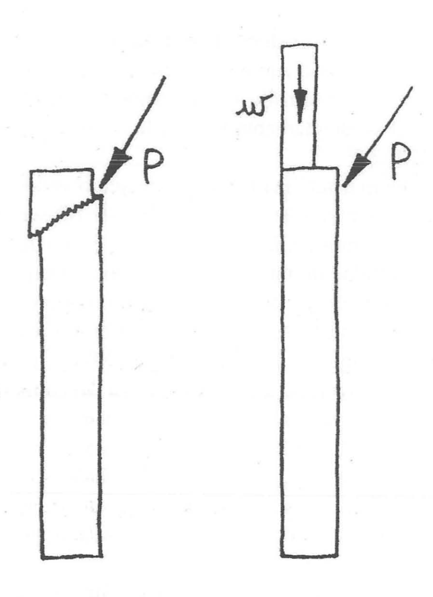


Figura 5.3 *(izquierda)*
Fallo por deslizamiento en la parte superior de un botarel en ausencia de pináculo

Figura 5.4 *(derecha)*
El peso del pináculo evita el fallo por deslizamiento

sencillo es añadir un peso *w* relativamente pequeño, figura 5.4, para incrementar la fuerza de rozamiento a lo largo de la posible línea de deslizamiento. Moseley, en el apartado «Las condiciones necesarias para que las piedras de un machón no deslicen entre sí»[21] muestra que los cálculos son sumamente sencillos.

El peso *w* en la figura 5.4, necesario para impedir el deslizamiento del botarel en el punto donde recibe al arbotante, puede, así, determinarse fácilmente, resultando que la posición de la línea de acción de *w* es indiferente. Por tanto no habría inconveniente, desde este punto de vista, en colocar el pináculo hacia el *exterior* del botarel donde su escaso efecto sobre la estabilidad *general* se podría reducir aún más.[22] La figura 5.5 muestra la sección transversal de la catedral de Reims según Viollet-le-Duc;[23] Fitchen[24] ha dado razones que justifican el empleo de dos arbotantes en vez de uno.

En su memoria original, Coulomb consideró los dos tipos de fallo, por deslizamiento y por formación de articulaciones. El estudio de los materiales no cohesivos conduce directamente a la ciencia de la mecánica del suelo de la que Coulomb es padre. Sin embargo, en lo tocante a las fábricas, señala que «el rozamiento en los materiales que se emplean en la construcción de bóvedas es a menudo lo bastante alto, como para que las dovelas no puedan deslizar nunca una sobre otra».[25] En el resto de este ensayo no se considera el peligro de fallo por deslizamiento, de modo que los mecanismos de colapso se limitan a los relativos a la «formación de articulaciones».

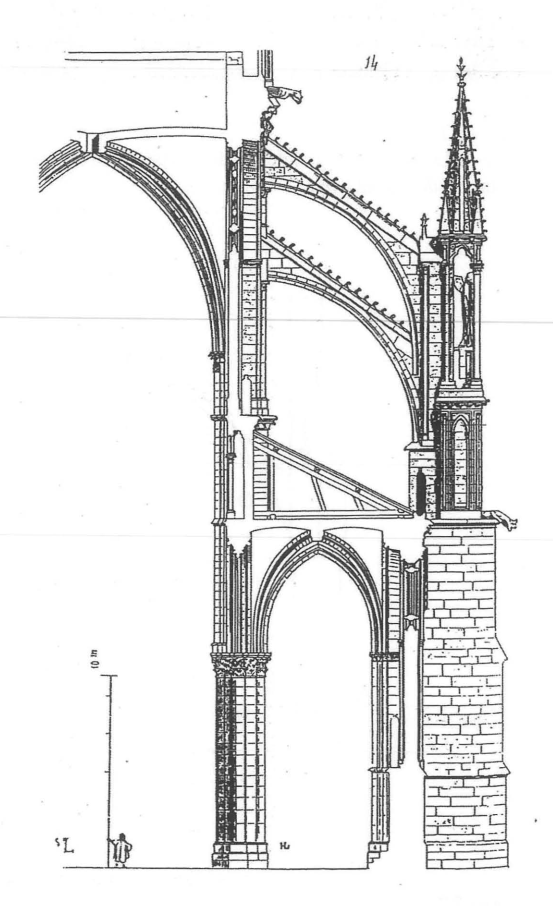


Figura 5.5
Pináculo masivo en Reims (Viollet-le-Duc)

La idea de un mecanismo de colapso se remonta al menos 200 años. Frézier[26] cita ensayos realizados por Danyzy en 1732, y sus figuras 235-240, reproducidas aquí en la figura 5.6, describen los resultados de ensayos con modelos de arcos realizados con dovelas independientes. La figura 5.7(a) muestra un arco idealizado de la misma manera sometido, además de a su propio peso, a una carga puntual de suficiente magnitud como para producir el colapso; la fábrica se ha agrietado en cuatro sitios, formando un mecanismo de «cuatro bielas», figura 5.7(b).

El arco de la figura 5.7 *tiene* que formar cuatro articulaciones para colapsar; tres o menos articulaciones no permitirían un movimiento de mecanismo. La situación de las articulaciones no es arbitraria, sirve para definir la línea de empujes dentro de la fábrica. La formación de *cuatro* articulaciones representa el *estado límite*, en el que sólo es posible encontrar una posición de la línea de empujes *totalmente dentro* del arco.

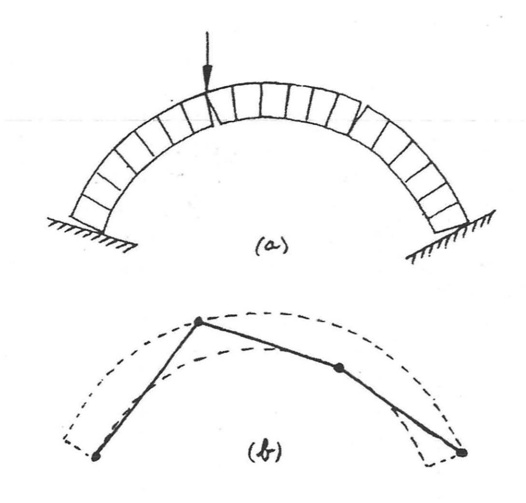


Figura 5.7
Mecanismo de colapso de un arco adovelado. Se precisan cuatro articulaciones

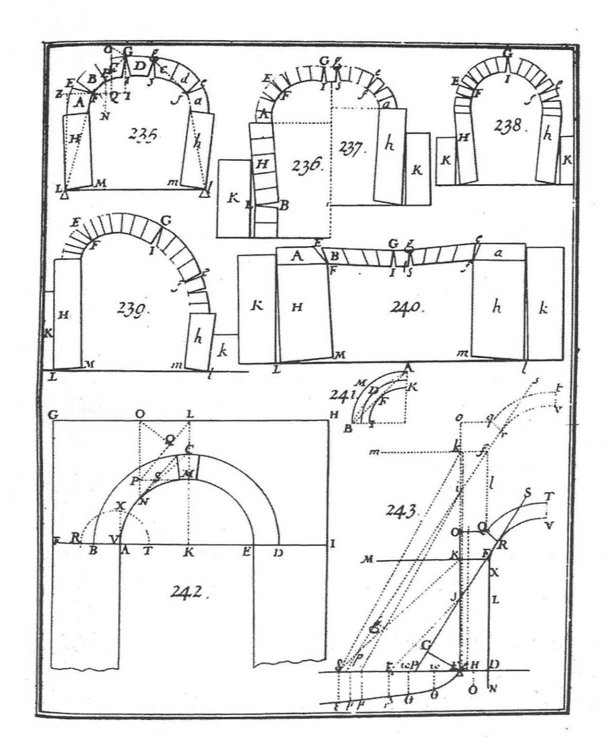
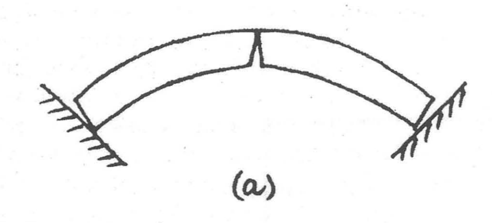


Figura 5.6
Ensayos de Danyzy con modelos de arcos. El colapso se produce por la «articulación» de las dovelas

En la figura 5.8(a), el arco se tiende entre dos estribos que se han separado ligeramente debido a su empuje. Para adaptarse al incremento de la luz, el arco se ha agrietado en *tres* sitios. Estas grietas son completamente inofensivas. Efectivamente, como no se puede proyectar una fábrica que ajuste *perfectamente* entre los dos estribos, este agrietamiento es inevitable; en realidad, se podría decir que el estado «agrietado» es el estado natural de la fábrica, aunque las grietas pueden ser tan pequeñas como para no verse, o estar cerradas por la elasticidad de la piedra. En la figura 5.8(b), los estribos se han acercado, y se precisa una configuración de grietas diferente. Sin embargo, una vez más, el arco es tan estable como si no se hubiese agrietado.



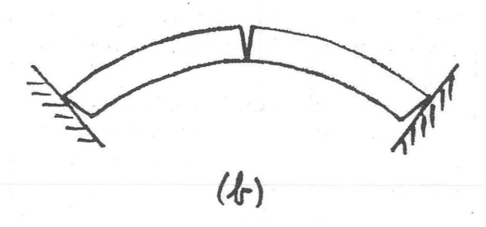


Figura 5.8
Arco adovelado entre estribos que salva una luz incorrecta: (a) demasiado grande, y (b) demasiado pequeña. En ambos casos el arco se agrieta en tres puntos

Estas afirmaciones se pueden demostrar con todo rigor[27] utilizando las técnicas del moderno análisis estructural desarrollado para la teoría plástica de las estructuras porticadas de acero.[28] La fábrica en cuestión no se limita a la construida con dovelas; sólo es preciso suponer (conservadoramente) que un conjunto de piedras es incapaz de resistir tracciones. Este supuesto equivale a ignorar la resistencia relativamente escasa del mortero, o considerar la obra construida «en seco». Más concretamente, el hecho de que la fábrica pueda formar grietas completamente inofensivas es lo que ha asegurado la supervivencia de las estructuras de piedra y es fácil demostrar, por ejemplo, que los pequeños asentamientos ocasionales de los cimientos de una estructura de piedra no provocarán por sí mismos su hundimiento.

Choisy comprendió todo esto con gran perspicacia: «...la bóveda nervada es, por así decirlo, flexible y deformable: los puntos de apoyo pueden sufrir asientos, los pilares inclinarse, ésta seguirá sus movimientos».[29] Frankl comenta: «Cuando un experto como Choisy decía esto, no es extraño que generaciones enteras de arquitectos y estudiosos del arte hayan seguido tranquilamente viviendo y teorizando bajo la influencia de Viollet-le-Duc, aunque todos sabían que los arcos perpiaños, los nervios y las bóvedas góticos no estaban hechos de goma».[30]

Un técnico en estructuras, al observar una catedral gótica, no verá un conjunto de pilares masivos, sino el esqueleto de la estructura constituido por las líneas medias de esos pilares; no verá una bóveda con espesor, sino una delgada cáscara de doble curvatura tendida entre las líneas medias de los nervios. Determinará en primer lugar las principales fuerzas que actúan sobre este modelo ideal, en el que los elementos estructurales reales se sustituyen por un esqueleto de espesor imperceptible, y las líneas de acción de las fuerzas deben, necesariamente, coincidir con el esqueleto. En el análisis final, sin embargo, puede ser preciso tener en cuenta el hecho de que la estructura real tiene un espesor finito; sin embargo, en la mayoría de los casos, este ajuste de los cálculos es trivial o incluso absurdo.[31]

Los pilares se pueden reducir a un esqueleto de líneas, rectas para los empujes verticales, curvas si también hay empujes horizontales; no obstante, la plementería de una bóveda se debe imaginar como una cáscara bidimensional de doble curvatura.[32] La teoría de cáscaras delgadas, o de la membrana, se ha desarrollado ampliamente durante los últimos años,[33] y se puede utilizar para determinar los esfuerzos principales en las bóvedas. Por ejemplo, las tensiones en una cáscara de curvatura continua sometida a su propio peso son del orden de $R\rho$, donde

R es el radio de curvatura local de la cáscara y ρ es el peso específico del material.[34] Antes de adjudicar valores numéricos a esta fórmula, hay que señalar que el valor del esfuerzo es independiente del espesor de la cáscara; al igual que para el pilar que colapsa por su propio peso, si se duplica el espesor de la cáscara se duplicarán las fuerzas gravitatorias, pero la superficie resistente también se duplica.

Una cáscara de doble curvatura tiene dos radios de curvatura y, en general, para determinar los esfuerzos, se necesitan ambos valores. Sin embargo, para tener una idea del orden de las magnitudes, será suficiente uno de ellos; una bóveda apuntada sobre una nave de 15 m de luz puede tener un radio de unos 10 m. Considerando un peso específico de la piedra ρ= 20 kN/m^3, el producto $R\rho$ será 0,2 N/mm^2, que puede compararse con una resistencia de rotura a compresión (para una arenisca) de 40 N/mm^2.

El estado tensional en la cáscara es tan bajo que la resistencia de la fábrica es, una vez más, irrelevante. Por tanto, la plementería de las bóvedas se construía «si era posible, con una piedra ligera»[35] y «las bóvedas de mampuestos con gruesas juntas de mortero eran... la norma».[36] La escasa resistencia de la toba, como en Canterbury, o del mortero de las juntas, carece de importancia.

Estas observaciones se aplican sólo a cáscaras de curvatura *continua*. En las intersecciones de las cáscaras (las aristas) se producen grandes concentraciones de tensiones, por lo que tienen que ser reforzadas. Un pliegue en una cáscara es, de hecho, una línea de debilidad; sin embargo, un pliegue *reforzado*, proporciona rigidez al conjunto de la cáscara. Por supuesto, hay contradicciones evidentes en lo tocante al cometido de los nervios, algunos de los cuales parecen muy pequeños, (por ejemplo en Reims); Porter cita la evidencia de Ourscamp,[37] en la que los nervios permanecen intactos a pesar de haber colapsado la plementería, y de Longpont, Aisne,[38] donde las plementerías se mantienen habiéndose desplomado los nervios. Porter utiliza ambos casos para apoyar su tesis de que los nervios eran mecanismos constructivos, útiles para ahorrarse cimbras durante la construcción, y tiene razón al señalar el hecho de que la bóveda nervada se puede «aplicar no sólo a los espacios rectangulares cuatripartitos sino también a plantas irregulares, a los compartimentos trapezoidales de un deambulatorio o una galería perimetral, a la bóveda semicircular de un ábside, o a la bóveda poligonal de una cabecera».[39] Sin embargo, Fitchen[40] critica la exclusiva preocupación de Porter por las consideraciones económicas, y proporciona argumentos convincentes:[41] «...la función de los nervios no sólo era la constructiva de determinar el contorno de los plementos de la bóveda, sino también la estética de cubrir la junta a lo largo de la arista, que se construía con la mayor simplicidad posible».

Por tanto el nervio, además de tener un cometido estructural como refuerzo de «pliegues» potencialmente débiles en las aristas, también posibilita tender la plementería de la bóveda con más facilidad, permite prescindir de gran cantidad de cimbras, y disimula las juntas mal aparejadas de las aristas. Por otro lado, el nervio se concebía para cumplir un cometido estético. Por tanto es lícito pensar que son todos estos cometidos los que constituyen la «función» del nervio.

No obstante, desde el punto de vista del análisis estructural, probar su funcionalidad es muy sencillo; un pliegue afilado en una cáscara producirá una gran concentración de tensiones y por tanto debe reforzarse con un nervio. Así, en una bóveda de crucería cuatripartita formada por la intersección de dos bóvedas de cañón (apuntadas o semicirculares) con líneas de clave a nivel, no habrá discontinuidades de la cáscara con los muros de la nave o con los arcos transversales. En estas circunstancias, ni los arcos formeros ni los perpiaños soportan más que su propio peso.

Por el contrario, los profundos pliegues diagonales, de agudeza creciente hacia los riñones de la bóveda, precisan refuerzo y los nervios cruceros surgen como elementos estructurales que realmente soportan toda la bóveda. Según cita Kubler,[42] estas conclusiones parecen idénticas a las extraídas por Marcel Aubert.[43] En particular, si el intradós de la bóveda no está a nivel, así como cuando cada tramo de la bóveda es marcadamente cupuliforme, por ejemplo, aparecerá una discontinuidad en el encuentro con los arcos perpiaños y Aubert «... también llegó a la conclusión de que las bóvedas cupuliformes necesitan unos arcos perpiaños de considerable tamaño...».[44]

El testimonio de Longpont, Aisne, donde las bóvedas sobrevivieron al hundimiento de los nervios cruceros, precisa una explicación que quizá se exprese mejor numéricamente. Para cubrir un vano rectangular de 15 m por 7,5 m se puede utilizar

una bóveda cuatripartita de 200 mm de espesor ligeramente apuntada;[45] esta bóveda, junto con los nervios, pesará unos 800 kN, y la cáscara principal tendrá unas tensiones de aproximadamente 0,15 N/mm². El máximo empuje en uno de los nervios cruceros será del orden de la cuarta parte del peso de la bóveda, unos 200 kN. Aceptando el factor de seguridad de Yvon Villarceau de 10 para una tensión de rotura a compresión de 40 N/mm², un nervio que trabaja a 4 N/mm², debe tener una sección transversal de 50.000 mm², si ha de soportar una fuerza total de 200 kN. Por tanto, un nervio de 250 mm de anchura y 200 mm de espesor parecería adecuado.

Estos cálculos se han realizado para el *esqueleto* de la estructura, pero se observará que un nervio de 250 mm por 200 mm se puede considerar contenido *dentro* de los 200 mm de espesor de la plementería de la bóveda principal. Si una bóveda de estas dimensiones se construye sin nervios, o con nervios que posteriormente colapsan, el análisis anterior indica que la tensión principal de la cáscara de, aproximadamente, 0,15 N/mm² se incrementará precisamente en el entorno de las aristas hasta alcanzar unos 5 N/mm². Se producirá por tanto una gran concentración de tensiones, pero puede ocurrir que la resistencia a rotura de la piedra sea tan alta (40 N/mm²), la intersección diagonal de los plementos suficientemente regular y el mortero suficientemente delgado y resistente, como para que no se produzca el colapso de la bóveda. En este caso la bóveda habrá tenido éxito, por así decirlo, al intentar construir sus propios nervios, y el técnico en estructuras, al observar una bóveda sin nervios, siempre verá el esqueleto en diagonal que define las principales líneas de transmisión de las fuerzas.[46]

Por el contrario, el ojo del técnico se irritará con los arcos perpiaños principales de la nave. Un ejemplo extremo de este particular se puede encontrar en la bóveda de abanico de la capilla del King's College, figura 5.9. La nave se proyectó en origen para una bóveda nervada cuatripartita, pero John Wastell la cubrió con la bóveda de abanico en 1512-1515.Las desmañadas intersecciones de los abanicos y los potentes arcos perpiaños, carentes de significado estructural, se combinan para detener la vista tramo a tramo, en vez de permitir una suave progresión a lo largo de la nave. Los pequeños nervios de los abanicos, adosados a una cáscara continua, no soportan ningún esfuerzo, pero sirven para definir visualmente la forma de la bóveda.

A modo de comentario adicional sobre la mecánica de la bóveda nervada, quizá se puede hacer referencia a la contribución de Conant[47] sobre las bóvedas sexpartitas de Notre-Dame de París. Su artículo trata, *inter alia*, la cuestión de si el sistema original de arbotantes se aplicaba o no sólo a tramos alternos. La figura 5.10 muestra esquemáticamente, según Fitchen, dos tramos completos (es decir cuatro tramos de la bóveda) de una bóveda sexpartita. Los pliegues de la cáscara señalan, como anteriormente, los nervios que son portantes; al igual que antes, los nervios

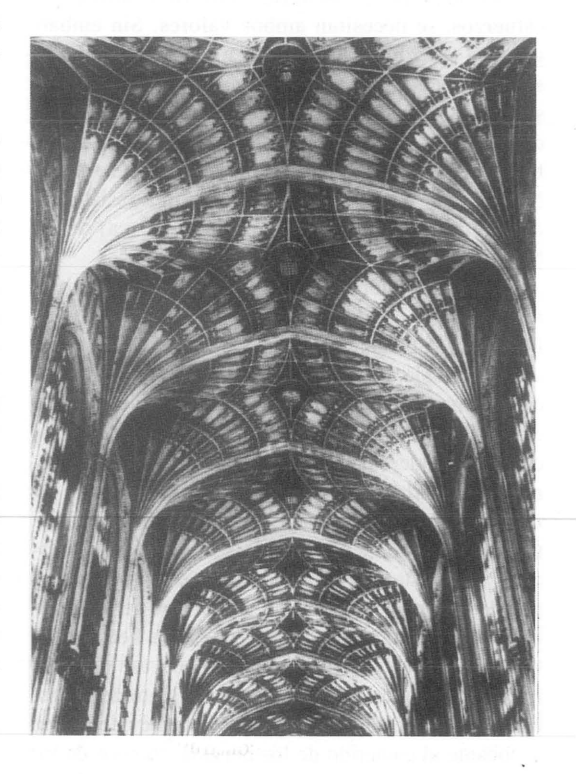


Figura 5.9
Capilla del King's College (bóveda de abanico de John Wastell). Los potentes arcos perpiaños son una reminiscencia de la intención original de construir una bóveda nervada

cruceros tienen que soportar grandes empujes y los arcos perpiaños principales sólo reciben su propio peso.[48] Sin embargo, los arcos perpiaños intermedios *sí* son portantes.

El empuje en un nervio tiene, por supuesto, una componente horizontal y otra vertical. La componente vertical carga sobre los pilares de la nave, y la horizontal se transmite a través de los arbotantes a los botareles. Sumando las componentes horizontales de los nervios cruceros, un sencillo cálculo muestra que el empuje horizontal en un arco perpiaño principal es aproximadamente tres veces mayor que en un arco perpiaño intermedio.[49] Si se hubiesen utilizado arbotantes en todos los tramos, principales e intermedios, el primero transmitiría aproximadamente el triple del empuje que el último. Por tanto, sería perfectamente

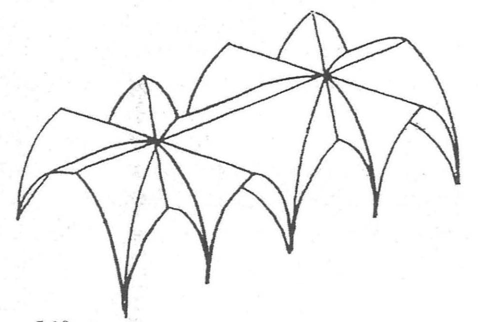


Figura 5.10
Esquema de una bóveda sexpartita (Fitchen)

posible prescindir de los arbotantes intermedios, siempre que se pudiera asegurar que «el empuje de la parte intermedia de la bóveda fuese soportado por los pequeños contrafuertes apilastrados del muro».[50]

Este breve análisis no pretende contestar a la pregunta de si Notre-Dame se construyó o no originalmente sin arbotantes intermedios. Sin embargo, ha demostrado que, en determinadas circunstancias, habría sido *posible* prescindir de ellos.

El énfasis en los bajos niveles de las tensiones en grandes zonas de las fábricas góticas no significa que estas tensiones sean pequeñas *en todas partes*. Efectivamente, el ejemplo de la bóveda nervada mostraba tensiones mucho mayores en los nervios. Análogamente, los pilares de la nave soportan mucho más que su propio peso; la «intención» del gótico es concentrar las fuerzas verticales de la bóveda y la gran cubierta en esbeltos pilares, haciendo de los muros superficies de vidrio no estructurales.

A pesar de ello, incluso los pilares soportan tensiones de trabajo, probablemente, de un orden de magnitud por debajo de la resistencia a rotura de la piedra. Los pilares y los nervios de las bóvedas son seguramente los elementos más cargados, con tensiones de, aproximadamente, la décima parte de la resistencia a rotura; después vendrían los arbotantes y, por último, los botareles, los muros autoportantes y la plementería, ésta última con una tensión de aproximadamente la centésima parte de la resistencia a rotura. La fuerte sobrecarga de una parte de la estructura, debida por ejemplo a la construcción de una torre o una aguja, o el diseño erróneo de una parte, que implicase la aparición en la fábrica de flexiones (y por tanto de tensiones de tracción) en vez de la compresión pura, podría conducir a un colapso relacionado directamente con su resistencia. No obstante, en condiciones normales, se concluye que el criterio de proyecto dominante es, más que la resistencia, la *estabilidad*.

La *estabilidad* de una estructura de fábrica se puede asegurar mediante la *proporción* adecuada de los diversos elementos que la componen; el espesor de la plementería debe ser una determinada fracción de la luz (y función de la curvatura), el diámetro del pilar de la nave debe tener cierta relación con su altura, el ancho del estribo será una fracción de su espesor, relacionándose ambas a su vez con la altura, etc. Este tipo de reglas son fundamentalmente numéricas, y la brillante exposición de Frankl de las fuentes del período gótico aclara perfectamente que eran precisamente proporciones numéricas las que importaban a los arquitectos medievales. Las reglas fragmentarias que aparecen en el manuscrito de Villard se pueden reducir a proporciones; el gran debate de 1392 en Milán trataba sobre las nociones *ad quadratum* y *ad triangulum*, y se resolvió con el consejo de un matemático (Stornaloco); el conjunto de críticas a Milán, igualmente famosas, a cargo de Mignot en 1399, se expresaba en términos de proporciones.

Como quiera que estas reglas numéricas se construyesen, los arquitectos medievales tenían razón al insistir en ellas. El conocimiento de la estática quizá podría haberles permitido construir reglas *mejores*, pero habrían sido reglas del mismo tipo, ya que la seguridad de sus estructuras depende de la estabilidad y no de la resistencia, y la estabilidad depende de la proporción.

Incluso el problema más sencillo (y básico) de la estática no se resolvió hasta finales del siglo XVI; el paralelogramo de fuerzas se atribuye generalmente a Simon Stevin, 1586.[51] Sin tener nociones claras sobre las fuerzas y sus líneas de acción,[52] los arquitectos medievales no tenían más opción que construir sus reglas en forma de proporciones. Para resolver cualquier problema de proyecto para el que no tuviesen reglas, debían aventurarse o hacer un modelo.

El empleo de modelos está perfectamente probado,[53] no sólo para resolver problemas geométricos (es decir problemas de estereotomía), sino también para simular la estructura real. Por ejemplo, el modelo de ladrillo y argamasa de San Petronio, Bolonia, tenía más de 18 m de largo, lo que supone un tamaño enorme. Un modelo como éste se puede utilizar con total seguridad para comprobar la estabilidad de toda o parte de la estructura real, ya que las cuestiones pertinentes a la estabilidad, dependen de las proporciones relativas y no del tamaño que, por tanto, puede variarse (manteniendo la forma) sin afectar a aquélla. Por el contrario, las cuestiones relativas a la resistencia sí dependen del tamaño; la ley del cuadrado-cubo demuestra que un modelo a pequeña escala presentará una resistencia engañosa.

Siempre que los arquitectos estuviesen dispuestos a experimentar, tanto con modelos como sobre el papel, se podía progresar. El gran grito de Mignot «Ars sine scientia nihil est» suena a nuestros oídos modernos como el inicio de una nueva era de la arquitectura, en la que la experiencia estaría firmemente reforzada por la teoría. Que no quería decir nada de eso lo expuso el propio Mignot quien, a finales del siglo XIV, estaba trabajando sin esa aparentemente fácil e intuitiva superioridad demostrada por los arquitectos de L'Ile-de-France en los siglos XII y XIII. Su *credo* implicaba en realidad que, en el futuro, cualquier desavenencia entre práctica y teoría se resolvería a favor de la teoría; y por teoría entiende esa *scientia*, esa pedantería de la palabra escrita, guardada en los misterios de las logias, cuya significación, aunque empírica, pasó cada vez más desapercibida para Mignot y sus sucesores. El manuscrito de Villard, ampliado con veneración por el Magister 2 y el Magister 3, y guardado celosamente en la logia, llegaría a tener una autoridad casi bíblica (o la autoridad igualmente alienante de la moderna normativa de la edificación), y quizá sea un símbolo de esa decadencia interna que aseguró la muerte del gótico en el Renacimiento.

6

La seguridad de los arcos de fábrica

El puente en arco adovelado de Pontypridd, terminado por William Edwards en 1751, se derrumbó en el curso de su construcción después de retirar las cimbras.[1,2] (El puente fue reconstruido con éxito en 1755 y ha sido considerado en más de una ocasión[3] como una obra maestra.) En realidad, el problema no se produjo por fallo de los estribos o por exceso de tensiones en la fábrica; el error estaba en la propia *forma* del puente.

Boistard hizo en 1800 una serie de veintidós ensayos sobre modelos de puentes de arcos de dovelas; los resultados están recogidos en un volumen editado diez años después por Lesage.[4] Las dovelas estaban hechas con dos ladrillos pegados entre sí formando un ligero ángulo (unos 3°) y se aparejaban en seco para formar arcos de diversas formas con una luz de 8 pies (Boistard, que trabajaba en París, anotó sus mediciones en el anticuado sistema de pies y pulgadas). En el primer ensayo, el arco era semicircular (de radio $R= 48$ pulgadas) el espesor de las dovelas en sentido radial era $t= 4$ pulgadas, de donde $t/R= 1/12$. Este arco se derrumbó inmediatamente después de descimbrar. En este modelo las tensiones eran considerablemente bajas y los apoyos eran sólidos; el colapso debe considerarse de nuevo como un problema geométrico antes que un problema de resistencia de materiales.

El presente artículo trata del análisis de la seguridad de los arcos de fábrica basada en su geometría. Es decir, se supone que el fallo de un arco no se inicia ni por fallo (aplastamiento) del material ni por fallo de los estribos. El análisis de algunos puentes existentes revela que los niveles tensionales que pueden alcanzarse en estas construcciones de fábrica son bajos, y puede concluirse que para las luces y formas usuales prácticamente no hay peligro de hundimiento debido a un exceso de solicitación del material.

No se trata aquí el tema de la resistencia de los estribos; sería imposible sacar conclusiones sin conocer la naturaleza del material que forma la cimentación y, en tal caso, el análisis correspondería a la mecánica de suelos o de rocas.

ALGUNAS NOTAS HISTÓRICAS

En realidad, el problema clásico de los arcos en el siglo XVIII fue precisamente el de su empuje sobre los estribos. La investigación detallada sobre el arco de dovelas en sí mismo sólo era de interés en la medida en que condujera a algún método para estimar el valor de dicho empuje. Por eso, los ensayos de Boistard[4] a finales de siglo se orientaron tan sólo en parte hacia la observación del comportamiento real del arco; también quería determinar experimentalmente el mínimo estribo necesario y obtener datos sobre las fuerzas que actúan sobre las cimbras durante el proceso constructivo.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The safety of masonry arches,» *International Journal of Mechanical Sciences* 11 (1969): 363-85. Traducción de Fernando Inglés Musoles.

Hay ensayos muy anteriores, realizados por Danyzy,[5] recogidos en 1737 en la obra de Frézier,[6] y los trabajos teóricos de La Hire,[7,8] Parent,[9] Bélidor[10] y Couplet,[11] entre 1695 y 1730, están dirigidos en su totalidad al problema de determinar el empuje de los arcos. El trabajo de todos estos autores muestra un desarrollo progresivo y se basa en la idea de que se puede obtener información sobre el empuje de los arcos considerando el estado límite de colapso del arco. En el curso de sus análisis, Couplet dio una solución extraordinariamente completa al problema, con nociones claras de las líneas de empuje, por una parte, y de los mecanismos de colapso, por otra; como se verá, ambas ideas dan la clave de la solución del problema en su totalidad.

No obstante, la contribución de Couplet fue ignorada y correspondería a Coulomb[12] en 1773 la labor de retomar el problema prácticamente de nuevo. El trabajo de Coulomb, contenido en una memoria que también se refería a la flexión de las vigas y sentaba las bases de la ciencia de la mecánica de suelos, fue también olvidado, aunque Bossut[13, 14] hizo algunas aportaciones adicionales, y todo ello sería reelaborado y asimilado en el voluminoso tratado de Gauthey[15] sobre la construcción de puentes.

Sin embargo, parece que Lamé y Clapeyron[16] redescubrieron por su cuenta la idea del mecanismo de colapso; en su memoria de 1823 sobre la estabilidad de una cúpula no mencionan a Coulomb. Como tampoco se refieren a la obra italiana, muy anterior, de los *tre mattematici*[17] o a la de Poleni,[18] que había hecho estimaciones de la estabilidad de la cúpula de San Pedro utilizando técnicas similares. Poleni en particular había «cortado» la cúpula en segmentos a efectos de su análisis estático, una técnica idéntica a la propuesta por Lamé y Clapeyron para la cúpula de San Isaac en San Petersburgo.

La división por Poleni de una cúpula en husos individuales muestra una extraordinaria perspicacia estructural, únicamente alcanzada en esta clase de trabajos por el artículo anterior de Gregory[19] sobre arcos (1697). Gregory descubrió que la catenaria era la forma correcta de un arco de sección constante que sólo soporta su peso propio, y estableció que cualquier otra forma de arco se sostendría únicamente si era posible que una catenaria estuviese contenida dentro de su espesor. Interpretando esta afirmación en términos de líneas de empuje, se trata —como se verá más adelante— de una precisa formulación previa del teorema del límite inferior de la teoría plástica.

En muchos de los primitivos métodos de cálculo está implícito un uso intuitivo de este teorema. Por ejemplo, el método inverso de Yvon Villarceau,[20] del que se hablará más adelante, hace que la línea central de las dovelas coincida con la línea de empujes de equilibrio. En los libros de Straub[21] y Timoshenko[22] se puede encontrar información más completa sobre éste y otros trabajos anteriores sobre arcos.

Más recientemente, Fleeming Jenkin[23] propuso un ingenioso modelo en el que se hacían «visibles» las líneas de empuje de un arco bajo diversas condiciones de carga; también se cita este trabajo en uno de los primeros textos modernos, el de Ewing[24] de 1899. Justo antes de la Segunda Guerra Mundial, Pippard et al.[25,26] hicieron ensayos sobre modelos de arcos y observaron la «articulación» de una dovela sobre otra; los resultados fueron interpretados a la luz de la teoría de la elasticidad, más que en términos de la teoría plástica que se estaba desarrollando justo en aquel momento.

PRINCIPIOS DEL ANÁLISIS LÍMITE EN LAS FÁBRICAS

Parece que la primera aplicación de los modernos teoremas del análisis límite al problema de la obra de fábrica se debe a Kooharian,[27] que actuaba a sugerencia de Drucker (ver también Prager[28]). Como se ha indicado en otro lugar,[29] se pueden aplicar a las fábricas las ideas de la teoría plástica convencional si se acepta que el material tiene las siguientes propiedades:

(1) *La piedra no tiene resistencia a tracción.* Aunque la piedra pueda tener en sí misma una cierta resistencia a tracción, las juntas entre dovelas pueden estar realizadas en seco o con morteros pobres. De ahí que la hipótesis sea equivalente a decir que no se pueden transmitir fuerzas de tracción a través de un macizo de fábrica. En consonancia con los principios de los teoremas del análisis límite (ver más adelante) esta hipótesis es «segura»; puede llegar a ser demasiado segura, es decir, irreal, si por ejemplo se traban las dovelas del arco con la fábrica sobre el trasdós de modo que se puedan transmitir esfuerzos locales de tracción a las piedras.

(2) *La piedra tiene una resistencia a compresión infinita.* Equivale a la hipótesis de que las tensiones en la fábrica son tan bajas que no hay peligro de

aplastamiento del material. Obviamente, la hipótesis va en contra de la seguridad, pero los errores que introduce en el análisis de cualquier estructura real del tipo aquí considerado son muy pequeños.

(3) *No se puede producir el fallo por deslizamiento.* Se supone que el rozamiento es lo bastante alto o que las dovelas están efectivamente trabadas entre sí de manera que no pueden deslizar unas sobre otras. Se ha citado en otro lugar[30] un ejemplo de posible fallo por deslizamiento, pero normalemente no tiene importancia.

Con estas hipótesis sobre el comportamiento del material y con las hipótesis estructurales habituales sobre pequeñas deformaciones, se pueden «traducir» para aplicarlas a los arcos de fábrica las ideas del cálculo plástico desarrolladas para pórticos metálicos (veáse, por ejemplo, Baker et al.[31]). La *condición de equilibrio* se satisface construyendo una línea de empujes en equilibrio con las cargas que actúan sobre el arco (incluido el peso propio). La *condición de estado límite* se satisface si tal línea de empujes está contenida dentro de la fábrica.

La regla del «tercio central» tiene aquí un carácter irrelevante, ya que se trata básicamente de un concepto elástico. El hecho de que la línea de empujes quede contenida en todos sus puntos dentro de la fábrica asegura que se puedan trasmitir fuerzas entre una sección transversal y la siguiente únicamente por medio de esfuerzos de compresión. En el límite, cuando la línea de empujes pase por la superficie de la fábrica, las acciones se transmitirán justo por la superficie, de modo que el resto de la sección transversal tendrá una tensión nula. La línea de empujes no puede pasar por fuera de la sección transversal, ya que ello requeriría desarrollar esfuerzos de tracción.

El *teorema de la seguridad* del cálculo plástico establece que, para demostrar que un arco es estable, tiene que ser posible construir una línea de empujes en equilibrio con todas las cargas que gravitan sobre el arco, que esté comprendida totalmente dentro de la fábrica. La potencia de este teorema radica en el hecho de que no es necesario que la línea de empujes considerada sea la línea de empujes *real*; la mera existencia de una sola de estas líneas proporciona una seguridad absoluta de que el arco no se hundirá. De hecho, el teorema de la seguridad ha sido siempre muy apreciado por el proyectista práctico, acostumbrado a realizar operaciones que proporcionen sistemas «razonables» de fuerzas a efectos del cálculo.

Como corolario inmediato del teorema de la seguridad, un pequeño asiento del arco, que puede producir un cambio considerable de la línea real de empujes, no puede desencadenar el colapso, ya que una línea de empujes que satisfaga el teorema antes del asiento lo hará también después del mismo. Este corolario, por supuesto, se basa en las hipótesis estructurales habituales de que las deformaciones son pequeñas; si los asientos son tan grandes como para modificar sensiblemente la geometría de toda la estructura, entonces la afirmación no tiene que ser necesariamente correcta. Este aspecto se estudia numéricamente en uno de los ejemplos que se dan más adelante.

En la situación límite en que la línea de empujes pase por la superficie de la fábrica, existe la posibilidad de que se produzca una articulación de una dovela sobre la siguiente. Si se producen suficientes articulaciones como para convertir el arco en un *mecanismo* (en el sentido habitual, por ejemplo, un mecanismo de cuatro bielas en el caso del arco), el hundimiento es posible. Por ello, para demostrar que un arco puede llegar a ser inestable, es necesario construir un esquema de articulaciones que corresponda a un mecanismo de colapso. Hay muchos elementos estructurales de fábrica (por ejemplo, un simple arbotante del tipo habitual con el trasdós recto) para el cual no es posible un esquema de articulaciones de este tipo; para tales estructuras, no se puede producir el colapso salvo en caso de fuertes cargas (que ocasionen la rotura por aplastamiento del material) o por descomposición de la cantería. Análogamente, muchas otras estructuras sólo se derrumbarán si se forma un conjunto de articulaciones correspondiente a un esquema altamente improbable de cargas, de modo que también aquí resulta imposible, a efectos prácticos, la formación de un mecanismo de colapso.

ALGUNOS EJEMPLOS SENCILLOS

Como ejemplo ilustrativo de «métodos fundamentalmente gráficos», Inglis[32] estudió el problema de un arco adovelado soportando una calzada horizontal (figura 6.1); se supone que el relleno es de densidad uniforme y que sólo produce carga vertical sobre la rosca del arco. Si se toma el origen de coordenadas en la superficie de la calzada sobre el eje de la directriz del arco y la ecuación de ésta es $y = y(x)$, la

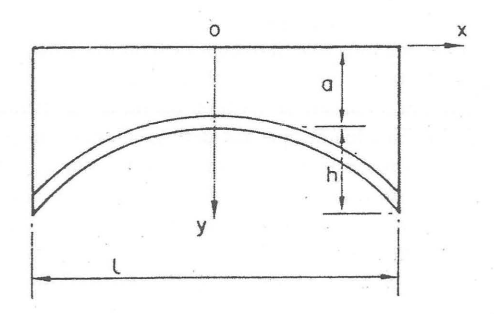


Figura 6.1
Arco de dovelas que soporta una calzada a nivel

magnitud de la carga por unidad de longitud horizontal será proporcional a y. El problema planteado por Inglis es el de determinar la directriz del arco de forma que coincida con la línea de empujes que resulta de la carga; la ecuación es

$$y = a \ \mathrm{ch}\left[\frac{2x}{l} \ \mathrm{arc\ ch}\left(\frac{a+h}{a}\right)\right] \qquad (1)$$

La ecuación (1) representa una familia de curvas de parámetro h; es decir, en un proyecto práctico se puede especificar la luz l y la altura total $a+h$, pero el propio valor de h puede ser elegido por el proyectista. Los arcos rebajados producen, por supuesto, fuertes empujes; la componente horizontal del empuje del arco definido por la ecuación (1) es inversamente proporcional al cuadrado de arc ch$(a+h)/h$.

Yvon Villarceau[20] desarrolló un método elaborado de proyecto de arcos similar en esencia al del sencillo ejemplo que acabamos de dar. Sin embargo, Yvon Villarceau admite sistemas de carga mucho más complejos y da tablas para la solución numérica de cualquier problema dado, paso a paso. Se hace coincidir la línea central de las dovelas con la línea de empujes calculada; Yvon Villarceau no pretende estar calculando la línea de empujes real sino sólo una de las posibles. Por otra parte, al hacer pasar la línea de empujes a través del centro de las dovelas está eligiendo de alguna forma el «más seguro» de los proyectos posibles. Tanto Inglis como Yvon Villarceau estaban utilizando intuitivamente el teorema de la seguridad del cálculo plástico, basando sus proyectos en la satisfacción de las condiciones de equilibrio y de límite, y sin recurrir a ningún tipo de noción de mecanismo de colapso.

Los cálculos de Yvon Villarceau pueden parecer innecesariamente precisos en la actualidad, pero ciertamente sus tablas siguen siendo válidas. Él mismo recalculó teóricamente algunos puentes existentes, incluido el Pont d'Iéna (Lamandé, 1809). Este puente de cinco vanos tiene cerca de 3 m de flecha por cada vano de 25 m de luz, y la relación de h/a es de cerca de 2. El perfil exacto calculado por Yvon Villarceau difiere del perfil dado por la «fórmula de Inglis» —ecuación (1)— en una distancia máxima de unos 20 mm; por supuesto, es imposible construir un arco de fábrica cuyo perfil pueda garantizarse hasta ese extremo después del descimbrado y subsiguiente asentamiento.

Como se ha dicho, la mejor forma para un arco de dovelas que soporte únicamente su peso propio es la de una catenaria invertida. El espesor real del arco teóricamente no importa, supuesto que la directriz se ajusta a la línea de empujes. Del mismo modo, la expresión del «arco de Inglis» —ecuación (1)— no hace intervenir el espesor del arco. En la práctica, sin embargo, es evidente que un arco muy delgado, aunque teóricamente estable, estaría a merced de las cargas accidentales que pudieran incidir sobre él, deformando la línea de empujes de manera que ya no se ajustaría a su directriz. A la inversa, pequeñas imperfecciones geométricas pueden distorsionar la directriz de modo que ya no se ajuste a la línea de empujes. En ambos casos, se alcanzará un punto límite en el que la línea de empujes quedará contenida estrictamente dentro de la fábrica. En esta situación límite, se formará un número suficiente de articulaciones (en las secciones en que la línea de empujes alcanza la superficie de la fábrica) como para transformar el arco en un mecanismo.

Estas ideas quizá puedan ilustrarse mejor con el análisis de un de arco circular del tipo ensayado por Boistard,[4] que se vino abajo tras el descimbrado. La figura 6.2(a) muestra un arco circular «grueso» para el que se ha dibujado una posible línea de empujes (se supone que el arco sólo está soportando su propio peso). Una porción del arco como la dibujada en la figura 6.2(b) estará en equilibrio bajo las fuerzas indicadas; por simetría, la dirección del empuje en la clave es horizontal. La línea de empujes de la figura

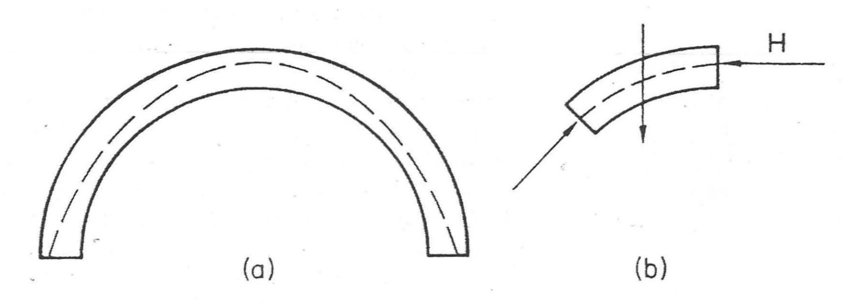


Figura 6.2
Arco semicircular

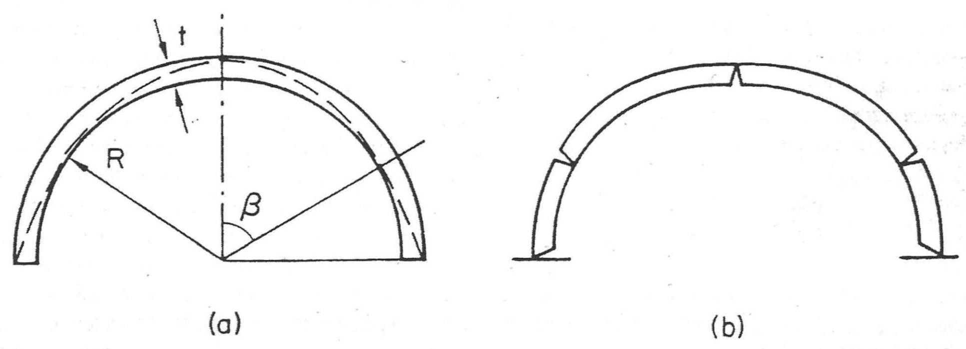


Figura 6.3
Arco semicircular de espesor mínimo

6.2 cabe holgadamente dentro de la fábrica y se puede reducir el espesor del arco sin incumplir esa condición.

En la figura 6.3 se dibuja a escala aproximada el caso límite, a partir del cual resulta imposible seguir reduciendo el espesor. La línea de empujes indicada en la figura 6.3(a) es tangente al trasdós en la clave, pasa también por el trasdós en los arranques y toca al intradós en los riñones. En la figura 6.3(b) se muestra el correspondiente mecanismo de colapso (con una articulación más de las que serían necesarias teóricamente, debido a la simetría del arco).

El problema principal es determinar la esbeltez t/R del arco en esta situación límite; un problema previo es el de determinar la posición de las secciones transversales (definidas por β en la figura 6.3) en que se forman las articulaciones del intradós. La Hire[8] había estudiado este problema en 1712; Bélidor[10] lo eludió suponiendo $\beta = 45°$, valor que también utilizó Couplet.[11] Para el arco de medio punto, resulta que β tiene un valor de cerca de 59°, pero la esbeltez t/R buscada depende muy poco del valor real de β. (Coulomb[12] había comentado ya esta «indiferencia» de los cálculos respecto a la posición precisa de la articulación dentro del intradós.)

El problema representado en la figura 6.3 es fundamentalmente geométrico. Se puede obtener una solución considerando el equilibrio estático de los segmentos de arco de la figura 6.3(a), introduciendo en ellos fuerzas similares a las indicadas en la figura 6.2(b). Se puede demostrar que el valor correcto de β resulta de resolver la ecuación (2):

$$\frac{(\beta\,\text{cotg}\beta)(2\beta\cos\beta + \text{sen}\beta\cos^2\beta + \text{sen}\beta)}{2\beta\cos\beta + \text{sen}\beta\cos^2\beta - \text{sen}\beta\cos\beta} = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

La ecuación (2) se puede resolver numéricamente para obtener un valor de $\beta = 58°49'$; se puede calcular entonces la esbeltez buscada t/R a partir de:

$$\frac{t}{R} = 2\frac{(\beta - \text{sen}\beta)(1 - \cos\beta)}{\beta(1 + \cos\beta)} \quad (3)$$

Se puede demostrar que la componente horizontal del empuje (es decir, H en la figura 6.2(b)) es proporcional a $\beta\,\text{cotg}\,\beta$.

Como alternativa, el análisis se puede hacer también, aunque con un desarrollo algebraico mucho más complejo, escribiendo la ecuación del trabajo para un pequeño desplazamiento del mecanismo de la figura 6.3(b). Una articulación de fábrica del tipo aquí considerado no desarrolla ningún trabajo, de modo que el trabajo total de las cargas que actúan sobre el arco (peso propio) debe ser cero. Así, la ecuación del trabajo nos proporcionará una relación única entre t/R y β. Debe elegirse el valor de β para maximizar el valor de t/R, y esta condición nos lleva finalmente a la solución correcta.

Se puede repetir todo el análisis para un arco circular rebajado, de ángulo total de apertura 2α en la figura 6.4. La ecuación (3) no cambia, pero el valor de β se determina a partir de una nueva ecuación (2), en la que el término de la derecha, $\pi/2$, se reemplaza por la expresión $\alpha\,\text{cotg}\,{}^1/_2\alpha$. Para valores pequeños de α, la solución de la ecuación (2) corregida es aproximadamente $\beta = \alpha/\sqrt{2}$ y efectivamente, la relación β/α está comprendida entre 0,71 y 0,65 en todo el intervalo $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. La figura 6.5 presenta el espesor mínimo necesario de un arco para distintos valores de α.

Para $\alpha = 90°$, que corresponde al primer ensayo de Boistard,[4] el valor necesario de t/R es de 0,106 (Couplet[11] había calculado $t/R = 0{,}101$ empleando $\beta = 45°$ en lugar del valor correcto de $58°49'$). El arco de Boistard tenía $t/R = {}^1/_{12}$, de modo que era previsible el colapso observado al descimbrar.

LA SEGURIDAD DE LOS ARCOS

Para el problema ideal recién analizado de un arco circular, los valores límite de la figura 6.5 corresponden a arcos que se sostienen estrictamente bajo su peso propio. Si los arcos fueran ligeramente más esbeltos, se derrumbarían. Recíprocamente, los arcos ligeramente más gruesos nunca se hundirán. No obstante, como se dijo antes, un arco que sea sólo ligerísimamente más grueso que el mínimo teórico puede fallar si tiene pequeñas imperfecciones geométricas, y será muy sensible a pequeñas variaciones de la sobrecarga.

En consecuencia, se puede adoptar como una medida de la seguridad del arco la relación entre el espesor real del arco y el mínimo teóricamente necesario para contener la línea de empujes. Por ejemplo, el arco circular del modelo de Boistard tenía una esbeltez

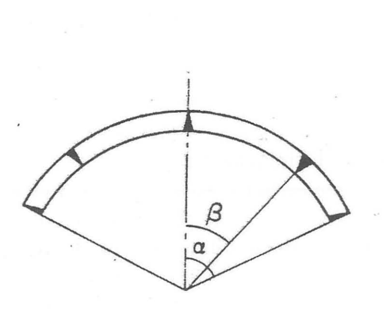


Figura 6.4
Arco circular rebajado

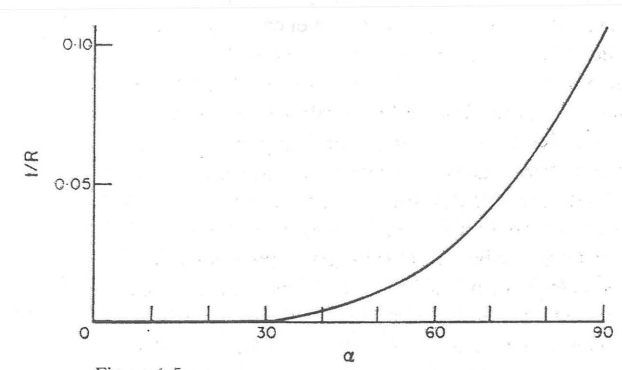


Figura 6.5
Espesor mínimo de arco circular rebajado

t/R= 1/12= 0,0833. Para un arco de 120° de apertura (α = 60°, figura 6.4), el valor teórico mínimo de t/R es 0,0226 (figura 6.5). Por ello, se puede decir que el modelo de Boistard tiene en este caso un «coeficiente geométrico de seguridad» de 883/226= 3,58.

Sin embargo, para asegurar un margen adecuado a la estabilidad de un arco determinado no será suficiente, en general, con establecer un valor razonable para el coeficiente geométrico de seguridad. Como ejemplo trivial, puede suceder que la línea central de las dovelas haya sido proyectada para que coincida exactamente con la línea de empujes (p. ej. Inglis,[32] o Yvon Villarceau,[20] o la catenaria invertida de Gregory[19]). En tal caso, el coeficiente geométrico de seguridad para la carga dada es infinito, independientemente del espesor, si bien un arco delgado, aunque tenga la forma adecuada, será potencialmente inestable a efectos prácticos. Por ello, un segundo patrón de seguridad puede ser la medida de la resistencia de un arco frente a sobrecargas (digamos una carga puntual añadida).

En la práctica, podría combinarse esta prueba con la geométrica. Por ejemplo, se podría elegir un valor adecuado de sobrecarga puntual y determinar a partir de él el espesor mínimo del arco que contenga la línea de empujes correspondiente a la combinación de la carga original y la sobrecarga. Más adelante se dan ejemplos de este tipo de análisis.

Finalmente, se podría idear una prueba de resistencia. Aunque se ha supuesto de entrada que los valores de tensión son bajos, puede ser necesario comprobarlo en un caso determinado. Para puentes de grandes luces, por ejemplo el de Gladesville,[33] puede suceder incluso que la tensión admisible se convierta en el criterio determinante. En el caso de los arcos límite de la figura 6.5, para los cuales la línea de empujes se aproxima a la superficie de la fábrica, la tensión crecerá localmente hasta valores muy altos aún cuando los valores *medios* sean bajos. No obstante, se puede adaptar el concepto de coeficiente geométrico de seguridad para contar con un margen automático de seguridad para las tensiones. Es decir, si los valores medios de tensión que resultan de las cargas reales actuando sobre el arco teóricamente reducido son admisibles, también lo serán *a fortiori* para el arco real. A este respecto, Yvon Villarceau defendía el uso de un coeficiente de seguridad de 10 para las tensiones; las tensiones de servicio en la fábrica no deberían exceder de un décimo de la resistencia de rotura a compresión.

Ilustraremos estas pruebas de seguridad con algunos cálculos de arcos reales. Sin embargo, puede que las ideas queden más claras haciendo referencia a un ejemplo altamente idealizado. Supongamos que el peso propio de un arco está concentrado en dos cargas puntuales W, figura 6.6; el arco tiene una luz $3l$ y una flecha h, tal como se indica. La línea de empujes se compone de tres segmentos y se supone que se ha construido el arco a base de tres tramos rectos, cada uno de espesor vertical t. (Esta hipótesis de espesor vertical constante facilita los cálculos que siguen; analizaremos el caso de espesor variable más adelante, en el ejemplo del Ponte Mosca.) El empuje horizontal en los apoyos del arco tiene el valor $H= Wl/h$, como se puede deducir de la figura 6.7.

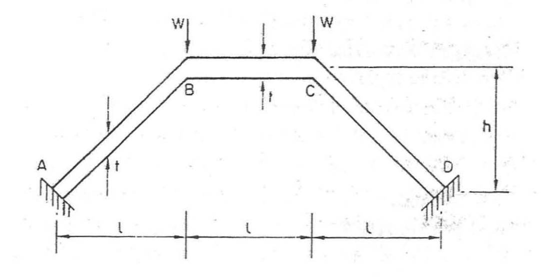


Figura 6.6
Arco idealizado para dos cargas puntuales

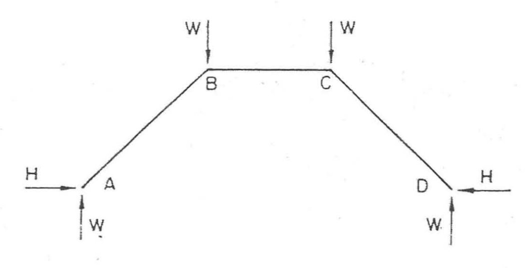


Figura 6.7
Directriz del arco idealizado

Suponiendo infinita la resistencia del material del arco, se puede reducir teóricamente su espesor real desde t hasta cero; el coeficiente geométrico de seguridad es infinito. Sin embargo, supongamos ahora que aplicamos una sobrecarga P sobre el tramo BC de la figura 6.8. La línea de empujes que corresponde a la combinación de cargas ya no coincidirá con la directriz del arco original; en la figura 6.8 se representa una de las posiciones posibles. De hecho, se trata de una posición muy especial, única; se ha dibujado la línea de modo que su separación máxima respecto a la directriz del arco sea e.

Un arco de espesor $2e$ contendría justo esta línea de empujes, de modo que el coeficiente geométrico de seguridad sería $t/2e$. El problema analítico a discutir ahora es la determinación del valor de e para valores dados de W y P.

Desde el punto de vista de la teoría clásica, el esquema de la figura 6.8 representa el diagrama de momentos flectores del arco para las cargas W y P. Es decir, si se multiplica el valor de la componente horizontal del empuje por la distancia vertical en cada punto entre la directriz y la línea de empujes, se obtiene el valor del momento flector en cada sección. Pero en un arco se puede definir el momento flector en relación con su directriz; si la línea de empujes tiene una excentricidad e y el empuje tiene valor N, el momento flector vale Ne. Siempre que e sea menor que $t/2$, figura 6.9(a), las dovelas permanecerán en contacto; para $M = \pm Nt/2$ se formará una articulación, lo que lleva a la *superficie de estado límite* de la figura 6.9(b) (utilizando un concepto habitual en cálculo plástico).

En el caso límite de la figura 6.8, por tanto, si el espesor del arco es justamente el necesario para contener la línea de empujes, se formarán cuatro articulaciones que convertirán el arco en un mecanismo. Resulta conveniente utilizar la forma habitual de operar en el cálculo plástico aplicado a pórticos metálicos. La figura 6.10 presenta el problema del «pórtico metálico» análogo al problema de la fábrica de la figura 6.8; el arco tiene tres vínculos hiperestáticos, lo que confirma la necesidad de cuatro articulaciones plásticas para producir un mecanismo de colapso. Llamaremos M_p al momento plástico último que actúa en las articulaciones de la figura 6.10; nótese que el valor de M_p es el mismo en las cuatro articulaciones, ya que se han igualado los valores de e en la figura 6.8. Para un arco de espesor variable

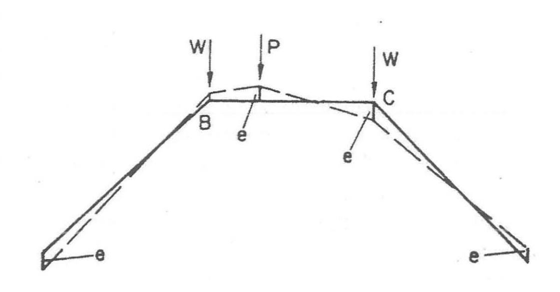
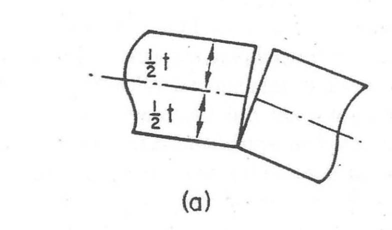


Figura 6.8
Línea de empujes debida a una carga puntual móvil



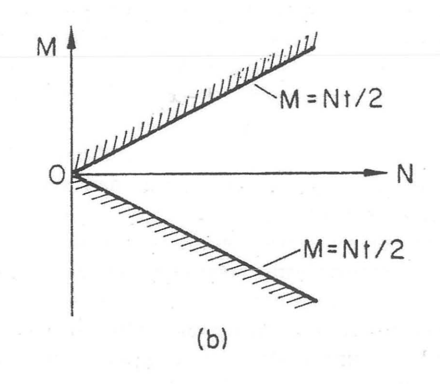


Figura 6.9
Superficie de estado límite para construcción adovelada

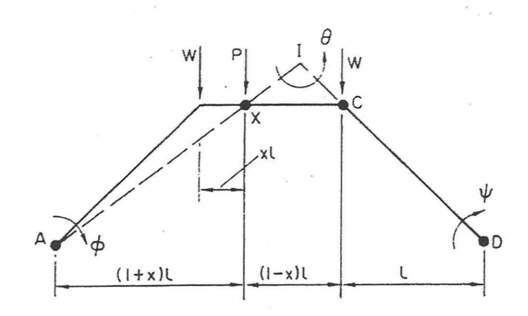


Figura 6.10
Mecanismo de rotura para arco idealizado

(que se traduce en valores variables de excentridad) los valores correspondientes de M_p diferirían de una articulación a otra; veáse el ejemplo del Ponte Mosca más adelante.

Plantearemos ahora la hipótesis de que la excentricidad e de la figura 6.8 es muy pequeña en comparación con las dimensiones generales del arco, de modo que podemos estudiar el mecanismo de la figura 6.10 con la suficiente precisión suponiendo que las articulaciones se sitúan exactamente en la directriz del arco. Se puede describir el movimiento del mecanismo como una rotación de magnitud θ del tramo XC alrededor de su centro instantáneo de rotación I. Se puede demostrar que los giros ϕ y ψ de la figura 6.10. están dados por

$$\phi = \psi = \theta \frac{1-x}{2+x} \qquad (4)$$

de modo que el trabajo desarrollado por la carga en un pequeño movimiento del mecanismo sería

$$P(1+x)l\phi + Wl\phi - Wl\psi \qquad (5)$$

Los términos en W de la ecuación (5) se anulan en virtud de la ecuación (4). Ello no es casualidad y, de hecho, tiene una importancia crucial para el método analítico desarrollado en este trabajo. Dado que la línea media del arco coincide con línea de empujes de la carga permanente *cualquier* pequeño desplazamiento (sin deformación axial) no longitudinal resultará en un trabajo virtual cero para esas cargas. Por ello, un mecanismo del tipo dibujado en la figura 6.10 referido a la línea de empujes de la carga permanente, sólo implicará a los términos del trabajo cuando se trate de sobrecargas adicionales.

La rotación total de las articulaciones de la figura 6.10 es $2(\theta+\phi+\psi)$, de modo que, utilizando la ecuación (4) e igualando el trabajo desarrollado por las cargas, expresión (5), al trabajo disipado en las articulaciones, se obtiene que

$$M_p = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1-x^2}{4-x}\right) \qquad (6)$$

El valor máximo de M_p tiene lugar en $x = 4-\sqrt{15} = 0{,}127$ y es igual a

$$M_p = Pl(4-\sqrt{15}) = 0{,}127\ Pl \qquad (7)$$

Sólo queda calcular la excentricidad e de la figura 6.8 que corresponde al valor M_p dado por la ecuación (7). Para la mayoría de los casos se obtendrá en este cálculo la precisión suficiente utilizando únicamente el empuje horizontal que corresponde a la *carga permanente*, es decir, el valor $H = Wl/h$ de la figura 6.7. Dado que, por definición,

$$M_p = He \qquad (8)$$

la ecuación (7) permite obtener el valor,

$$e = 0{,}127 \frac{P}{W} h \qquad (9)$$

(Introduciendo algunos valores usuales, digamos h= 3 m, W= 10 MN, P= 1 MN, se obtiene para e un valor de algo menos de 40 mm. Para valores de e/h en torno al 1%, se introduce un error muy pequeño trabajando con la directriz, como se hizo en los cálculos que corresponden a la figura 6.10, en lugar de situar exactamente los puntos de articulación en el trasdós y en el intradós del arco ficticio de espesor mínimo.)

El «método del trabajo» utilizado parece tener algunas ventajas, puesto que se apoya en conceptos básicos del cálculo plástico convencional. Sin embargo, no resulta realmente adecuado para arcos de mayor complejidad geométrica, en los que la solución se obtiene mucho más fácilmente gráficamente. En el método gráfico se pueden ignorar totalmente las cargas permanentes, ya que se ha demostrado que no intervienen en los cálculos.

En el caso que acabamos de comentar, por tanto, para calcular el valor de M_p en las articulaciones de la figura 6.10, basta con determinar la acción de una carga puntual P aislada. En la figura 6.11 se ha situado la línea de empujes para que resulten cuatro momentos flectores iguales, como antes. En general, este proceso se haría mediante tanteos; a partir de la mera geometría de la figura 6.11 se deduce que

$$\frac{2e'}{h} = \frac{1-x}{2-x} \qquad (10)$$

Del estudio estático de la línea de empujes, que para mayor claridad se muestra por separado en la figura 6.12, se deduce que

$$H'h = Pl\,\frac{(1+x)(2-x)}{(4-x)} \qquad (11)$$

de modo que, despejando de las ecuaciones (10) y (11),

$$H'e' = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1-x^2}{4-x}\right) \qquad (12)$$

El término $H'e'$ es el valor de M_p que estamos buscando y, como se puede comprobar, las ecuaciones (6) y (12) son idénticas; se puede continuar el proceso como antes.

Como segundo ejemplo teórico estudiaremos el cálculo de un arco parabólico y aprovecharemos la ocasión para utilizar valores que tengan relación con los de un puente real. El arco parabólico resulta, por supuesto, de una carga uniformemente repartida en horizontal; supondremos que el arco tiene una luz $2l$ y una flecha h (figura 6.13). Si se considera ahora el efecto de una carga adicional, las articulaciones de la figura 6.13 muestran el modo de colapso; el análisis posterior del arco de Lincoln indicará otro mecanismo posible, pero el de la figura 6.13 es el caso más desfavorable para el arco parabólico.

Tratando de nuevo el problema como un ejercicio de cálculo plástico simple, el valor de M_p que corresponde al mecanismo de la figura 6.13 viene dado por

$$M_p = \frac{Pl}{2}(1-x)\,\frac{(1+x)^2}{(3-x)^2} \qquad (13)$$

Esta expresión tiene un máximo para $x = 5-\sqrt{20} = 0{,}528$, es decir, para una carga situada aproximadamente en el cuarto de la luz; el valor máximo es

$$[M_p]_{máx} = \frac{Pl}{2}(5\sqrt{5}-11) = 0{,}0902Pl \qquad (14)$$

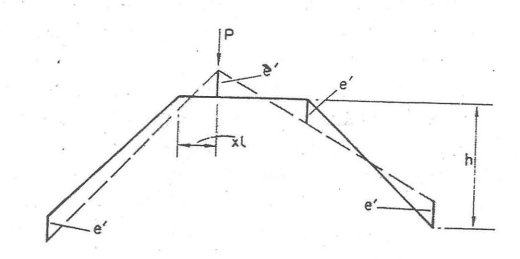


Figura 6.11
Línea de empujes para carga puntual

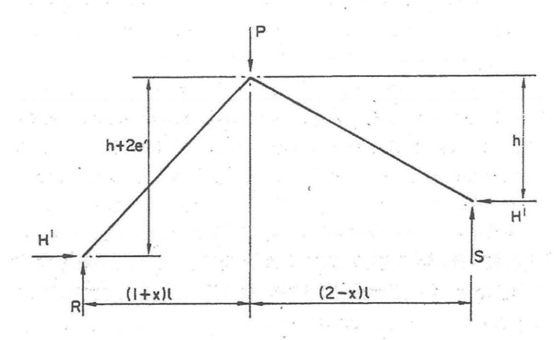


Figura 6.12
Geometría de la línea de empujes

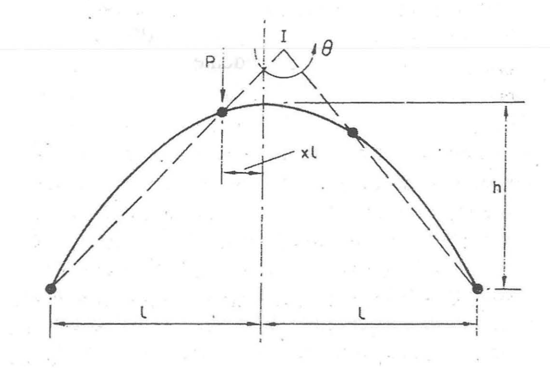


Figura 6.13
Arco parabólico

Como antes, se podría haber obtenido este resultado numérico gráficamente dibujando una línea de empujes similar a la del arco poligonal de la figura 6.11.

Supongamos que se va a proyectar un puente en arco para soportar una carga uniformemente repartida de 1.500 kN (por metro de ancho de puente) sobre una luz de 24 metros con una flecha de 3 metros. Se considerará también una sobrecarga puntual de 100 kN (por metro de ancho de puente). Se pide el espesor (constante) de las dovelas, utilizando un coeficiente geométrico de seguridad de 8 y un coeficiente de seguridad de 10 para las tensiones. (Se usan estos valores a efectos ilustrativos, lo que no quiere decir que se recomienden como los más adecuados para esta clase de puente.)

Dado que la línea de empujes de las cargas permanentes es parabólica, haremos que la directriz del arco sea también parabólica. El valor básico del empuje horizontal viene dado por $Hh = Wl/4$, es decir, $H = 1.500$ kN. De la ecuación (14) resulta que el valor de M_p es (0,0902)(100)(12) = 108,2 kN. Por ello, la excentricidad e de la línea de empujes viene dada por $e = 108{,}2/1.500 = 0{,}0722$ m; un arco de 0,144 m de espesor contendría justo la línea de empujes. Aplicando el coeficiente geométrico de seguridad de 8, se obtiene un espesor de dovelas de 1,15 m, si se impone el criterio geométrico.

Si las dovelas se hacen con una arenisca que tenga una resistencia media a rotura por compresión de 40 MN/m^2 (N/mm^2), el empuje básico requeriría un espesor de dovelas de

$$1.500/40.000 = 0{,}0375 \text{ m}$$

Aplicando el coeficiente de seguridad de 10 para las tensiones, el espesor del arco debería ser al menos de 0,375 m y resulta evidente que en estas circunstancias, la condición de resistencia no es tan estricta como la geométrica. De hecho, con un espesor de dovelas de 1,15 m resultaría una tensión media debida a la componente horizontal del empuje de 1,50/1,15= 1,30 MN/m^2, a comparar con la resistencia de rotura a compresión de 40 MN/m^2; el coeficiente de seguridad es mayor de 30. (Por supuesto, el empuje real en los apoyos sería algo mayor que la componente horizontal. No obstante, en la práctica, se suele incrementar el espesor de las dovelas desde la clave a los arranques.)

Aplicaremos ahora las ideas desarrolladas hasta aquí a dos arcos reales, de los cuales el primero (el de Lincoln) es particularmente sencillo aunque asimétrico y el segundo (el Ponte Mosca de Turín) ofrece datos fácilmente accesibles.

La seguridad de dos puentes

(a) *Lincoln*

Entre las dos torres occidentales de la catedral de Lincoln y justo encima de la bóveda de la nave, hay un ligero arco de piedra[34,35] del siglo XIII, cuya luz es de 8,54 m (figura 6.14). El apoyo del lado norte del arco está unos 300 mm más bajo que el del lado sur, debido al parecer a un asiento, y la flecha del arco, referida a la cuerda, es de 380 mm, según se midió en 1836. La sección transversal del arco es constante, prácticamente rectangular, de unos 500 mm de ancho y 280 mm de espesor. Las enjutas del arco tienen hiladas de piedra, que se supondrá contribuyen a la carga pero no a la transmisión de empujes.

La función de este arco no está clara;[36] puede haber servido como punto de replanteo para la construcción de la bóveda de la nave en 1240–50.

En la figura 6.15 se ha dibujado la directriz del arco, ampliando por 6 la escala vertical; se observará que el arco tiene dos centros y es apuntado. Se muestra también en la figura 6.15 una posible línea de empujes para la combinación de peso propio del arco y carga sobre los riñones.

En la figura 6.16 se muestra un detalle ampliado del extremo izquierdo del arco; si se toma el origen de coordenadas en el arranque (en la directriz del arco), la línea de empujes pasará por debajo del mismo a una distancia vertical Δ. En cualquier otra sección del arco, por ejemplo la del punto A, la distancia vertical entre la directriz del arco y la línea de empujes viene dada por $\epsilon_A = y_A - h_A$, donde las distancias se miden como en la figura 6.16.

Si la carga vertical (no uniforme) que actúa sobre el segmento OA del arco tiene un valor w por unidad de longitud horizontal, el equilibrio estático exige que

$$(h_A + \Delta)H + \int_0^{x_A} (x_A - z)w\,dz = Vx_A \qquad (15)$$

o bien,

$$h_A = -\Delta + \frac{V}{H}x_A - \frac{1}{H}\int_0^{x_A} (x_A - z)w\,dz \qquad (16)$$

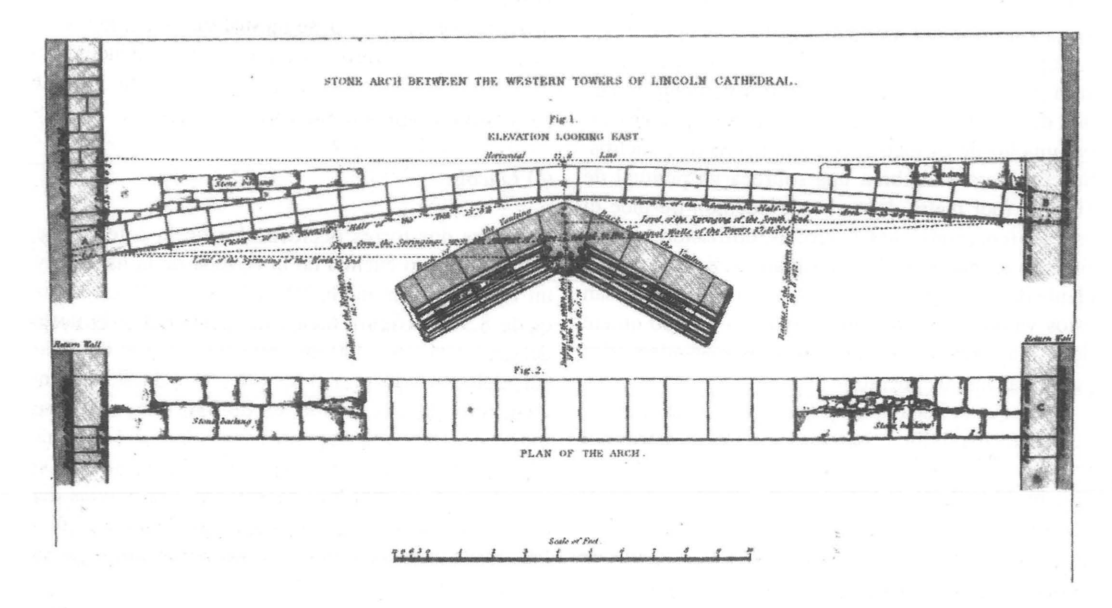


Figura 6.14
Arco de piedra en la catedral de Lincoln

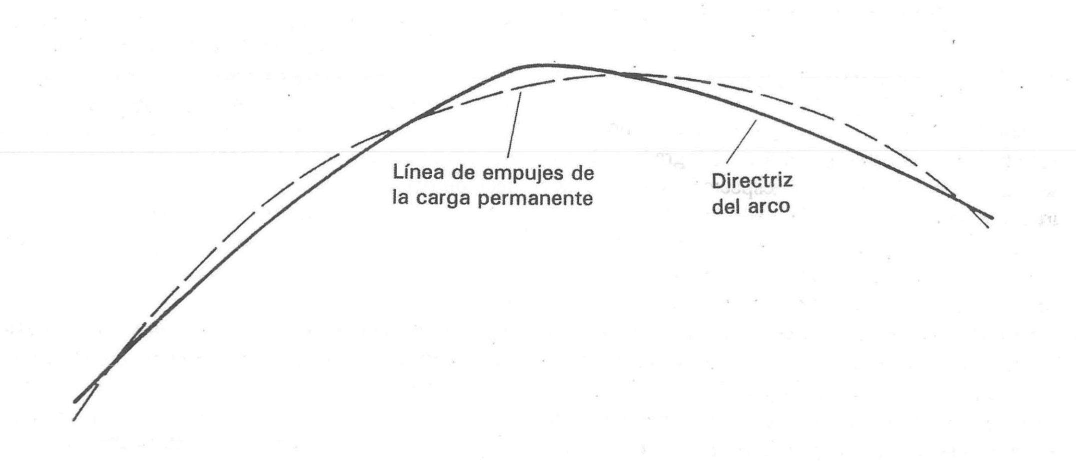


Figura 6.15
Directriz del arco de Lincoln; escala vertical ampliada 6 veces

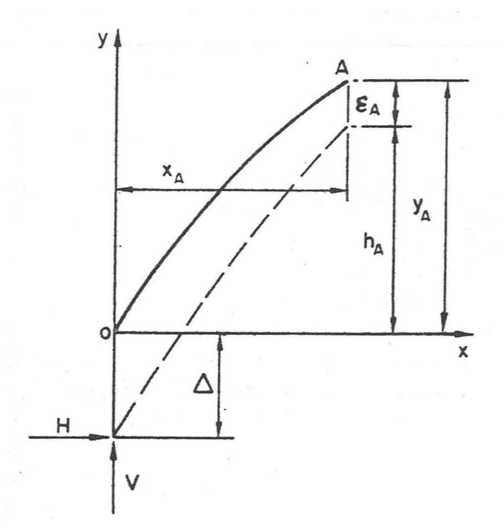


Figura 6.16
Directriz y línea de empujes en el arranque del arco

Dado que tanto H como V/H son cantidades desconocidas por el momento, se puede escribir la ecuación (16) para cualquier sección x (prescindiendo del subíndice A):

$$h = -\Delta + \rho x - \gamma \int_0^x (x - z) w dz \qquad (17)$$

De este modo, la ecuación que define la línea de empujes se escribe en función de tres variables Δ, ρ y γ a determinar; esto se corresponde con el hecho de que el arco sea hiperestático de tercer grado. La línea de empujes se puede mover respecto a la directriz del arco jugando con los valores de Δ, ρ y γ.

Considerando, como antes, que se reduce hipotéticamente el espesor real del arco justo hasta que contenga una línea de empujes correcta, se trata de buscar una solución al problema de hacer que las dos líneas de la figura 6.15 se aproximen tanto como sea posible. Es decir, en el conjunto del arco se debe hacer mínima la distancia $\epsilon = y - h$ (figura 6.16). Dado que h depende de tres variables, ecuación (17), el mínimo se encontrará cuando se igualen *cuatro* valores de ϵ (o, en general, se imponga una relación determinada entre ellos, si el arco es de espesor variable; veáse el siguiente ejemplo. En el caso de Lincoln, el espesor vertical del arco de 280 mm es prácticamente constante).

A efectos de cálculo, se ha sustituido la integral de la ecuación (17) por un sumatorio de cantidades discretas; se ha dividido el arco en 14 segmentos de 0,61 m de longitud cada uno, cuyos pesos W_r también se han calculado; para el segmento n-simo, se ha tomado la expresión

$$x_n \sum_{r=1}^{n} W_r - \sum_{r=1}^{n} x_r W_r \qquad (18)$$

como aproximación al valor de la integral en ese segmento.

El análisis sigue entonces por el método de tanteos, exactamente igual que en el caso del problema análogo de un pórtico en cálculo plástico. Se dedujo finalmente que los puntos del arco para los que se igualan las excentricidades de la línea de empujes, están situados en el arranque del lado izquierdo (0) y en los segmentos 3, 7 y 12. Se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 0&: \quad \epsilon = \Delta \\ 3&: -\epsilon = \Delta + 0{,}257 - 1{,}525\rho + 8.080\gamma \\ 7&: \quad \epsilon = \Delta + 0{,}541 - 3{,}965\rho + 47.170\gamma \\ 12&: -\epsilon = \Delta + 0{,}439 - 7{,}015\rho + 122.840\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

En la ecuación del segmento 3, el valor 0,257 (m) es la flecha del arco (figura 6.16), el punto está a 1,525 m del origen y 8.080 Nm es el valor de la expresión (18) en dicho segmento. Nótese la alternancia de signos de ϵ en la ecuación (19), que corresponde a la posición de la línea de empujes por encima y por debajo de la directriz del arco. Resolviendo las ecuaciones (19) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon &= 0{,}033 \text{ m} \\ H &= \frac{1}{\gamma} = 87 \text{ kN} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

La correspondiente línea de empujes es la dibujada en la figura 6.15; en la figura 6.17 se muestra la excentricidad de la línea de empujes global del arco.

Se puede concluir que un arco de 66 mm de espesor es justo el que contendría exactamente la línea de empujes de las cargas permanentes. El coeficiente geométrico de seguridad del arco existente de Lincoln es por tanto de 280/66=4,2 (sólo para las cargas permanentes).

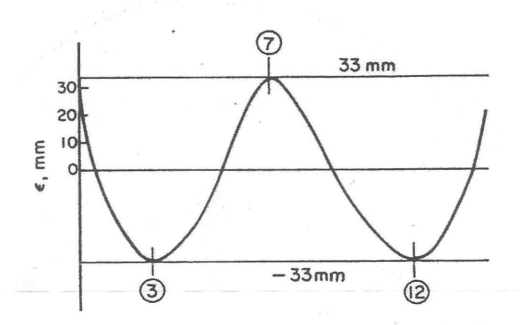


Figura 6.17
Excentricidad de la línea de empujes de la carga permanente en Lincoln

El área de la sección transversal de dicho arco es aproximadamente de 0,14 m^2, de modo que la componente horizontal H del empuje sobre los apoyos, ecuación (20), produciría una tensión media de compresión de 0,62 MN/m^2. El arco es de una caliza oolítica cuya resistencia de rotura a compresión (veáse, por ejemplo, Gwilt[37] o Warland[38]) es de unos 15 MN/m^2. No obstante, Nicholson[35] afirma que las juntas de mortero (de unos 10 mm) entre las dovelas se desmenuzan, así que puede suceder que la resistencia real a compresión de la piedra no sea una referencia válida para el coeficiente de seguridad frente a tensiones. No obstante, el valor medio de la tensión de servicio a compresión resulta ser satisfactoriamente bajo.

Queda por comprobar la estabilidad del arco bajo sobrecargas adicionales. Nicholson[35] comenta (en 1842) que «el arco vibra de forma perceptible cuando se salta encima de él» y anota que «es práctica habitual de los visitantes probar de esta manera sus propiedades elásticas» (y lo sigue siendo). Se estudiará a continuación el efecto de una carga puntual unidad situada en cualquier lugar sobre el arco.

A los efectos de este cálculo se descartará provisionalmente el perfil real del arco; se sustituirá la directriz del arco real (línea continua en la figura 6.15) por la línea de empujes calculada a partir de la ecuación (17), en la cual se ha reemplazado la integral por un sumatorio, y los valores de Δ, ρ y γ son los que resultan de las ecuaciones (19). Así, el arco hipotético a estudiar tiene el perfil que aparece a puntos en la figura 6.15, y el problema a resolver es el siguiente: dado un arco con este perfil, ¿cuál es su espesor mínimo (constante) para que contenga de forma estricta la línea de empujes resultante de la combinación de las cargas permanentes que actúan sobre el arco real con una sobrecarga unidad situada en cualquier lugar del arco?

Como se indicó más arriba, si se refieren todos los cálculos a la línea de empujes de las cargas permanentes, se consigue que éstas no vuelvan a figurar en los cálculos; el efecto de la sobrecarga se puede estudiar de forma aislada. De hecho, el cálculo es similar al realizado anteriormente para el arco parabólico (figura 6.13). Así, una carga situada aproximadamente en la posición señalada en la figura 6.18(a) dará lugar al mismo tipo de mecanismo de colapso; la forma más fácil de localizar las articulaciones es dibujar la línea de empujes, figura 6.18(b), de modo que la excentricidad e sea igual en las cuatro. La figura 6.19 muestra otro mecanismo posible cuando la carga aislada está cerca de la clave del arco; una de las articulaciones se separa entonces del arranque.

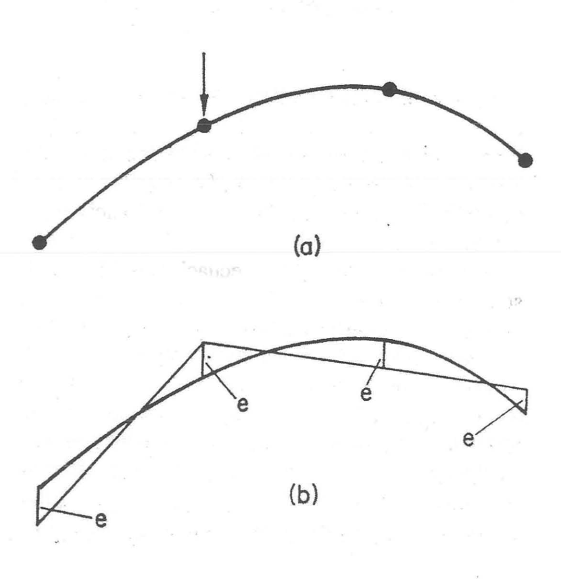


Figura 6.18
Mecanismo de colapso para carga aislada en Lincoln

La excentricidad e de la línea de empujes, multiplicada por la componente horizontal T del empuje, nos dará el valor buscado de M_p. Teniendo en cuenta el equilibrio estático de la línea de empujes y utilizando la notación de la figura 6.20, el valor de T viene dado por

$$T = \frac{P}{\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}} \quad (21)$$

En el caso del arco de Lincoln, se hicieron cálculos para 14 posiciones distintas de la sobrecarga puntual, cuyos valores del «momento plástico último» M_p resultantes se indican en la figura 6.21. La posición más desfavorable de la carga está cerca de un cuarto de la luz; el diagrama es ligeramente asimétrico y el valor máximo de M_p resulta ser 0,396 Nm para la carga unidad.

Así, tomando una carga puntual de 2 kN (un hombre grueso saltando sobre el arco) y considerando el empuje básico de 87 kN sobre el apoyo, ecuación (20), el efecto de la sobrecarga es desplazar la línea de empujes de la carga permanente una distancia máxima ϵ, donde

$$\left.\begin{aligned}(0{,}396)(2.000) &= (\epsilon \times 87.000)\\ \epsilon &= 0{,}009\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Esto significa que un arco de 18 mm de espesor que tuviera el perfil de la *línea a trazos* de la figura 6.15 contendría de forma estricta la línea de empujes debida a la carga permanente del arco de Lincoln, más la sobrecarga de 2 kN situada en la posición más desfavorable.

Las excentricidades de las ecuaciones (20) y (22) son simplemente aditivas: 33+9= 42 mm. Es decir, un arco de 84 mm de espesor que tuviera el perfil de la *línea continua* de la figura 6.15 (o sea, el perfil real) contendría de forma estricta la línea de empujes de las cargas permanentes más la sobrecarga. De esa forma, el coeficiente geométrico de seguridad, que se había calculado en 4,2 para la carga permanente se reduce a 280/84= 3,3 por la acción de un hombre saltando en la posición más desfavorable. Puede que

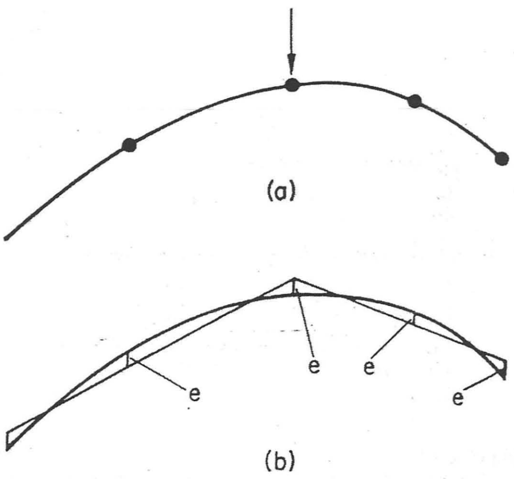


Figura 6.19
Mecanismo alternativo de colapso para carga puntual (Lincoln)

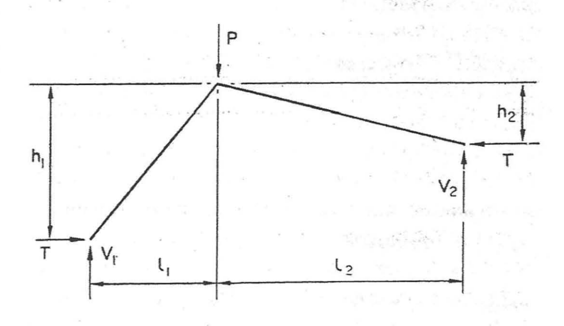


Figura 6.20
Estática de la línea de empujes (Lincoln)

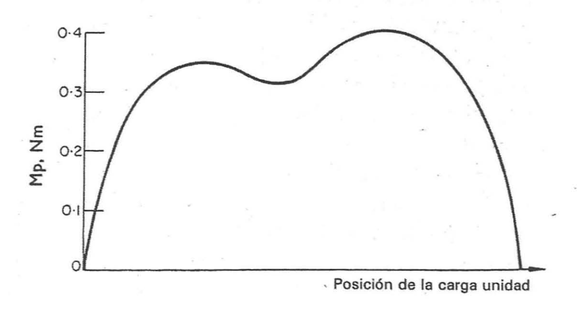


Figura 6.21 *(derecha)*
Momento plástico último, carga puntual unidad (Lincoln)

el arco vibre perceptiblemente pero el coeficiente geométrico de seguridad no se ha reducido de forma peligrosa.

(b) Ponte Mosca, Turín

Castigliano[39] da detalles del puente Mosca de 1827 sobre el Dora Riparia en Turín, y tabula expresiones similares a las de los sumatorios (18) arriba indicados. El libro de Castigliano trata fundamentalmente de la exposición de los teoremas que llevan su nombre y considera el puente de Turín como un arco elástico con tres incógnitas hiperestáticas, cuyos valores procede a calcular.

Castigliano demuestra que se puede estudiar un arco agrietado (es decir, un arco elásticamente imperfecto) por un método de tanteos, y hace tres series de cálculos para el puente de Turín. En la primera se supone elasticidad perfecta para las juntas de mortero entre las dovelas, y calcula el valor del empuje horizontal en 352.990 kp por metro lineal de ancho del puente. (Para comparar con los resultados de Castigliano se usará el kp en lugar de los Newtons; 1 kp ≃10 N. Nótese que Castigliano desarrolla sus cálculos con una precisión que no parece justificada.)

Hay un segundo cálculo para la construcción en seco (juntas de mortero de espesor cero), en el que Castigliano obtiene la cifra de 324.710 kp, con un descenso del 8% en el valor del empuje horizontal. Sin embargo, esta solución implica que la línea de empujes queda fuera del tercio central cerca de los apoyos, de modo que una revisión final de los cálculos suponiendo la fábrica parcialmente agrietada da un empuje horizontal de 333.960 kp. En la figura 6.22 se reproduce el dibujo de Castigliano; el arco es simétrico, por lo que sólo es preciso estudiar la mitad para poder determinar el efecto de las cargas permanentes. El espesor radial de las dovelas aumenta desde 1,50 m en la clave hasta 2,00 m en los arranques; en ellos, el espesor *vertical* es de 2,23 m. Como antes, supondremos que el arco se «adelgaza» progresivamente en torno a su directriz hasta contener estrictamente la línea de empujes; durante ese proceso de adelgazamiento se mantendrá constante el espesor relativo del arco en las distintas secciones transversales.

Castigliano dividió el arco en seis segmentos (figura 6.22). Tomando el origen en la clave (en lugar del arranque, cf. figura 6.16) y empleando la notación previa, las ecuaciones de la excentricidad en las secciones críticas resultan ser (23):

$$\left.\begin{array}{ll} 6\text{ (clave):} & \epsilon = \Delta \\ 3 & : -1{,}20\epsilon = \Delta + 2{,}40 - 1/H(800.470) \\ 0\text{(apoyo):} & 1{,}49\epsilon = \Delta + 5{,}36 - 1/H(2.021.937) \end{array}\right\} \quad (23)$$

En la tercera de estas ecuaciones, por ejemplo, el valor $1{,}49\epsilon$ incluye el cociente (2,23/1,50) de los espesores verticales del arco en el arranque y en la clave; de esa forma, la excentricidad ϵ de la línea de empujes queda referida a la dimensión de 1,50 en la clave. La sección 0 está 5,36 metros por debajo de la sección 6 (el origen); el valor 2.021.937 mkp está tomado de las tablas de Castigliano.

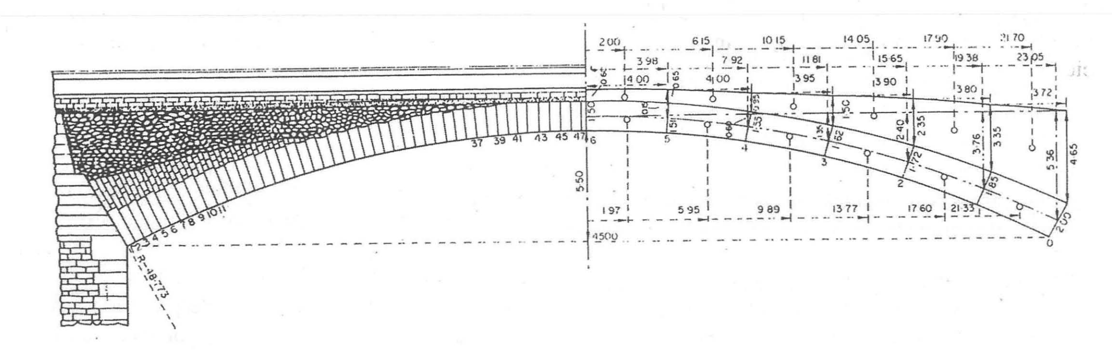


Figura 6.22
Ponte Mosca, Turin

La solución de las ecuaciones (23) da $\epsilon = \Delta =$ –0,116 m, H= 373.000 kp; la última cifra es un 5% superior al valor elástico de Castigliano. El coeficiente geométrico de seguridad frente a las cargas permanentes es de 1,50/(2×0,116)= 6,5.

La mayor tensión media en el arco se produce en la clave, donde su valor es de 373/1,5= 249 t/m² (el valor correspondiente en los apoyos es de 438/2,0= 219 t/m²). Ungewitter[40] da como resistencia típica del granito un intervalo de valores entre 5.000 y 18.000 t/m²); el coeficiente nominal de seguridad de las tensiones parece estar bien por encima de 20. No obstante, el débil mortero puede llegar a desmenuzarse hasta que las dovelas lleguen a entrar en contacto; Castigliano hace algunos comentarios interesantes sobre el mejor momento de bajar las cimbras en esas condiciones.

Sustituiremos ahora la directriz real del arco por la línea de empujes de las cargas permanentes para poder calcular el efecto de una sobrecarga. Nuevamente, el método gráfico es el mejor; en la figura 6.23 se muestra una posición típica de la línea de empujes de una carga puntual (esquemáticamente; con escala vertical ampliada 4 veces). La excentricidad de esta línea no es constante; los valores e_1 etc. son proporcionales al espesor vertical del arco en cada una de las secciones. En la figura 6.24 se presentan los resultados finales (cf. figura 6.21 en el caso de Lincoln); el mayor valor de M_p es de 1,72 mt para una carga unidad (1 t).

Así, pues, si consideramos una sobrecarga de 10 t por metro de ancho de puente, el valor de M_p sería de 17,2 mt. El empuje horizontal básico es de 373 t y la excentricidad de la sobrecarga, referida como antes al espesor de la clave, es por tanto de 17,2/373= 0,046 m. Añadiendo el valor 0,116 m de la excentricidad de las cargas permanentes, el coeficiente geométrico de seguridad se reduce a 1,50/(2×0,162)= 4,6 para este valor particular de la sobrecarga.

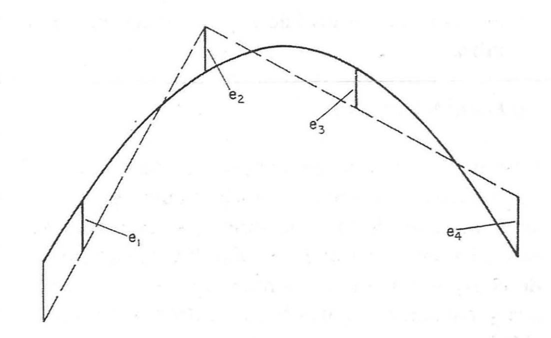


Figura 6.23
Línea de empujes para carga aislada (Turín)

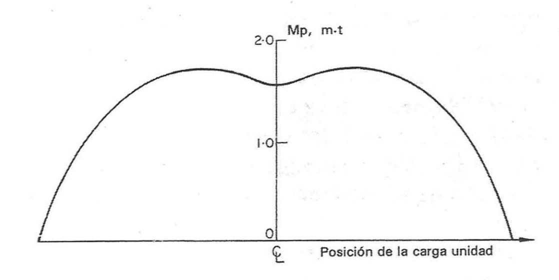


Figura 6.24
«Momento plástico total» para carga puntual (Turín)

El efecto de las grandes deformaciones

Sin una información precisa y detallada sobre la cimentación no es posible discutir el problema del fallo de los estribos en un puente. No obstante, resulta interesante investigar el efecto sobre el propio arco de fábrica de un movimiento limitado de los arranques. Es decir, se supondrá que no se produce un movimiento sin restricciones sino que ha ocurrido algo parecido a la consolidación de uno u otro de los cimientos; después de detenerse el movimiento, se precisa determinar los nuevos coeficientes de seguridad del arco.

Se ha comentado más arriba, como corolario del teorema «de la seguridad» que suponiendo que los cambios de geometría son despreciables, los movimientos de pequeña magnitud no afectan a las condiciones últimas de colapso. Parece claro intuitivamente, y puede demostrarse con cálculos, que la geometría del puente de Turín no habrá cambiado mucho por pequeños asientos o desplazamientos de los arranques. Se puede concluir, por tanto, que los coeficientes de seguridad prácticamente no han cambiado. Por contra, se puede predecir que una pequeña separación en los apoyos (las torres occidentales) del

puente de piedra de Lincoln producirían un cambio notable en la geometría de un arco tan rebajado. Estudiaremos numéricamente este arco y calcularemos nuevos coeficientes de seguridad.

En la figura 6.25(a) se representa un arco común que encaja exactamente entre sus estribos. Si éstos se separan, el arco deberá agrietarse para acomodarse a su nueva luz; en la práctica, las dovelas se abren tal y como se indica en la figura 6.25(b). Este fenómeno fue investigado exhaustivamente por Pippard.[25] Un estado de agrietamiento como éste es totalmente seguro; la presencia de tres articulaciones no convierte el arco en un mecanismo. De hecho, dado que un arco real no encaja nunca exactamente en sus estribos y está siempre sujeto a inevitables imperfecciones accidentales, se podría pensar que el estado natural del arco es el agrietado. La figura 6.26 muestra el puente del siglo XVII del Clare College de Cambridge (Grumbold, 1638–40).

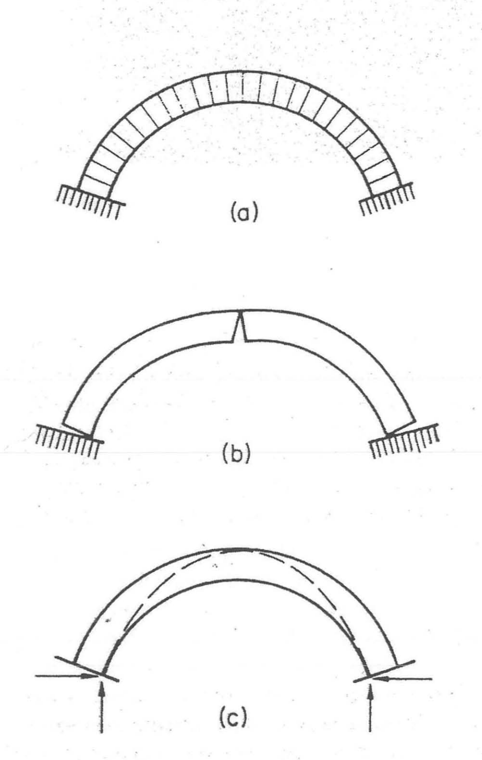


Figura 6.25
Agrietamiento de un arco de dovelas por apertura de los apoyos

Dado que la línea de empujes debe pasar por cada articulación, tres articulaciones como las de la figura 6.25(b) definirán de forma única la posición de la línea de empujes del arco, como se representa en la figura 6.25(c). De todas las líneas de empuje posibles, ésta corresponde al valor mínimo del empuje sobre los estribos. Así, una primera paradoja del comportamiento del arco en caso de cedimiento de los estribos es que éste se habrá producido bajo la acción del *mínimo* empuje que es capaz de producir el arco. Dicho en otras palabras, si los estribos del arco comienzan a ceder bajo un cierto valor del empuje, éste se reducirá inmediatamente hasta el valor mínimo que corresponde a la línea esquematizada en la figura 6.25(c), y el peligro disminuirá.

Una segunda paradoja es que, si las deformaciones producen un efecto apreciable sobre la geometría del arco, éste habrá desarrollado (en general, pero no en todos los casos) una forma «mejor» para resistir la carga aplicada; es decir, el coeficiente geométrico de seguridad aumentará. Todo ello puede ilustrarse con algunos cálculos sobre el arco de Lincoln.

Supongamos que el arco aumenta su luz en 25 mm. Se formarán articulaciones en los apoyos y en la clave, como en la figura 6.25(b), a la vez que la compatibilidad de deformaciones exige que la clave descienda 81 mm, lo que produce un cambio apreciable en la forma del arco. La figura 6.27 muestra (en la misma escala ampliada de la figura 6.15) el perfil de la directriz del arco antes y después de la separación de 25 mm entre los estribos.

Se pueden plantear para el nuevo perfil ecuaciones similares a la (19), cuya solución dará (cf. ecuaciones (20)):

$$\epsilon = 0{,}023 \text{ m} \qquad (24)$$
$$H = 107 \text{ kN}$$

El coeficiente geométrico de seguridad ha mejorado con el cedimiento, desde el valor 4,2 hasta el de 280/46= 6,1; cerca de un 45%. Sin embargo, el empuje horizontal ha aumentado un 23% hasta 107 kN; de modo que el coeficiente de seguridad de las tensiones se ha reducido. No obstante, la tensión media de compresión sigue siendo inferior a 0,8 MN/m^2.

En el límite, el arco totalmente plano (la *platebande*) tiene un coeficiente geométrico de seguridad infinito pero también, por supuesto, el empuje horizontal tiende a infinito conforme el espesor se aproxima a cero. Antes de alcanzar esa situación, el arco

Figura 6.26
Puente del Clare College en Cambridge

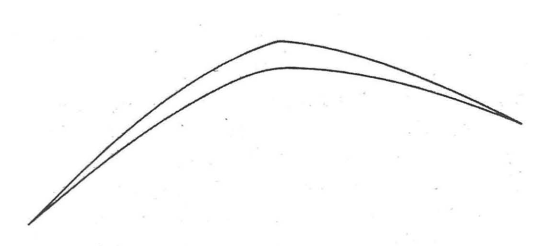


Figura 6.27
Directriz deformada del arco de Lincoln, debido a un desplazamiento de 25 mm entre los apoyos; escala vertical ampliada 6 veces

debe fallar por «dislocación» debido a la compresibilidad de la piedra, que no había sido tenida en cuenta. (No hay peligro de que eso suceda en el caso de Lincoln. A una tensión media de 0,8 MN/m^2, el arco de 8,54 m de luz se comprimirá, por causa del empuje, digamos 1 mm; una hipótesis más generosa respecto a morteros más compresibles no llegaría a duplicar esa cifra.)

Conclusiones

Resulta díficil, a partir de los escasos puentes analizados aquí, hacer recomendaciones definitivas sobre el valor del coeficiente geométrico de seguridad necesario para dar una garantía apropiada de estabilidad. No obstante, parece que cualquier puente bien construido, y de forma razonable, tiene un amplio

margen de seguridad; la línea de empujes quedará normalmente contenida con holgura en el interior de la fábrica, las tensiones de servicio serán bajas y el puente podrá soportar cómodamente sobrecargas asimétricas y no se vendrá abajo por causa de imperfecciones casuales como el cedimiento de los estribos. De hecho, los coeficientes de seguridad frente a estas hipótesis parecen considerablemente altos y se requiere un proyectista excepcionalmente torpe e ignorante para diseñar un puente como el de Pontypridd, que se derrumbó en 1751.

Esta conclusión sobre la estabilidad esencial de proyectos aparentemente razonables se ve apoyada por el hecho de que, una vez levantados tales puentes, si sobreviven durante un tiempo y reciben un mantenimiento ocasional mínimo, ya no colapsan más adelante, a pesar de soportar cargas adicionales mucho mayores que las previstas por sus proyectistas. Es cierto que la seguridad de los arcos de fábrica bajo las modernas condiciones de tráfico ha suscitado algunas preocupaciones, y resulta interesante comparar algunas conclusiones de Chettoe y Henderson[41] con las implicaciones del presente artículo.

Chettoe y Henderson hicieron pruebas de carga reales sobre un gran número de puentes. Aunque se observaron algunas deformaciones permanentes, los puentes se comportaron de un modo lo bastante elástico como para que estos autores concluyeran que un análisis elástico puede proporcionar una imagen adecuada de la respuesta de cualquier puente en particular. Chettoe y Henderson no son partidarios de la regla del tercio central y proponen las hipótesis «seguras» de que el mortero no puede transmitir tensiones de tracción y que se debería ignorar la contribución estructural de cualquier relleno. Estas últimas hipótesis, desde luego, son idénticas a las que hemos planteado aquí.

En ausencia de una estimación fiable de la resistencia de las fábricas antiguas, Chettoe y Henderson proponen resistencias límite entre 200 y 250 lb/pulgada^2, unos 1,5 MN/m^2. Recordemos que la tensión media de compresión en Lincoln era de 0,6 MN/m^2, mientras que la del Ponte Mosca es de unos 2,5 MN/m^2); no obstante, este último puente está construido en sólido granito.

Resulta evidente que un amplio abanico de puentes, de formas y luces habituales, pueden superar pruebas de seguridad bastante rigurosas, tanto geométricas como relativas a la magnitud de las tensiones. El proyectista, una vez esté satisfecho respecto al propio cálculo del arco, bien puede llegar a la conclusión de que los puntos críticos de un puente de fábrica estarán en los estribos. Es más, las deformaciones en la clave y los desplazamientos medidos por Chettoe y Henderson en gran medida eran resultado de movimientos de los estribos bajo carga. Uno de los principales problemas del proyectista de puentes, es elegir un valor razonable del empuje sobre los estribos que permita dimensionarlos correctamente.

A este respecto, todos los esfuerzos del siglo XVIII parecen haberse dirigido precisamente en la dirección correcta y resulta significativo que tanto la teoría como el tipo de ensayos que se hacían guardaran relación con los estados límite, es decir, con la determinación del empuje en el momento en que el arco está a punto de colapsar. Esta es una base de cálculo perfectamente adecuada, que sólo se cambió cuando la teoría de la elasticidad adquirió el suficiente desarrollo como para permitir soluciones del tipo de las descritas por Castigliano en 1879 (si bien Yvon Villarceau ya era bien consciente en 1854 de que el problema del arco es, dicho en términos modernos, hiperestático).

Esta concentración en los métodos elásticos de análisis, que ha dado un peso indebido a conceptos tales como la regla del tercio central, ha «hechizado» de alguna forma el cálculo de estructuras durante el último siglo. Por supuesto, no hay nada en contra de la teoría elástica para determinar los valores de cálculo del empuje del arco; la aplicación de métodos elásticos a una estructura que no es perfectamente elástica dará resultados que, si no tan «ciertos» como piensa el proyectista elástico, al menos son seguros en el sentido de los teoremas plásticos. Sin embargo, los métodos elásticos tienden a ser innecesariamente largos y se apoyan excesivamente en todo un abanico de hipótesis convencionales; la falta de conocimiento, por ejemplo, de las características y propiedades de las juntas de mortero entre dovelas, hacen que los precisos resultados de un análisis elástico pierdan todo su sentido.

Por el contrario, el tipo de planteamiento a través del equilibrio propuesto en este ensayo no se basa en tales hipótesis. Además, el método es más sencillo que un análisis elástico, sigue dando resultados seguros y proporciona valores que, cuando menos, son tan razonables a efectos de proyecto como los que dan los métodos elásticos convencionales.

7

La catedral de Beauvais

Está de moda negar que el gótico alcanzase su decadencia en la segunda mitad del siglo XIII y afirmar que las catedrales de Amiens, Beauvais y tal vez la de Colonia no representen los más altos logros de dicha disciplina. Desde un punto de vista estético es posible argumentar hasta la saciedad sobre los relativos méritos de tal o cual estructura, construida en este o aquel siglo. Desde un punto de vista estructural no existe apenas argumentación posible. El comienzo de esta decadencia —que salta a la vista— puede datarse hacia el año 1250, resultado de la lenta relajación de los sólidos principios estructurales adquiridos a lo largo de los siglos precedentes. Efectivamente, un centenar de años después, hacia finales del siglo XIV, las pruebas periciales realizadas en Milán demostraron que, al menos los italianos, desconocían como construir una catedral. Tras una primera interrupción, en la que se decidió la polémica ad quadratum/ad triangulum siguiendo el consejo del matemático Stornaloco (favorable a la forma triangular), los trabajos continuaron tranquilamente durante algún tiempo. Sin embargo, tan solo unos pocos años después, se consideró nuevamente necesario consultar a expertos extranjeros.

Nada más llegar de París, Jean Mignot elaboró una lista de 54 puntos sobre los defectos que presentaba la inacabada catedral. Algunas de estas críticas son curiosamente irrelevantes e incluso pedantes; Frankl[1] considera a Mignot una especie de Beckmesser lo que parece una descripción apropiada. Mezcladas con críticas estructurales (p. ej. insuficiencia de los estribos), aparecen consideraciones puramente estéticas (p. ej. que los doseles se han situado a excesiva altura sobre las estatuas), siendo evidente que ni los italianos ni el propio Mignot eran capaces de distinguir con claridad entre las funciones estructural y estética de las distintas partes de la fábrica. Mignot en efecto basa su crítica en un conjunto de reglas que él sabía que eran «correctas»; llegado a un cierto punto, incluso solicita la intervención de otros expertos procedentes de Alemania, Francia e Inglaterra, sabedor de que sus opiniones serían ratificadas por todo arquitecto formado en una logia reconocida. Por supuesto, las tesis de Mignot triunfaron, pues los italianos respondieron desde su inferior formación, o peor aún, tratando de improvisar respuestas plausibles *ab initio*.[2] Sin embargo, la victoria de Mignot y su subsiguiente nombramiento como arquitecto del Duomo, no significaba que él mismo *comprendiese* las reglas con que trabajaba; las reglas eran para Mignot algo sacado de un libro, ratificado por el tiempo y la práctica («ars sine scientia nihil est»), pero cuyo significado y razón de ser se había desvanecido con el transcurso del tiempo.[3]

Los principios estructurales de Milán son sencillos y habían existido al menos durante doscientos años: bóvedas nervadas cuyo empuje es resistido por arbotantes. Esta es la esencia estructural del gótico, desa-

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Beauvais Cathedral,» *Transactions of the Newcomen Society* 40 (1967/68): 15-35. Traducción de Antonio Azcona Olivera.

rrollada, refinada y lentamente codificada a lo largo de los siglos XII y XIII.[4] No hay una evolución estructural explícita ni implícita entre, por ejemplo, Colonia (1248) y Milán (1386); es más, Colonia a pesar de ser algo repetitiva y «fláccida», resulta estructuralmente más refinada que Milán. Así, reglas adecuadas para Colonia, tendrían que serlo también para Milán, y no hubieran necesitado modificación alguna a lo largo del siglo que media entre ambas. Las reglas, formuladas y verificadas, yacían custodiadas en las logias, muertas; el arquitecto del siglo XIV habría olvidado la larga lucha necesaria para alcanzar el equilibrio de fuerzas en una estructura real, reflejado en el enunciado final de las reglas de proporción.

En base a los conocimientos técnicos de la ingeniería del siglo XX, parece que la construcción en fábrica conduce precisamente a reglas numéricas de proporción;[5] los niveles tensionales en la mayor parte de la fábrica de una catedral gótica son tan bajos, que la resistencia del material es una cuestión de segundo orden. Tales reglas numéricas pudieron haber sido definidas a lo largo de los siglos XII y XIII sólo de forma empírica, mediante un método de tanteos, tomando nota de los éxitos y, lo que es más importante, de los fracasos estructurales. Cuando este bagaje de experiencias dejó de formar parte de la memoria viva, ya no hubo manera de reconstruir las reglas por procedimientos racionales o argumentaciones intelectuales. Si se seguían las reglas, el resultado probable era una estructura segura; si (digamos, por motivos «estéticos») las reglas resultaban alteradas, el resultado seguiría siendo probablemente una estructura segura. Sin casi probabilidad de error, podríamos asegurar que todos los desastres estructurales acaecidos a partir de la segunda mitad del siglo XIII pueden atribuirse a la ignorancia de las reglas, a transgresiones profundas de las mismas, a una ejecución tan pobre como para resultar fraudulenta o, simplemente, a un Acto de Dios.

Las reglas finalmente deducidas eran muy buenas. Por ejemplo, tal y como señala Ackerman, «en su conjunto, el proyecto concebido [para Milán] se hizo para una catedral considerablemente distinta de la que luego se construyó: estribos y pilares se elevaban hacia un objetivo desconocido, postergando al último término la resolución del problema estructural primario y básico: las bóvedas».[6] No obstante, Milán continúa en pie rindiendo tributo a la eficacia de los elementos estructurales que la componen; evidentemente, un arbotante, por ejemplo, puede resistir una amplia gama de empujes y, por tanto, soportar casi cualquier tipo de bóveda.[7] Milán, en su forma final «ad triangulum» (triángulos no muy altos, además), no presenta grandes problemas estructurales; casi cualquier regla de construcción razonable podría haber garantizado la estabilidad de la catedral. Unas reglas mucho más depuradas habían sido necesarias un siglo y medio antes para la construcción de las catedrales de Amiens (1220), Beauvais (1247) y Colonia (1248). No resulta, pues, sorprendente, que reglas elaboradas para catedrales como éstas fuesen más que suficientes en Milán.

La observación de que los elementos estructurales puedan combinarse casi al azar y, sin embargo, formar una estructura estable, hace tentadora la conclusión de Ackerman, «...de que la estructura juega un papel secundario en el proceso de creación». Esta conclusión puede ser cierta en el caso de Milán; pero cuando tal afirmación se considera cierta para *cualquier* catedral, es que ha comenzado la transición del gótico al Renacimiento. Esta situación ha sido comentada por Harvey: «Las reglas del gótico eran tan complejas que nadie que no hubiese pasado por un largo aprendizaje y años de práctica llegaba a dominarlas, mientras que las reglas de Vitruvio resultaban tan sencillas de asimilar, que incluso los obispos las podían comprender, y los príncipes aventurarse a realizar sus propios proyectos».[8]

BEAUVAIS: HUNDIMIENTO Y RECONSTRUCCIÓN

Amiens (a pesar de algunos problemas con los arbotantes) y Colonia, habían resultado estructuras satisfactorias; en contraste, Beauvais parece haber resultado especialmente desgraciada. El ábside y el coro se comenzaron en 1247, terminándose en 1272. El 29 de noviembre de 1284, la bóveda se derrumbó, según Desjardins y Pihan, debido a que los pilares del coro estaban demasiado separados, y de acuerdo con Leblond, como consecuencia del fallo de alguno de los botareles.[9] Viollet-le-Duc da una explicación diferente que se verá más adelante. Sea cual fuere la verdadera razón, en su época se consideró que la separación entre pilares era excesiva y los trabajos de reparación durante los 50 años siguientes incluyeron la construcción de pilares intercalados entre los dispuestos originariamente en el coro, reduciendo la luz

libre de unos 9 m a unos 4,5 m. Para 1337 el coro ya había sido reconstruido, pero los trabajos se interrumpieron durante los siguientes 150 años a causa de la Guerra de los Cien Años y la ocupación inglesa. Hasta 1500 no se comenzó con el crucero bajo la dirección de Jean Vast El Viejo como *maître de l'oeuvre*, siendo Chambiges el *maître architecte*. Jean Vast murió en 1524 siendo sustituido por su hijo Jean Vast. Chambiges murió en 1532 y, al parecer, le sucedió Jean Vast como *principal architecte*, ocupando finalmente François Mareschal el cargo de *maître de l'oeuvre*.

Con el transepto en avanzado estado de construcción, el Obispo y el Capítulo convocaron en 1544 una prueba pericial sobre la posible construcción de una torre sobre el crucero en la que los miembros de la comisión, canteros y carpinteros, debían decidir si la torre había de construirse en piedra o madera. Se examinaron unos modelos en 1547, pero hasta 1558 no se tomó una decisión en favor de la torre de piedra, comenzando Jean Vast su construcción en 1564. La torre, terminada en 1569 (figura 7.1), era inmensa, elevándose 153 m sobre el terreno y, desde el comienzo, causó alarma en el Capítulo.

Se hicieron varios reconocimientos y, unos dos años después de la conclusión de la torre, los canteros reales Giles de Harlay y Nicolás Tiersault realizaron un detallado informe en el que exponían que los cuatro pilares principales del crucero empezaban a inclinarse. Los del lado del coro, con inclinaciones de 4 y 2 pulgadas *(pouces)* respectivamente, no se consideraron en peligro, pues se les tenía por bien construidos en todo su espesor;[10] el principal peligro se hallaba en los otros dos pilares «tirant au vide», es decir, contiguos a la nave inexistente, que se habían inclinado 5 ó 6 pulgadas y 11 pulgadas respectivamente, por falta de «contreboutement».

Los canteros propusieron como solución la inmediata construcción de dos tramos de la nave y el refuerzo de la cimentación de los pilares. Mientras esto se hacía, recomendaban la construcción de muros provisionales entre los pilares inclinados. El Capítulo, pusilánime, solicitó más opiniones, y pasaron dos años hasta que, finalmente, el 17 de abril de 1573, se decidió iniciar los trabajos. Trece días después, el 30 de abril, día de la Ascensión, la torre se derrumbó; Desjardins, Pihan y Leblond afirman unánimemente que los dos pilares «abiertos» fallaron primero. Los clérigos y los fieles acababan de abandonar la catedral en procesión y solamente tres personas quedaron dentro, resultando las tres ilesas. El Capítulo decidió, en 1577, conmemorar cada 30 de abril este signo de protección al que los fieles de Beauvais se habían hecho acreedores.[11] Por otra parte, llegados a este punto, el Capítulo perdió iniciativa. En 1578 ya se habían ejecutado todas las reparaciones necesarias (pero sin reemplazar la torre), e igualmente, la totalidad de los fondos reservados para la construcción de la nave se habían gastado. Hubo algún intento esporádico de completar la catedral, pero en 1605 se tomo la decisión de consolidar lo existente, y Beauvais alcanzó su estado actual, un coro y un crucero sin nave. «Le temps n'était plus à bâtir des cathédrales. Les écoles d'architectes, de sculpteurs, de verriers, de peintres, que leur construction avait fait surgir, se mouraient de toutes parts.»[12]

* * *

Branner[13] ha señalado que, a pesar de todo lo que se ha escrito sobre las colosales dimensiones de Beauvais, ésta no era, en realidad, mucho mayor que las grandes catedrales de la primera mitad del siglo XIII. La luz a ejes de pilares del coro de Beauvais es de 15 m, casi exactamente la de las catedrales de Bourges, Chartres, Amiens y Colonia, y ligeramente mayor que la de Reims; la anchura total del coro (unos 42 m) es aproximadamente la misma que en Bourges, y menor que en todas las demás, con lo que la luz de las naves laterales es significativamente menor que en las otras. Solamente la altura de sus bóvedas, 48 m, supera en medidas a las demás catedrales, alcanzando las de Colonia los 46 m. En lo que se refiere a la separación entre pilares en la dirección de la nave, los tres tramos originales del coro variaban entre 8 y 9 m,[14] separación ligeramente inferior a la mayor de Amiens y casi exactamente igual a las de Reims y Colonia.

Cualquiera que sea la razón que se aduzca para justificar el hundimiento de 1284, nada puede relacionarlo con alguna decisión temeraria por parte del arquitecto. La pregunta es más bien: si Amiens y Colonia continúan en pie, ¿por qué no Beauvais? Colonia tardó en ser construida incluso más que Beauvais, terminándose el coro en 1322 sin haberse comenzado la nave. Amiens se construyó entre 1220 y 1288, abarcando este tiempo toda la primera fase de Beauvais. Así, pues, las evidencias apuntan a que la técnica gótica fue eficaz al menos hasta finales del siglo

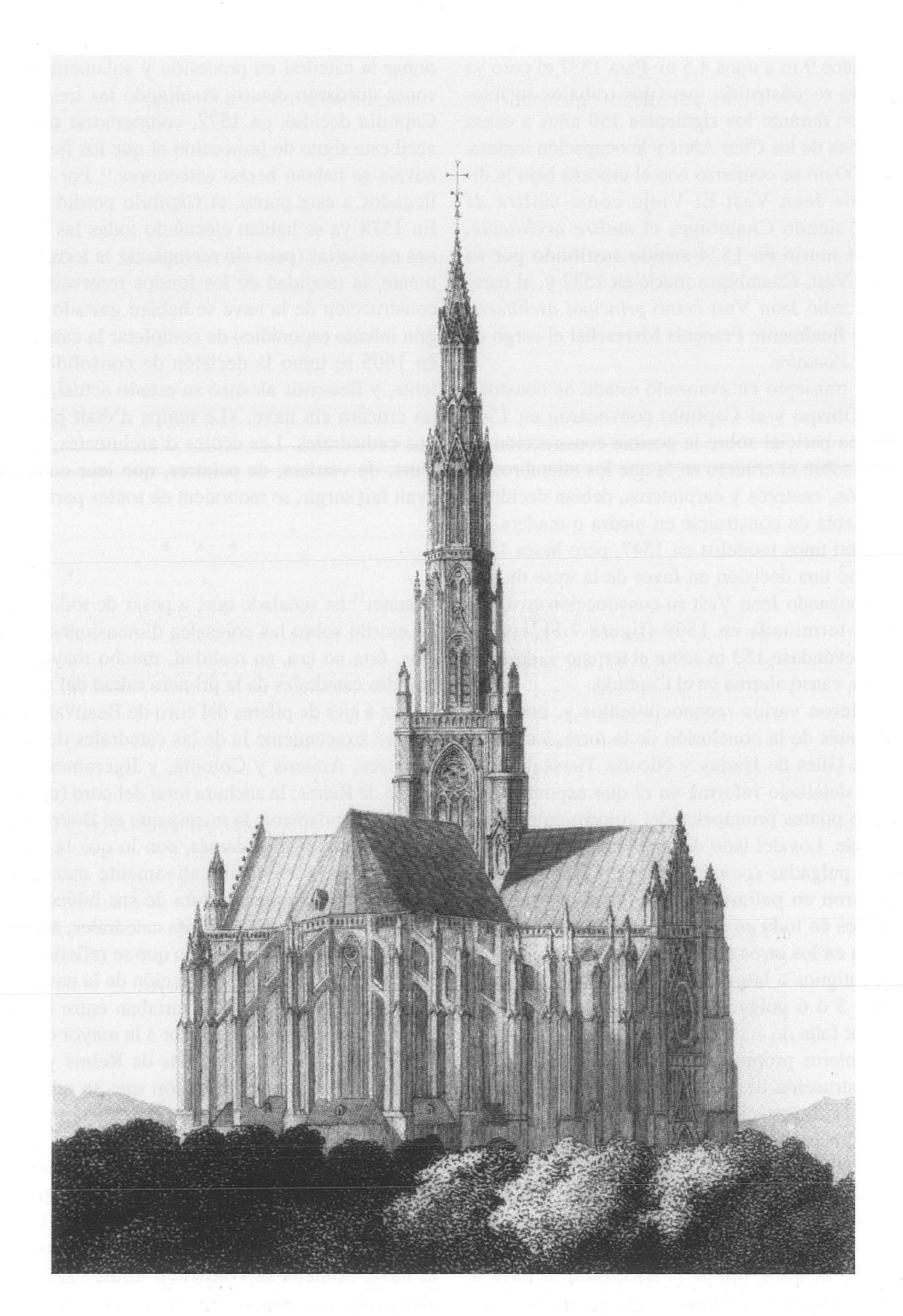


Figura 7.1
Catedral de Beauvais en su estado final (1569)

XIII; o que, en cualquier caso, un edificio *proyectado* en la primera mitad de dicho siglo, pudo ser construido en la segunda mitad del siglo.

Benouville, en su estudio sobre la estructura de Beauvais en 1891, encuentra diferencias en la calidad de la construcción por encima y por debajo del triforio; abajo «l'appareil...est très soigné, très regulier»; y encima, mucho menos. Cincuenta años son, por supuesto, demasiados para que un solo hombre haya estado a cargo de la obra, y Benouville concluye que la fase final de la construcción fue dirigida por alguien menos experto que un *maître d'oeuvre*, que seguía, sin embargo, los planos existentes.[15] Branner ha realizado un detallado estudio cronológico, deduciendo que los trabajos hasta el nivel del triforio se llevaron a cabo entre 1225 y 1245 bajo la dirección del primer *maître*. Entre 1245-50 se observa un ínterin, en el que, a las órdenes de un segundo *maître*, se avanzó muy poco, y a partir de 1250 los trabajos prosiguieron bajo la dirección de un tercer *maître*. Tanto si este tercer maestro fue en realidad *maître de l'oeuvre*, como si no, Branner cree ver en él al autor de las altas bóvedas, más altas de lo que pretendiera el primer maestro, creando los famosos botareles intermedios en «porte-à-faux», aunque no parezca haber evidencia de que esta construcción no fuese proyectada por el primer maestro. Sea como fuere, en 1272 había en Beauvais bóvedas a 48 m de altura sobre el suelo; en 1284 esas bóvedas se hundieron. Doce años es demasiado tiempo para que una estructura de fábrica se mantenga, mientras decide si los pilares principales están demasiado separados (¿demasiado separados para qué?). Igualmente si, como dice Leblond, los botareles exteriores fallaron, ¿por qué no lo hicieron inmediatamente? (Benouville cree[16] que la torre sobre el crucero fue imprudentemente comenzada a finales del siglo XIII, aunque esta opinión se contradice con la historia del hundimiento ocurrido en el siglo XVI.)

Una catedral gótica se mantiene en pie en virtud de un más o menos delicado equilibrio de fuerzas; las bóvedas empujan hacia fuera, siendo estos empujes recogidos y transmitidos por los arbotantes hasta los botareles principales que los conducen al terreno. Verdaderamente Beauvais es una construcción alta, por lo que su equilibrio de fuerzas tiene que ser más o menos crítico; sin embargo, si es posible encontrar un sistema de empujes que indique que, al menos en su origen, la estructura fue segura, el teorema del límite inferior del análisis límite[17] establece que, en circunstancias normales, la estructura continuará siendo segura.

Es más, el análisis estructural que se expone más adelante, es casi innecesario. El hecho de que Beauvais se mantuviese en pie durante 12 años es prueba experimental más que suficiente, para demostrar que el equilibrio entre empujes y contrarrestos era posible. Además, puede demostrarse, haciendo uso del mismo teorema del análisis límite, que cualquier pequeño movimiento de la estructura (como por ejemplo el asiento de un pilar principal), no puede por sí mismo provocar su hundimiento, siempre y cuando la geometría general no sufra una alteración significativa. Así, el hecho de que el mortero medieval fuese de fraguado lento, capaz de retraer durante años e incluso décadas, sería únicamente significativo en el caso de una estructura en un equilibrio tan precario, que se hubiera desplomado en cualquier caso bajo la acción de una ligera sobrecarga, por ejemplo el viento, o si la retracción fuese capaz de causar algún fallo secundario de un elemento estructural importante que desencadenara un hundimiento catastrófico. En efecto, el análisis que se presenta a continuación muestra que, en su estado original, Beauvais estaba en equilibrio. Por tanto, el análisis general de la estructura *a posteriori* es irrelevante como método para averiguar las causas que provocaron el hundimiento de las bóvedas en 1284. Sin embargo, la conclusión que podemos extraer de dicho análisis es que el colapso tiene que atribuirse bien a causas esencialmente triviales, pero de graves consecuencias, o bien a algún suceso impredecible (p. ej. un terremoto). No habiendo noticia de una catástrofe natural así, habrá que buscar la razón del hundimiento más en algún detalle constructivo, que en defectos importantes de proyecto.

Análisis estructural y comparación

La planta de la figura 7.2 es la reconstrucción según Viollet-le-Duc[18] del proyecto original de Beauvais, junto con su idea de cómo podría haberse continuado la nave. Incluso si el número de tramos que conforman la nave es indeterminado, el proyecto de Viollet-le-Duc muestra algo muy parecido a lo que debió pensar el primer maestro; se han dibujado cinco tramos, cada uno de los cuales debió tener la misma estructura. En cierto sentido estos tramos tipo contienen la esencia estructural (y visual) del gótico; los

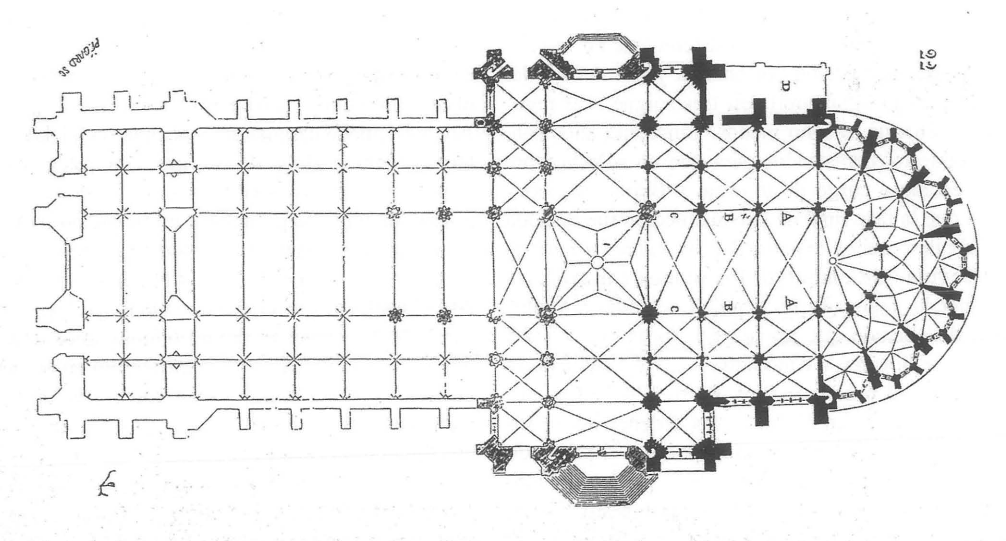


Figura 7.2
Catedral de Beauvais, reconstrucción de la planta original por Viollet-le-Duc

otros elementos que completan la estructura, el ábside, el crucero, e incluso las torres, se deducen de la estructura de los tramos de la nave. Por supuesto,en una catedral real construida bajo diferentes maestros, se modificaba frecuentemente el proyecto según se iba construyendo, por lo que nave y coro pueden tener distinta estructura; en el caso de Beauvais solamente se completó un tramo *tipo*: el segundo tramo al este del crucero (B en la figura 7.2). El siguiente tramo hacia el este (A) forma ya parte del ábside, y el anterior (C) pertenece al crucero. En realidad este tramo es estructuralmente el más crítico del coro, pues no recibe contrarresto adicional ni del ábside ni del crucero. Éste es el tramo que estudió Benouville y que será analizado aquí. La sección transversal del tramo «tipo» según Corroyer[19] se muestra en la figura 7.3(a) y la *coupe restaurée* de Benouville en la figura 7.3(b). Comparando las dos figuras puede apreciarse que la estructura actual tiene dos arbotantes más, añadidos en el siglo XVI; éstos no se tendrán en cuenta en el presente análisis, que intentará ajustarse, en la medida de lo posible, al estado del coro terminado en 1272.

El análisis de Benouville consiste en el dibujo de los polígonos de fuerzas de una docena de cortes de su sección transversal, figura 7.3(b), considerando este ejercicio tan suficientemente directo y esclarecedor (los editores de la enciclopedia también), que no añade explicación alguna al respecto. A modo de ejemplo, la figura 7.4 muestra un croquis de las condiciones de equilibrio en el *tas-de-charge*, sección CC del análisis de Benouville. En el *tas-de-charge* actúan: en primer lugar un empuje inclinado (*pousée totale*) procedente de la bóveda nervada, de 42,5 toneladas; en segundo lugar, una fuerza ligeramente inclinada de 76,2 t producida por el peso de la fábrica sobre el arco formero, el muro superior y la gran techumbre de madera, combinada con un pequeño empuje horizontal procedente del arbotante superior, habiéndose determinado este esfuerzo total de 76,2 t mediante un análisis previo (que Benouville no da) de una sección superior; y, en tercer lugar, dos empujes de magnitud 3 y 5 t respectivamente, procedentes de los arbotantes inferiores. Todas estas fuerzas se suman en el polígono de fuerzas de la figura 7.4(b), y dan una resultante de

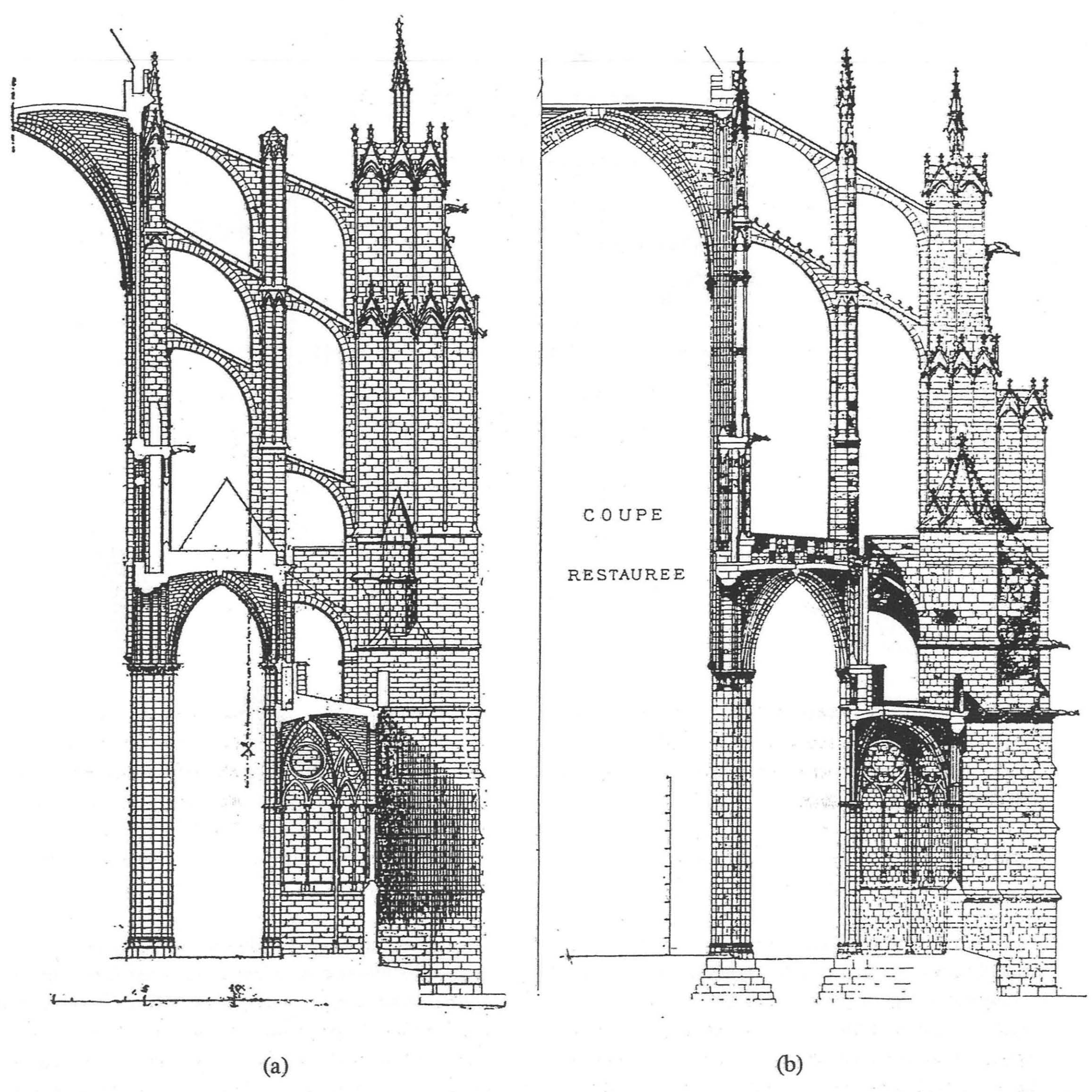


Figura 7.3
Catedral de Beauvais; sección transversal por el coro: (a) Tramo tipo según Corroyer. (b) *Coupe restorée*, según Benouville

111 t a transmitir a la siguiente sección considerada y finalmente, por supuesto, al pilar de la nave principal, y así hasta la cimentación.

Benouville no da explicación alguna sobre cómo determina las fuerzas de 3 y 5 t, respectivamente, procedentes de los arbotantes inferiores (ni mucho menos de por qué descompone una única fuerza en estas dos componentes, aunque como se verá más adelante, su línea de pensamiento resulta bastante clara a este respecto). Sin embargo, de acuerdo con

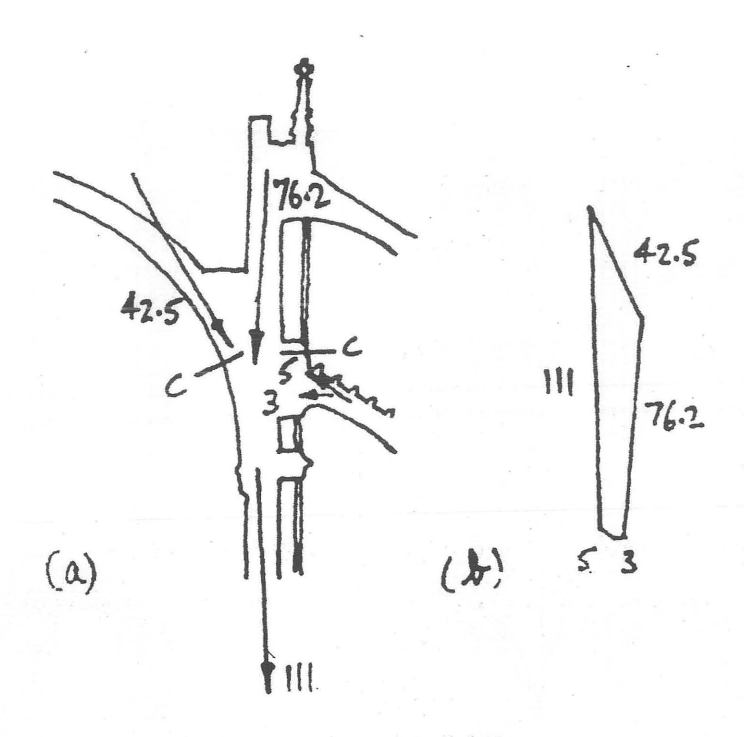


Figura 7.4
Catedral de Beauvais: (a) Fuerzas en el *tas-de-charge* de la bóveda principal. (b) Polígono de fuerzas correspondiente (según Benouville)

los principios del análisis límite aplicado a las estructuras de fábrica, a los que se ha hecho referencia antes, no hay necesidad de justificar los valores de dichas fuerzas. En efecto, lo que Benouville hace es calcular líneas de empujes para la sección transversal completa de Beauvais, cuyo equilibrio se satisfaga en todo punto, como se demuestra en los polígonos de fuerzas. Además, dichas líneas de empujes se localizan en el interior de la fábrica (como tiene que ser); es más, la solución de Benouville maneja empujes localizados en todos los casos muy cerca de la línea central de los miembros. No es necesaria ninguna otra comprobación sobre estabilidad. El teorema de la seguridad del análisis límite establece que, si es posible encontrar una línea de empujes contenida en su totalidad dentro de la fábrica, la estructura es estable, y *no es necesario calcular la verdadera línea de empujes* (en cualquier caso, sería difícil fijar su posición con alguna garantía). Por lo tanto, no hay necesidad de determinar las fuerzas reales que actúan sobre los arbotantes inferiores; si Benouville puede demostrar (como ha hecho), que dos fuerzas de 3 y 5 t aseguran la estabilidad general de la estructura, la estructura será estable bajo cualquier sistema de fuerzas que actúe en los arbotantes.

La solución encontrada dejó atónito al propio Benouville por la magnitud de las tensiones halladas, siendo 13 kg/cm^2 la máxima tensión encontrada en la fábrica.[20] Puede compararse este valor con el de la resistencia media de rotura a compresión de una pie-

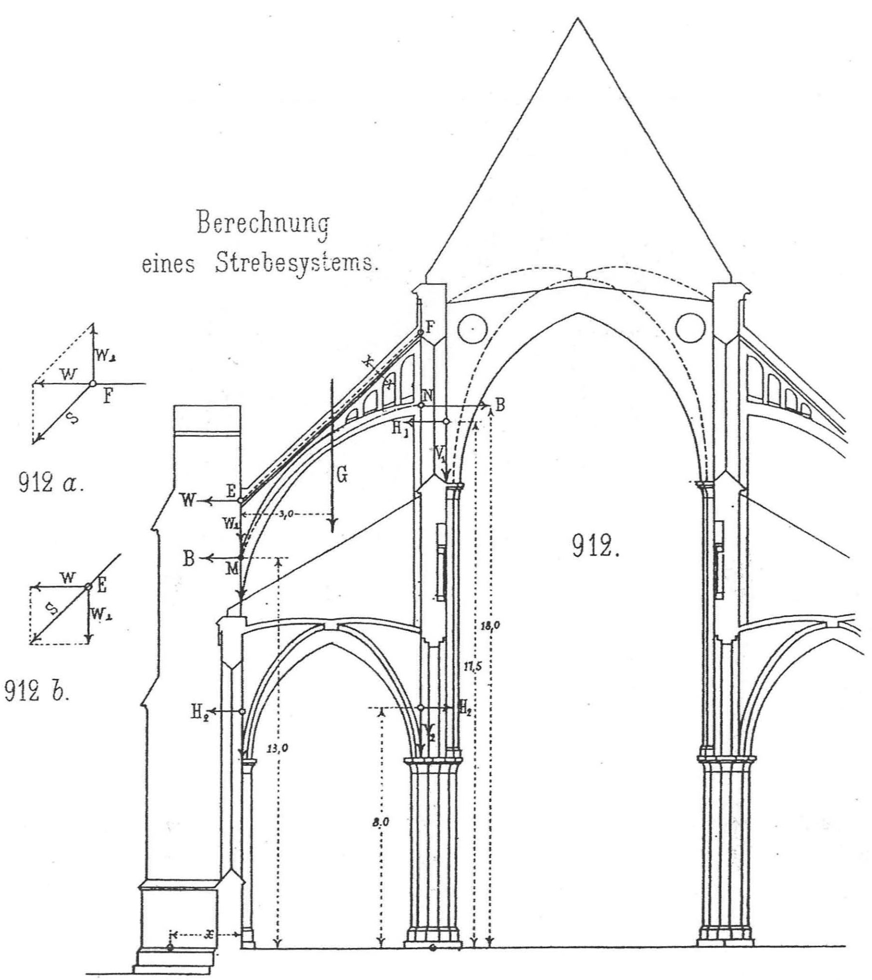


Figura 7.5
Fuerzas que actúan en la sección transversal tipo de una gran iglesia gótica (según Ungewitter)

dra arenisca normal, que varía entre 150 y 400 kg/cm^2 (Ungewitter[21]), lo que confirma el bajo nivel tensional, que se encuentra generalmente en las construcciones góticas. Si bien Benouville no pudo tener la reconfortante seguridad que sobre la corrección de su análisis aporta la teoría del análisis límite en las estructuras, su método ya había sido utilizado con anterioridad en el caso de las fábricas, entre otros por Poleni en el análisis de la cúpula de San Pedro[22] y por Yvon Villarceau en el proyecto de puentes.[23] En cierto sentido, el ingeniero o arquitecto ha determinado siempre lo mejor que ha podido, un conjunto «razonable» de fuerzas sobre el que basar su cálculo de la estructura; en la actualidad, la teoría del análisis límite ha hecho respetables este tipo de conjeturas pragmáticas.

Ungewitter utiliza sin disimulo una distribución ideal final de fuerzas, para el cálculo de la magnitud del empuje de un arbotante. En la figura 7.5, donde se reproduce la figura 912, lámina 87, de Ungewitter, se muestran las fuerzas principales que actúan en una sección transversal tipo. Considerando en primer

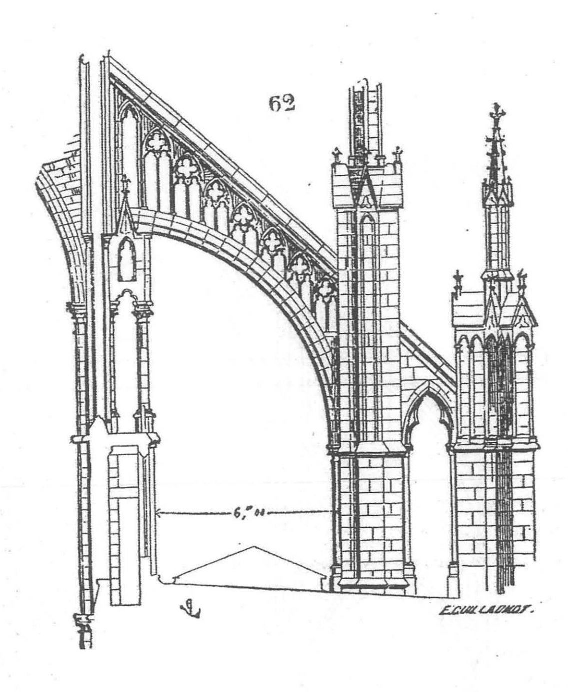


Figura 7.6
Catedral de Amiens; arbotantes originales (Viollet-le-Duc)

lugar el pilar principal, Ungewitter calcula el empuje H_1 de la bóveda superior y la reacción vertical V_1, y análogamente, el empuje H_2 de la bóveda de la nave lateral y la reacción V_2. Considerando el peso de los muros, etc., soportado excéntricamente por el pilar, la cuestión es entonces averiguar la magnitud *B* del empuje del arbotante, necesaria para que la línea global de empujes pase precisamente por el punto medio de la base del pilar.[24] Tomando momentos respecto a este punto medio, el valor de *B* quedará inmediatamente definido (en el ejemplo de Ungewitter donde $H_1 = 3{,}24$ t, el valor de *B* será 3,02 t.

Puede apreciarse en la figura 7.5 que un arbotante está formado por dos nervios, de los cuales el inferior es curvo; ambos transmiten el empuje *B* hasta el botarel, y el inferior, a su vez, soporta el nervio recto superior. Ungewitter supone que normalmente dicho nervio superior se encuentra descargado, pero que actúa como riostra ante el viento, necesaria para soportar la parte alta de la estructura. La carga *W* que actúa sobre este nervio, se calcula a partir de la carga de viento que actúa sobre la cubierta y parte del muro. Los dos nervios se encuentran sólo parcialmente separados en el ejemplo de catedral relativamente baja considerado por Ungewitter; en el caso de Amiens están completamente separados, debido a la mayor altura de la construcción (figura 7.6[25]). La solución de Amiens resultó insatisfactoria, casi con toda seguridad por la tracería de conexión entre los dos nervios;[26] en la actualidad, sólo en el ábside continúan existiendo arbotantes de este tipo; los arbotantes de la nave, de diseño similar, pandearon, siendo sustituidos en el siglo XV.

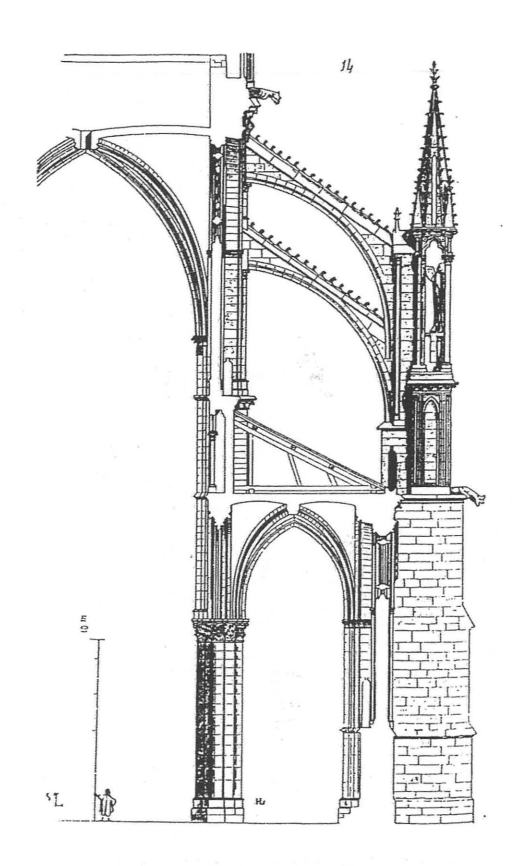
Aunque el arbotante inferior de Beauvais es completamente macizo, Benouville evidentemente continúa considerándolo formado por un nervio curvo que soporta una riostra recta y, para obtener la distribución deseada de empujes en la estructura global,

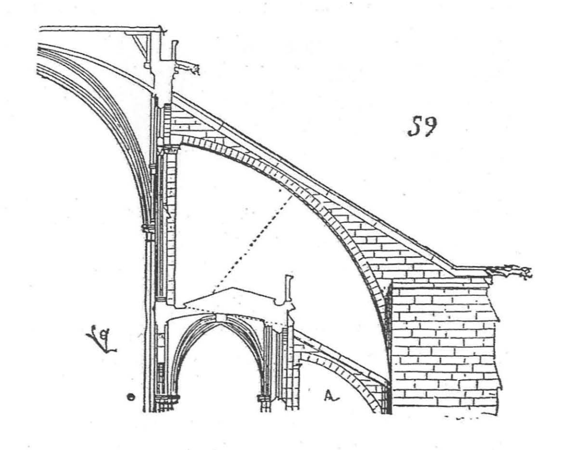
encuentra necesario añadir al empuje horizontal de 3 t producido por el nervio curvo, un empuje inclinado de 5 t procedente del nervio superior. Como se señaló anteriormente éste es un procedimiento absolutamente legítimo. Aceptando la validez del análisis de Benouville, un examen (realizado más adelante) de la magnitud de las fuerzas actuantes en la fábrica de Beauvais puede ayudar a comprender la forma particular que se da a la estructura y, en especial, a los arbotantes.

El principal requisito de proyecto de un sistema de arbotantes consiste en proporcionar contrarresto, tanto al empuje estático de las bóvedas, como a la carga dinámica del viento cuya resultante actúa mucho más arriba. En la nave de Reims, figura 7.7,[27] se consiguió un diseño en apariencia absolutamente satisfactorio consistente en dos arbotantes; Fichten[28] ha señalado que cuando se usa este doble sistema, el arbotante inferior absorbe el empuje de la bóveda, actuando el superior como riostra contra el viento. La separación de los dos arbotantes viene dictada por la altura del muro por encima del *tas-de-charge*; en el ejemplo de Ungewitter, figura 7.5, donde la altura de su catedral es aproximadamente la mitad que en Beauvais, la separación es pequeña.

La altura del muro superior está a su vez relacionada con el grado de peralte que el proyectista haya dado a las bóvedas. El muro será alto si las bóvedas son prácticamente cilíndricas, con líneas de clave a nivel, como en Beauvais (figura 7.3(b)) o en Reims (figura 7.7). Si las bóvedas son marcadamente cupuliformes, como las de Notre Dame de París, figura 7.8,[29] resulta posible el uso de un único arbotante que contrarreste a la vez el empuje de la bóveda y la fuerza del viento.

Ahora bien, el gran arbotante de París salva *dos* naves laterales; un arbotante de tales dimensiones es inusual. Estaba más extendido el uso de un pilar intermedio, como fue el caso de París en su estado original; en la figura 7.9[30] se muestra el estado a finales





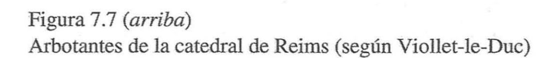


Figura 7.7 (*arriba*)
Arbotantes de la catedral de Reims (según Viollet-le-Duc)

Figura 7.8 (*abajo*)
Arbotantes de la catedral de Notre Dame de París (según Viollet-le-Duc)

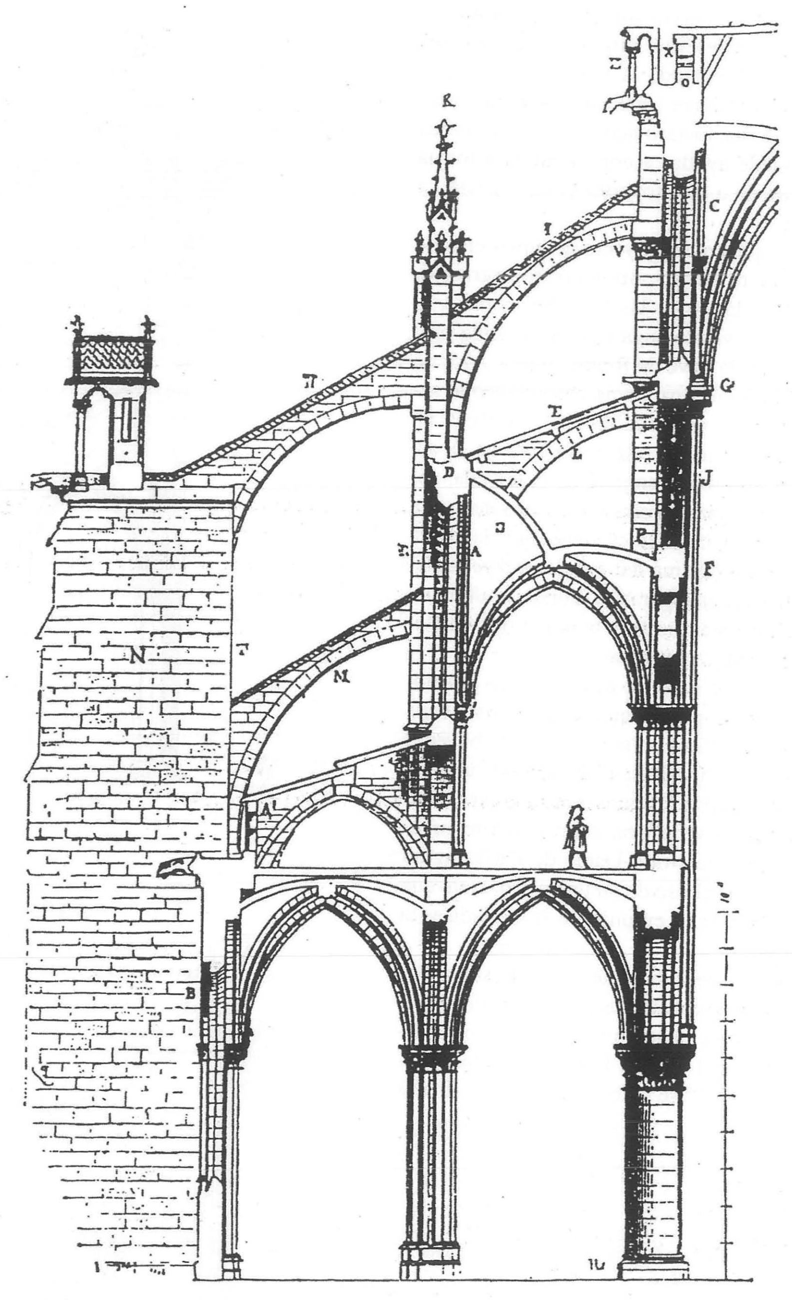


Figura 7.9
Notre Dame de París; estado a finales del siglo XII (según Viollet-le-Duc)

del siglo XII. Este diseño fue destruido y se reconstruyó tal como lo vemos hoy en día, hacia mediados del siglo XIII.[31] De manera similar, el *choir* de Reims, que presenta dos naves laterales a cada lado, utiliza pilares intermedios en su sistema de contrarresto. Y, como es bien conocido, Beauvais tiene pilares intermedios en *porte-à-faux*.

La sección tipo de Beauvais presenta un ritmo estructural en sentido axial de unos 9 m, es decir, consideraremos que la distancia entre ejes de pilares es de 9 m. Así, dado que el coro tiene una luz de 15 m, el área en planta de un tramo tipo es de unos 135 m², y el peso de las bóvedas de un semitramo será, según Ungewitter,[32] de 36 t. La tabla de Ungewitter da también la línea de acción de las fuerzas en la bóveda, que se representan en el esquema de la figura 7.10. La línea de acción del empuje horizontal *H*, situado 6,5 m por debajo de la clave de la bóveda, coincide exactamente con la posición del *tas-de-charge* de Beauvais. Para que haya equilibrio $H \times 6{,}5 = 36 \times 3{,}6$, de donde H será igual a 20 t. La reacción inclinada $R = \sqrt{20^2 + 36^2} = 41{,}2$ t concuerda bastante bien con la *pousée totale* de Benouville de 42,5 t; el ángulo de inclinación del empuje resultante (arc tg (36/20) = 61°) también coincide. Así, un empuje horizontal de 20 t actúa sobre el *tas-de-charge*; como demostró Benouville, no es necesario transmitir la totalidad del mismo al arbotante.

En la figura 7.11 se muestra el esquema del arbotante inferior, que salva una luz de 4,5 m entre el *tas-de-charge* y el pilar intermedio, con un peso de aproximadamente 5 t. La línea de puntos corresponde a la línea de empujes pasivos[33] correspondiente al mínimo empuje horizontal posible, que se necesita para la estabilidad del arbotante (es decir, en el caso de no existir bóveda, el arbotante empujaría contra el *tas-de-charge* con una fuerza de valor mínimo, para este caso, de 1,1 t). El arbotante superior, normalmente descargado, también empuja contra la fábrica con un empuje mínimo de magnitud similar.

La función del pilar intermedio parece ahora clara. De haberse omitido, cada arbotante hubiera debido salvar una distancia de 9,5 m, en vez de los 4,5 m de la figura 7.11. Las reglas de proyecto eran reglas numéricas; el arbotante de 9,5 m de luz hubiera sido, casi con toda seguridad, semejante al de 4,5 m de luz; todas sus dimensiones deberían haberse aumentado en la misma proporción de 9,5/4,5. Haciendo crecer la figura 7.11 linealmente en esta proporción,

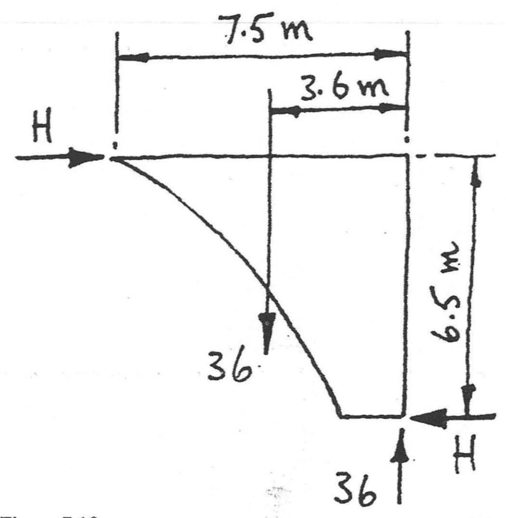


Figura 7.10
Catedral de Beauvais; fuerzas en el *tas-de-charge* (t)

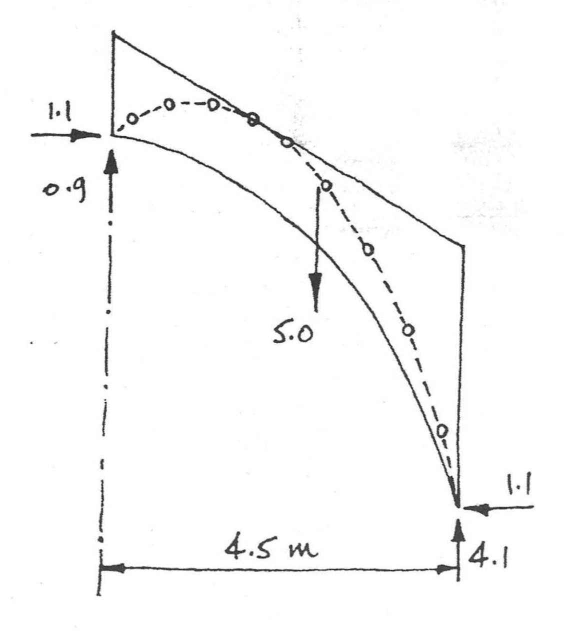


Figura 7.11
Catedral de Beauvais; fuerzas en el arbotante inferior, tendido entre el *tas-de-charge* y el pilar intermedio (t)

todas las fuerzas se multiplicarían por un factor $(9,5/4,5)^3$, es decir, el arbotante pesaría ahora 47 t, y el mínimo empuje pasivo sería de 10,3 t. El arbotante inferior seguiría siendo válido, ya que transmitiría una parte, entre 10,3 y 20 t, del empuje total de 20 t de la bóveda.

El arbotante superior, sin embargo, empujaría contra el muro superior, plano, con una fuerza mínima de unas 10 t, pudiendo causar algún daño en la fábrica de esta zona.[34] La introducción de un pilar intermedio produce una disminución radical de los empujes pasivos de los arbotantes, transformándolos en elegantes «riostras», que apenas empujan contra la fábrica en estado de reposo, pero capaces de absorber enormes empujes contra viento si fuera necesario.

La relativa estrechez de las naves laterales de Beauvais ayuda a conseguir esta elegancia. Los arbotantes sobre la nave lateral de Reims, figura 7.7, salvan una luz de 7,5 m, siendo el empuje pasivo de cada uno de $(1,1)(7,5/4,5)^3$, unas 5 t. La fábrica de Reims es, en conjunto, muy pesada; las bóvedas tienen unos 0,6 m de espesor (lo habitual son 0,2 m) y los muros superiores son enormes.

Los grandes arbotantes únicos de París salvan una luz de 11 m; consideraciones análogas de semejanza darían un empuje pasivo de 16 t, valor que se corresponde bastante bien con el que se obtiene del cálculo.[35]

Es interesante calcular las cargas de viento. Fitchen[36] estima que los arbotantes superiores de Reims están sujetos a una carga máxima de viento de 15 t. En Beauvais, si la gran cubierta presenta un área (por tramo de fábrica) de $12 \times 9 = 108$ m^2 expuesta al viento, y consideramos una carga de viento de 150 kg/m^2, obtendremos que la fuerza del viento sobre la cubierta es de unas 16 t. Además, ambos arbotantes tienen que resistir la presión del viento sobre el muro vertical del coro.

Aún no hemos comentado los *porte-à-faux* de los machones intermedios. Aunque no están dispuestos verticalmente sobre los pilares, en modo alguno puede decirse que estén erróneamente colocados. Si hubieran sido colocados más hacia el *interior*, digamos sobre el centro de la nave lateral, Viollet-le-Duc hubiera estado de acuerdo en que con un diseño apropiado el arco de la nave lateral los podría haber soportado. Es más, debería invertirse la pregunta: ¿Puede pensarse en algún mecanismo de colapso posible para los machones intermedios? La respuesta, como en el caso de los arbotantes de Beauvais, es no; solo el colapso de los botareles principales exteriores, permitiría el consiguiente hundimiento de los pilares intermedios.

Así pues, la fábrica de Beauvais hacia 1272 parece estar casi perfectamente proyectada para cumplir su función. No se ha hecho ningún comentario sobre los botareles exteriores, pero el análisis de Benouville demuestra que son muy estables. De igual modo, no se ha prestado atención al diseño de los plementos de la bóveda; es extremadamente improbable que dichos plementos se hubiesen venido abajo aisladamente, y es evidente que no fue este el tipo de catástrofe acaecida en 1284. Por tanto, no podemos desestimar la posibilidad de que el colapso comenzase en un accidente sin importancia, extendiéndose posteriormente a la totalidad de la fábrica. Es más, Viollet-le-Duc da una explicación de este tipo.

Su sección transversal se muestra en la figura 7.12(a);[37] el corte no está dado por un tramo tipo, sino por el ábside, lo que permite, como se ve en la planta de la figura 7.2, situar el botarel principal más hacia el interior. En la figura 7.12(b)[38] se muestra una vista en perspectiva.

Viollet-le-Duc considera que las esbeltas columnas geminadas A (figura 7.12(b)) fallaron.[39] El mortero, secando lentamente en el pilar contiguo B retrajo (quizá porque, como cree Benouville, el trabajo se realizó con demasiada rapidez) transmitiéndose más y más carga sobre las columnas, hasta que éstas rompieron. Como consecuencia, el dintel L se fracturó y el gran bloque M, el *tas-de-charge,* cargado con la gigantesca estatua N, perdió su apoyo. Viollet-le-Duc piensa que, en ese momento, se produjeron grandes deformaciones, lo que resulta bastante plausible, y sugiere que el bloque M se deslizó hacia afuera. Sin embargo parece más probable que el bloque M se inclinara hacia afuera, desviando de este modo la línea de empujes (a puntos en la figura 7.11) fuera de la sección del arbotante, que entonces se habría derrumbado. No habría nada para contrarrestar el empuje de la bóveda; ésta se habría hundido en ese tramo, casi con toda seguridad de forma completa a través del coro, de manera que, al menos la totalidad de un tramo de bóveda, se habría venido abajo. Dado que cada tramo se apoya en el contiguo, puede que la ruina se hubiera propagado en dirección axial.

La estructura gótica típica es, en efecto, ejemplo de un conjunto de elementos estructurales, que

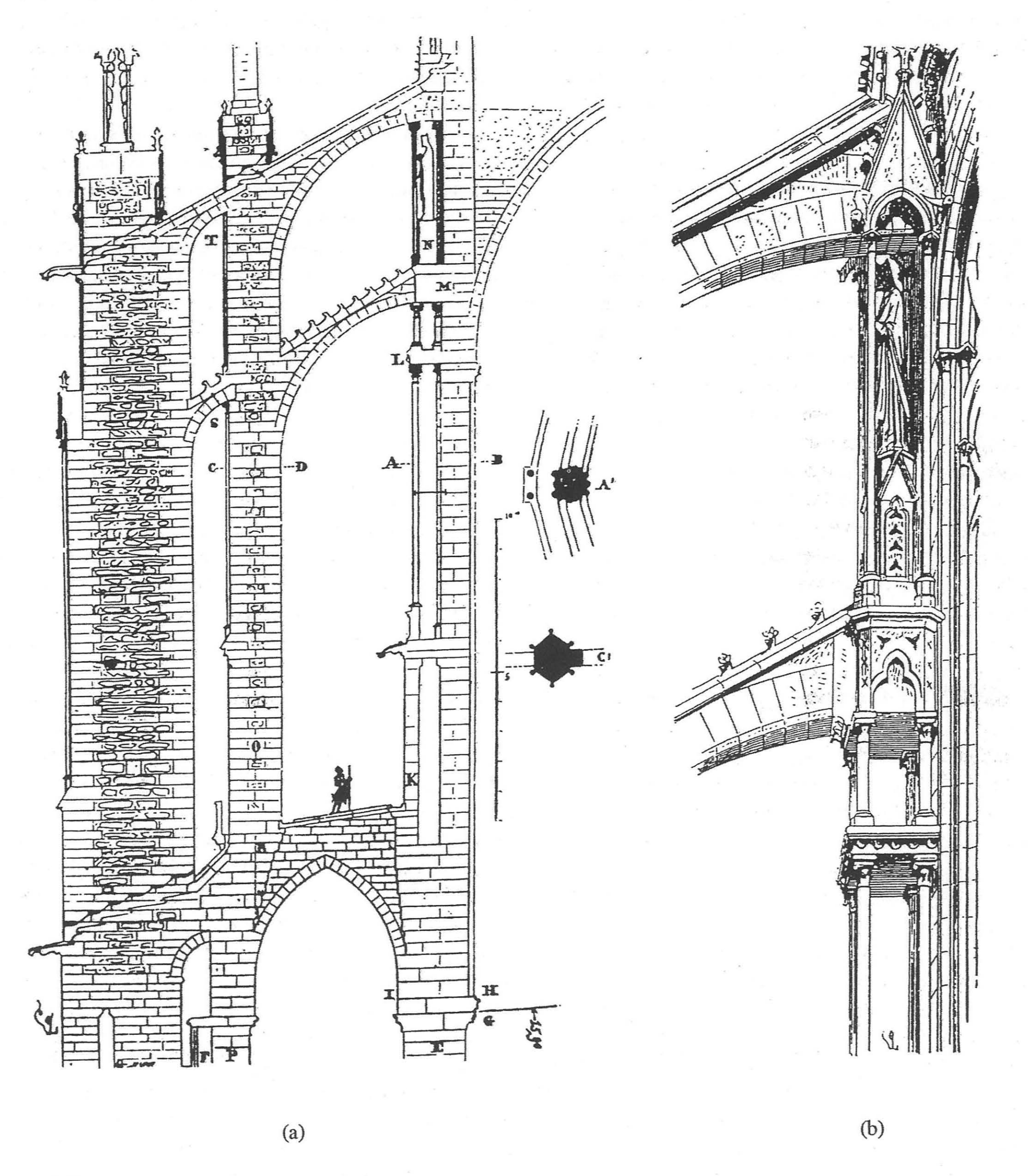


Figura 7.12
Catedral de Beauvais: (a) Sección por el ábside. (b) Dibujo en perspectiva de la parte superior del pilar del ábside (según Viollet-le-Duc)

interactúan los unos con los otros, asegurando el equilibrio general del conjunto. La estructura puede acomodar en su interior una amplia gama de sistemas de fuerzas, pero si se le quita una pieza, todo el resto puede irse abajo. Sin embargo, sin accidentes triviales como el que hemos visto, y dejando de lado los Actos de Dios, la estructura en su conjunto era tan estable que hubiera perdurado durante siglos.

* * *

Estimando el peso de la torre de Jean Vast en 2.000 t y tomando como área de cada uno de los pilares del crucero 3 m^2, la torre hubiese supuesto un incremento de tensión de aproximadamente 16 kg/cm^2. Es un incremento pequeño y una vez más no es la *resistencia* del material la que rige el comportamiento estructural. No parece haber muchas dudas de que si se hubiesen tomado en consideración las recomendaciones de los canteros del Rey en 1571, y se hubieran arriostrado los pilares del crucero, la torre podría estar en pie hoy en día. Al parecer la estructura, nunca estuvo en equilibrio desde 1569, fecha en que se completó la torre, hasta 1573, en que se derrumbó. Desjardins informa[40] sobre innumerables pequeños movimientos, y Leblond[41] sobre roturas aparecidas durante esos cuatro años.[42]

La estructura formada por una torre maciza soportada sobre cuatro pilares aislados es capaz de «irse», estando sus movimientos únicamente contenidos por esfuerzos cortantes y de tracción generados por el mortero, y por la posible trabazón de las piedras. Sin embargo, finalmente, las columnas se habrían desplomado tanto que serían inútiles. El Capítulo tuvo razón al decretar la interrupción de las obras en 1605; «le temps n'était plus à bâtir des cathédrales».[43]

8

Construcción «gótica» en la antigua Grecia

El hecho de que la arquitectura griega y la gótica sean, visualmente, tan distintas conduce a la idea de que las estructuras de fábrica se comportan de manera diferente en los dos estilos. Sin embargo, el estudio de la mecánica de las fábricas no apoya esta hipótesis. Ello no implica que los arquitectos griegos y góticos tuvieran la misma idea sobre sus edificios; en realidad, no es probable que hayan pensado en las estructuras de la manera en que un proyectista de estructuras moderno consideraría relevante.

Ruskin observó «que las principales diferencias entre los estilos arquitectónicos existentes dependen de los métodos de cubrición de los vanos, como por ejemplo una ventana o una puerta...; es decir, que el carácter de la arquitectura griega... se basa en que salva sus vanos con una sola piedra tendida de lado a lado...; y el carácter de la arquitectura gótica depende de que lo hace con arcos apuntados...».[1] El tipo de dintel «griego» en el que Ruskin pensaba está ilustrado con su propio dibujo (figura 8.1).

Aunque pueda parecer que Ruskin establece las comparaciones entre la arquitectura griega y la gótica desde aspectos puramente visuales, poco después es evidente que también pensaba en las funciones estructurales de los dos estilos. Otros autores hacen una «traducción» más explícita de la interpretación visual a la estructural: por ejemplo, Henri Focillon escribe que «los griegos se oponían a la acción de la gravedad sólo en la dirección vertical».[2] Banister Fletcher hace una afirmación categórica sobre el funcionamiento estructural al escribir que «la arquitectura griega era fundamentalmente arquitrabada (*trabs* = viga)».[3] Así, se supone que los grandes dinteles de piedra de, por ejemplo, un templo griego actuan como vigas entre dos columnas contiguas y por tanto sólo transmiten a las mismas cargas verticales que de éstas pasan a los cimientos. Por el contrario, un arco gótico transmite tanto empujes laterales como verticales. (Banister Fletcher define los estilos románico y gótico como arqueados, que se remontan, en último término a los etruscos.)

Ruskin insiste en que:

> el sistema griego, considerado meramente desde el punto de vista constructivo, es ineficaz y bárbaro, comparado con los otros dos (románico y gótico). Por ejemplo, en el caso de una gran puerta o ventana, como la de la figura 1, si se dispone de una sola piedra grande y alargada, en efecto se puede cubrir el vano a la manera griega, como se ha hecho aquí, con relativa seguridad; pero siempre es costoso conseguir y elevar a su lugar piedras de este tamaño, en muchos sitios es casi imposible obtenerlas: si no se dispone de estas piedras y aún se insiste en salvar el vano a la manera griega, es

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Gothic Construction in Ancient Greece,» *Journal of the Society of Architectural Historians* 31 (1972): 3-9. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

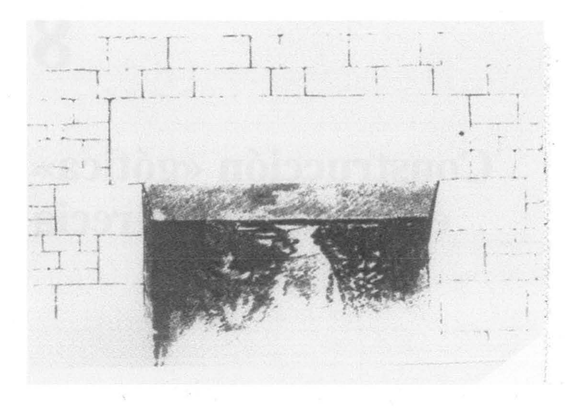


Figura 8.1
Dintel de piedra (Ruskin)



Figura 8.2
Una *plate-bande* de ladrillo

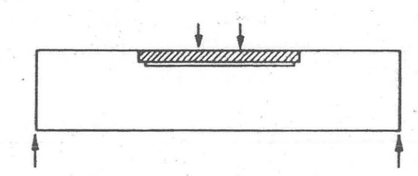


Figura 8.3
Refuerzo metálico en un arquitrabe de los Propíleos, Atenas (según Dinsmoor)

> decir, para conseguir una ventana cuadrada, tiene que hacerse mediante un aparejo de ladrillos miserablemente endeble ... [figura 8.2]; se puede ver inmediatamente que esta pieza transversal es débil e imperfecta.

De este modo, Ruskin está haciendo juicios tanto estructurales como estéticos, aunque su afirmación de que el sistema griego es imperfecto y el arco adintelado miserablemente endeble es, de hecho, un mero aserto. La forma cuadrada ofende la vista de Ruskin y la forma apuntada (explícitamente, como la de una hoja) le agrada.

Viollet-le-Duc expresa consideraciones similares en su diccionario; dedica media página a la *plate-bande*, llamándola dos veces un «*appareil vicieux*».[4] Esto, sin embargo, es por contraste con el dintel griego: «Les Grecs n'admettaient pas l'arc, et s'ils avaient à franchir un espace entre deux piliers, deux pieds-droits ou deux colonnes, ils posaient sur les points d'appui verticaux un monolithe horizontal». Viollet-le-Duc se siente especialmente molesto por la falta de honestidad de la práctica, de finales del siglo XVIII y el siglo XIX, de esconder barras de acero dentro de la fábrica para configurar una estructura auténtica y eficaz (p. ej. la Madeleine, el Panteón francés): «Les architectes du moyen âge, on le comprend, ne pouvaient s'astreindre à mentir de cette sorte aux principes les plus vrais et les plus naturels de la construction, et c'est pour cela que plusieurs les considérèrent comme des gens naïfs.»

Sin embargo, los griegos, en efecto, emplearon hierro oculto en la fábrica,[5] aunque este uso era sólo ocasional. El asunto ha originado cierta controversia,[6] pero parece claro que el hierro de los griegos no se puede considerar propiamente un refuerzo en el sentido moderno. En algunos casos ha podido reducir ligeramente las tensiones (pero ya no lo hace, pues se ha oxidado hace tiempo); generalmente tenía la función de simplificar la construcción, desde el simple trabado de la fábrica (el tesoro de Tebas, Delfos) hasta una especie de andamiaje permanente (como en el Templo de Zeus, Agrigento; véase más adelante).

Los Propíleos de Atenas (Mnesicles, 437 a.C.) es uno de los edificios que en origen ocultaba hierro. Cada arquitrabe está compuesto de dos vigas de mármol de 50 cm de ancho y 80 cm de altura, que salvan unos 3,6 m entre ejes de columnas; la luz entre los ábacos es por supuesto menor que 3,6 m. Estos arquitrabes gemelos estaban acanalados en las caras superiores, donde se insertaba una barra de hierro, de aproximadamante 1,6 m de largo y 75 mm × 115 mm de sección, aparentemente para repartir la carga (figura 8.3). Suponiendo que el funcionamiento estructural del arquitrabe fuera el de una viga a flexión, el introducir barras de hierro reduciría el valor máximo del momento flector en las vigas de mármol aproximadamente a la mitad.

Este sistema constructivo es tan ingenioso como desacertado. Aunque las tensiones resultantes del momento flector se redujesen, todavía existirían tracciones y la piedra es un material poco resistente a tracción. En el estado actual de los Propíleos (figura 8.4) se observará que, a pesar de las precauciones, al menos dos arquitrabes están rotos exactamente en el centro del vano. Esta fractura se ha producido, sin duda, a consecuencia de la corrosión del hierro, lo que ha ocasionado que el peso de las vigas de mármol del techo apoyara directamente sobre los arquitrabes. No obstante, la historia de la fractura carece de importancia y, como veremos, las roturas en sí mismas no son importantes desde el punto de vista estructural.

Ruskin menciona una fractura similar en Edimburgo y describe «la gran iglesia con cúpula, al final de George Street,» cuyo «inmenso dintel horizontal sobre la puerta ya está rajado de arriba a abajo». Sería natural suponer que estas grietas son síntoma de peligro o creer como Pol Abraham que son «signes avant-coureurs de la ruine».[7] Sin embargo, esta creencia no está apoyada en absoluto por el moderno análisis estructural. En efecto, como he expuesto recientemente «el estado agrietado es el estado natural de las fábricas, aunque las grietas pueden ser tan pequeñas que no se vean o estar cerradas por la elasticidad de la piedra».[8]

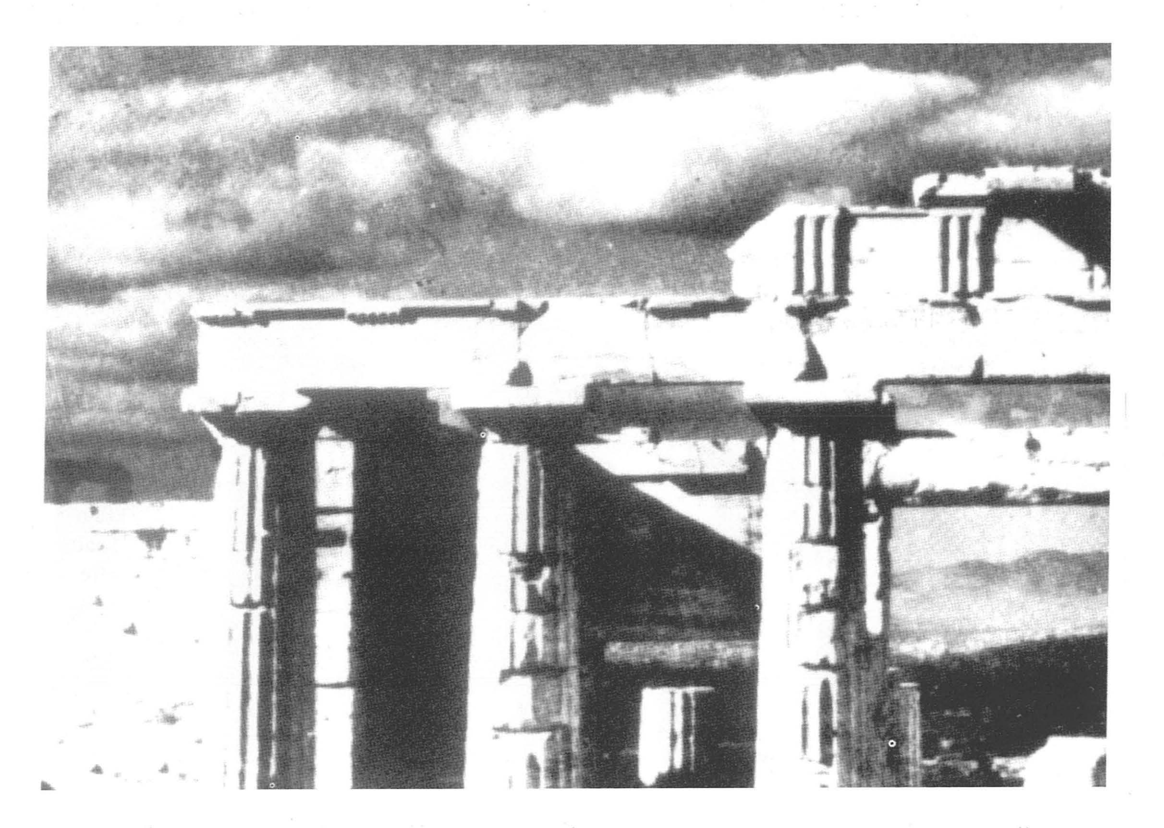


Figura 8. 4
Los Propíleos, Atenas (fotografía del autor)

En la figura 8.5 se muestra una fractura muy patente, en la que el arquitrabe ha descendido levemente formando una grieta en forma de cuña en el centro del vano (Templo de Zeus, Atenas, 174 a.C. y posterior). Indudablemente este arquitrabe no está trabajando como una viga. El modo en que funciona es evidente; las dos mitades del arquitrabe empujan una contra otra en el punto de contacto en la mitad del vano, y se apoyan de alguna manera en la parte superior de las dos columnas. El arquitrabe es, de hecho, una *plate-bande* elemental que sólo consta de dos piedras, el estudio de la *plate-bande* proporcionará una descripción más precisa de las fuerzas estructurales.

En otra parte he analizado recientemente el comportamiento de las estructuras de fábrica, en la hipótesis de que es imposible transmitir tracciones de una parte de la estructura a la contigua.[9] Es decir, estos estudios hacen referencia a lo que es fundamentalmente la construcción de tipo gótico, en la que se unen piedras relativamente pequeñas, ya sea a hueso o con un mortero tan poco resistente que no se puedan transmitir tracciones. Para que estas estructuras sean estables, deben ser capaces de desarrollar una línea de empujes, en equilibrio con su propio peso y con cualquier carga exterior, que se encuentre totalmente dentro de la fábrica, de manera que, de una



Figura 8.5
Templo de Zeus, Atenas (fotografía del autor)

piedra a otra, sólo se transmitan esfuerzos de compresión. Se supone, además, que las fuerzas de rozamiento entre dos partes contiguas de la fábrica son tan altas que no hay peligro de fallo por deslizamiento; normalmente esta suposición se cumplirá, aunque se pueden encontrar ejemplos reales en contra. Por último, las tensiones en las fábricas son tan pequeñas que no hay peligro de rotura por aplastamiento del material.

Dentro del marco que suministran estas hipótesis es posible demostrar algunos teoremas sobre el comportamiento estructural. Se puede demostrar que si es posible encontrar *una* línea de empujes que, para una carga determinada, se encuentre totalmente dentro de la fábrica, la estructura es perfectamente estable para esa carga y no existe posibilidad de colapso. Por el contrario, para demostrar que esa estructura es inestable, es preciso encontrar el correspondiente *mecanismo* de colapso. Ese mecanismo debe implicar el fallo en más de un punto de la estructura, como se puede aclarar considerando un simple arco de dovelas (figura 8.6). Si la carga puntual se aumenta lo bastante, la formación de rótulas en cuatro secciones transversales permitirá un movimiento mecánico y conducirá directamente al colapso.

Para que una estructura en arco falle se necesitan cuatro rótulas; tres no permitirán el colapso libre. Así, en el caso en que los muros portantes se separasen ligeramente, la *plate-bande* (figura 8.2) puede flectar con perfecta seguridad hasta la posición de la figura 8.7; naturalmente, esta es la configuración exacta del arquitrabe del Templo de Zeus en Atenas (figura 8.5). Efectivamente, no hay una disposición de rótulas en las caras superior e inferior de la *plate-bande* que permita formar un mecanismo de colapso. La conclusión debe ser que *independientemente de la carga* y, siempre que los estribos no se separen lo suficiente como para permitir que la *plate-bande* falle por «dislocación» hacia abajo, este aparejo de ladrillos miserablemente endeble *nunca* puede colapsar. El fallo definitivo sólo ocurrirá cuando la carga se incremente tanto que ocasione la rotura del material por aplastamiento.

Las fuerzas que actuan en una *plate-bande* se pueden determinar a partir del esquema de la figura 8.8(a); la flecha del arco es D, y la luz entre los dos estribos rígidos es L. En ella se muestra una línea de empujes parabólica completamente dentro de la fábrica; esta forma de la línea de empujes equilibrará el

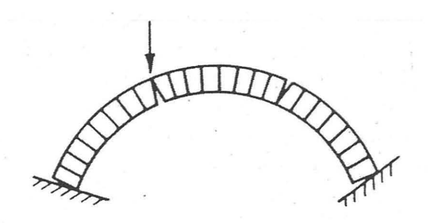


Figura 8.6
Mecanismo de colapso de un arco adovelado

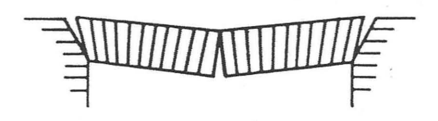
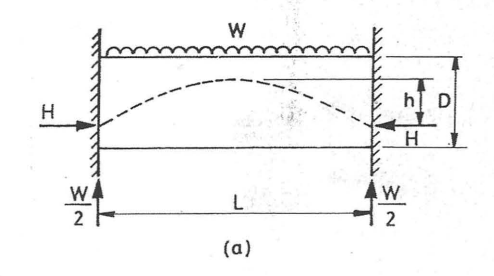


Figura 8.7
Posición estable de un arco adintelado imperfectamente encajado



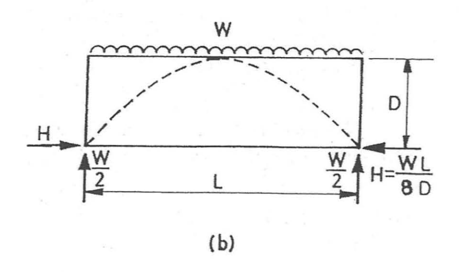


Figura 8.8
Plate-bande: (a) Posible línea de empujes, y (b) línea de empujes límite

peso propio W uniforme del arco, para cualquier altura h de la parábola. Simples consideraciones de equilibrio para esta línea de empujes conducen inmediatamente a la ecuación $H = WL/8h$. Es decir, la *plate-bande* se apoya en los estribos con fuerzas verticales $W/2$, y empujes *horizontales* H, cuyo valor es inversamente proporcional a la altura de la parábola. Así, la *plate-bande* presiona verticalmente los pilares y también empuja hacia afuera.

Si a causa del empuje los soportes del arco se separan ligeramente, se formarán rótulas debido al agrietamiento (figura 8.7). Como el empuje todavía debe transmitirse en el interior de la fábrica, la línea de empujes debe pasar por las rótulas, y su posición queda fijada de modo único, figura 8.8; el correspondiente valor de la componente horizontal H del empuje es el mínimo posible para mantener el equilibrio, ya que la altura h de la parábola es la máxima posible. Este línea de empujes hallada debe ser, necesariamente, la que se obtiene en el arquitrabe partido del Templo de Zeus en Atenas (figura 8.5).

En un arquitrabe sin partir existe, sin duda, la posibilidad de que aparezcan ciertas tracciones; el arquitrabe podría realmente comportarse como una viga y no manifestar nada correspondiente a la línea de empujes de la *plate-bande* de la figura 8.8(b). En este punto, para obtener un análisis seguro del arquitrabe, se pueden aplicar los teoremas estructurales relativos a la fábrica. La figura 8.8(b) se tomará para representar un arquitrabe monolítico, pero dividido hipotéticamente en dovelas paralelas mediante planos de corte verticales; para los fines del análisis, el monolito ha sido reemplazado por una *plate-bande* geométricamente semejante. Como se ha demostrado que la *plate-bande* es una estructura segura, en el sentido de que puede soportar su propio peso y cualquier sobrecarga, entonces *a fortiori* el monolito original también es seguro. Los cortes que convierten el arquitrabe en un arco adintelado sólo pueden haber debilitado la estructura original.

Por tanto no es preciso (aunque puede ser interesante en otro contexto) determinar el comportamiento real del monolito. La línea de empujes de la figura 8.8(b) es un estado poco probable para un arquitrabe sin partir, pero es un estado *posible* de equilibrio. Siempre que se pueda desarrollar el empuje horizontal H (mediante arquitrabes adyacentes, véase más adelante), al igual que la *plate-bande* no puede colapsar nunca, tampoco puede colapsar el arquitrabe. El estado de la figura 8.8(b) no es tan disparatado o improbable si el arquitrabe se rompe (figura 8.5).

Los argumentos de los párrafos anteriores en realidad sólo establecen que, al analizar la estabilidad de una estructura griega arquitrabada, sería sensato suponer que toda la fábrica está agrietada. Si el análisis es satisfactorio para la estructura agrietada, es una prueba definitiva de que la estructura original, agrietada o no, también es estable.

Consideremos ahora el Templo de Afaia, Egina, 490 a.C. (figuras 8.9 y 8.10). En primer lugar se buscará un sistema de fuerzas «seguro» para la estructura existente. A partir de las dimensiones indicadas (figura 8.11) se observará que los intercolumnios se reducen en los vanos extremos; en consecuencia, el último arquitrabe sólo salva una luz entre ábacos de 1,25 m en vez de los 1,43 m de los vanos interiores. Suponiendo que los arquitrabes están agrietados, se pueden dibujar las líneas de empuje para la fábrica sobre vano (figura 8.12). El arquitrabe mide aproximadamente 850 mm × 850 mm (y está dividido, como es habitual, en dos mitades); los pesos de la *plate-bande* sobre vano se han calculado suponiendo un peso específico de la arenisca de 20 kN/m^3.

Los empujes horizontales de la figura 8.12 se obtienen dando valores a la expresión $H=WL/8D$ (véase la figura 8.8(b)). Se observará que, de las seis columnas del alzado este, las dos centrales están exactamente en equilibrio ya que los empujes horizontales de 4,3 kN se anulan entre sí. Si el alzado hubiera tenido ocho columnas, como en el Partenón, las cuatro columnas centrales estarían en equilibrio con tal que los intercolumnios sean iguales. Sin embargo, la primera columna interior en cualquiera de los lados presenta un leve desequilibrio por empuje horizontal a la altura del ábaco de 1 kN. A este respecto, las columnas de esquina están en la peor situación, con un desequilibrio de 3,3 kN (figura 8.12).

Siempre que se puedan desarrollar estos empujes horizontales, los arquitrabes serán en sí mismos completamente seguros. La estabilidad de toda la estructura quedará asegurada, por tanto, si se puede demostrar que las columnas pueden resistir los empujes desequilibrados. Las columnas de esquina son las más críticas; la figura 8.13 muestra la columna de la esquina sudoeste, y se hará una valoración de su tendencia al vuelco. El peso de la columna, más el peso del trozo de arquitrabe apoyado directamente sobre



Figura 8.9
Templo de Afaia, Egina (fotografía del autor)

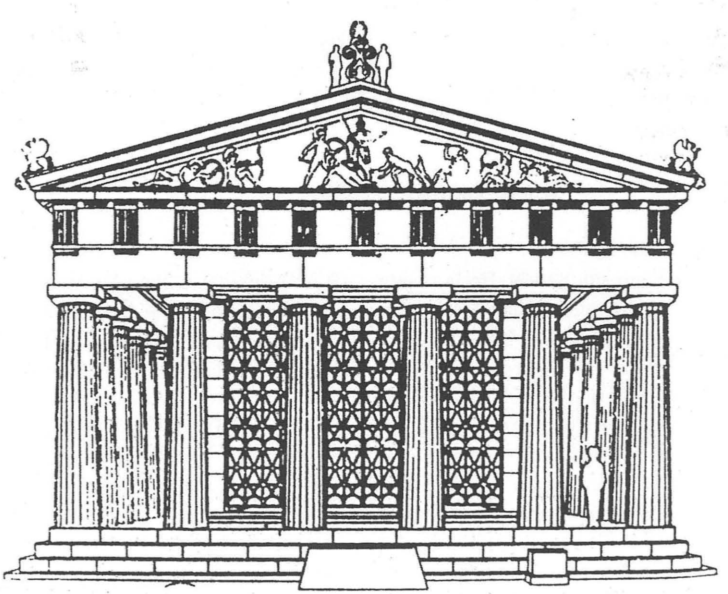


Figura 8.10
Templo de Afaia, Egina. Reconstrucción del alzado este (según Banister Fletcher)

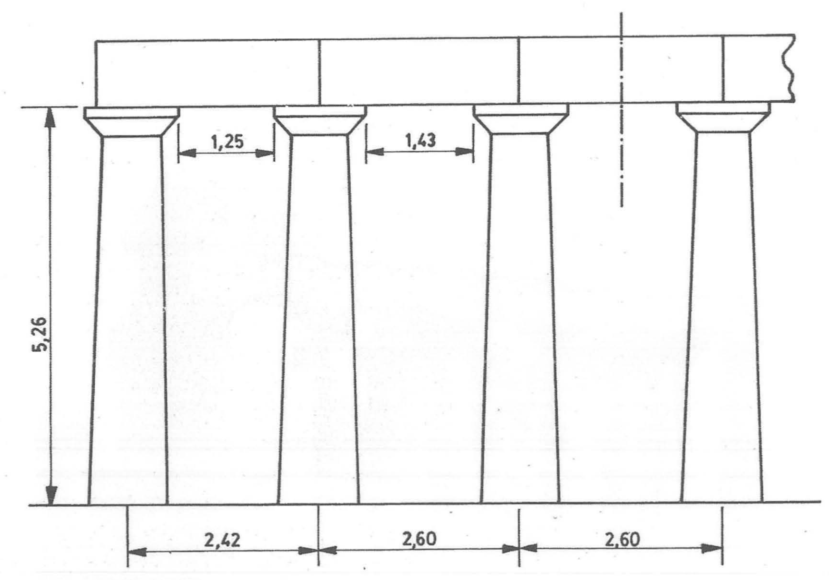


Figura 8.11
Templo de Afaia, Egina. Dimensiones principales

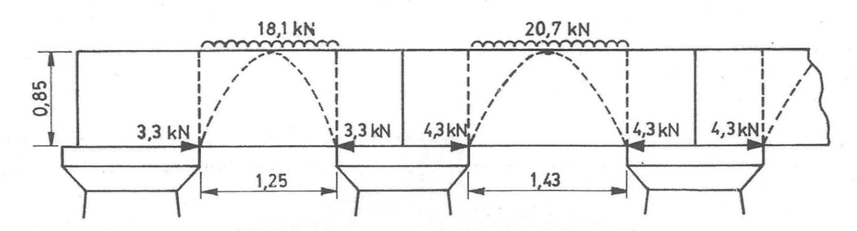


Figura 8.12
Templo de Afaia, Egina. Posibles esfuerzos del arquitrabe existente

el ábaco es de aproximadamente 83 kN. En la planta se muestran los *dos* empujes que actúan a la altura del ábaco, uno desde el arquitrabe del alzado este, y otro desde el del alzado sur. Así la columna de esquina está afectada por un empuje horizontal resultante de $3{,}3\sqrt{2}=4{,}7$ kN en dirección sudeste.

Debido a este empuje, la reacción vertical en la base de la columna (101 kN) se desplazará una cierta ditancia e. Cuando el valor de e alcanza exactamente el del radio de la columna (0,54 m), ésta estará a punto de volcar; si e es menor que este valor, la columna será estable. La tendencia al vuelco está parcialmente contrarrestada por las cargas verticales (9 kN) debidas a los arquitrabes, que actuan con un brazo de palanca efectivo de $0{,}58/\sqrt{2}=0{,}41$ m. Tomando momentos en la base de la columna, el valor de e se halla a partir de la ecuación:

$$101\,e = (4{,}7)(5{,}26) - 2(9)(0{,}41)$$
$$= 24{,}7 - 7{,}4$$

de donde, $e = 0{,}17$ m.

Por tanto la línea de empujes de la columna de esquina se encuentra cómodamente dentro de la columna, siendo la excentricidad de tan sólo 17 cm en la base, donde el radio es de 54 cm.

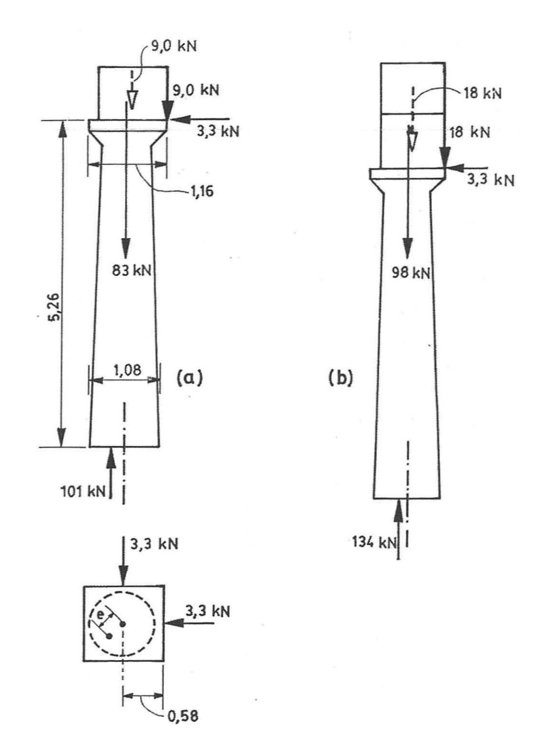


Figura 8.13
Templo de Afaia, Egina: (a) esfuerzos en la columna sureste, y (b) esfuerzos debidos al total del arquitrabe

Este análisis proporciona un estimación segura del comportamiento *actual* de la columna sudeste (figura 8.9). El añadir una segunda hilada de sillería para componer el friso sólo puede aumentar la seguridad de la estructura (en la esquina nordeste, parte del friso está en su sitio). A partir del análisis de la *plate-bande* (figura 8.8), se observará que si se duplica el canto D, el valor H del empuje horizontal permanecerá invariable, ya que el valor del peso propio W también se ha duplicado. Así en la figura 8.13(b) las cargas verticales se incrementan en comparación con las señaladas en la figura 8.13(a), pero los esfuerzos horizontales son los mismos. La nueva ecuación para calcular la excentricidad e de la línea de empujes en la base de la columna es:

$$134\ e = 24{,}7 - 14{,}9$$

de donde $$e = 0{,}07 \text{ m.}$$

es decir, la línea de empujes es excéntrica sólo 7 cm.

El añadir las cornisas y el frontón mejorará la situación aún más, y probablemente se puede encontrar una línea de empujes definitiva que sea casi concéntrica con la base. La reducción del intercolumnio en los vanos extremos sin duda colabora pero, de hecho, las columnas de la esquina de Egina serían también estables para un empuje horizontal de 4,3 kN (figura 8.12) en vez del valor reducido de 3,3 t. Sin embargo, la sensación de estabilidad visual que proporciona la reducción del intercolumnio en los vanos extremos se confirma, indudablemente, con el análisis estructural, y esta disposición se empleaba con frecuencia (p. ej. en el Partenón).

En las dobles pilastras extremas del Banqueting Hall, Whitehall (Iñigo Jones, 1619) se puede encontrar un empleo puramente visual de esta disposición; estas pilastras no tienen función estructural pero no obstante reflejan un cometido estructural en origen (este comentario se puede extender a gran parte de la arquitectura renacentista). Como ejemplo gótico de solución estructural del problema, podemos señalar las arcadas del Palacio de los Dogos en Venecia (1309 y posterior); aquí la columna de esquina tiene un diámetro considerablemente mayor para conferir estabilidad contra los esfuerzos de vuelco horizontales, pero la presencia de tirantes entre los arcos estropea el efecto visual.

Estos cálculos demuestran que un edificio de las proporciones del templo de Egina y con la fábrica agrietada, es estable. De las observaciones anteriores se deduce que el templo original, agrietado o no, también era estable. La destrucción (aparte de la ocasionada a intencionadamente) sólo la ocasionaría el deterioro de la fábrica o algún cataclismo, como por ejemplo un fuerte terremoto. Un ligero temblor de tierra, que quizá provocase algún asentamiento, no originaría más que el agrietamiento de la fábrica. Con independencia de que los arquitrabes originales funcionasen o no como vigas, su supervivencia la aseguraría en definitiva el que también pudieran trabajar como *plate-bandes* que únicamente transmiten esfuerzos de compresión.

De hecho, y desde el estricto punto de vista del funcionamiento estructural, no existen diferencias claras entre lo que se considera una estructura griega y lo que se considera una estructura gótica. La griega es en apariencia monolítica, pero sólo es estable porque los monolitos se pueden romper con seguridad

en bloques del tamaño de los góticos. Por tanto, cualquier definición estructural del gótico podría aplicarse también a las construcciones griegas.

Choisy caracteriza el gótico por la bóveda nervada y el arbotante, y rechaza el arco apuntado como carente de importancia; curiosamente, empieza su exposición señalando que los materiales disponibles (como en el románico) eran pequeñas piezas de piedra: «c'est à l'aide de moellons et de pierres presque toujours de petit échantillon que furent élevées nos cathédrales».[10] Así, el gótico es el arte de construir grandes estructuras a partir de pequeños fragmentos.

Ahora bien, una estructura construida con piedras pequeñas debe conseguir la estabilidad necesariamente con algún tipo de funcionamiento en arco; si se trata de un espacio abovedado, la estructura resultante empujará lateralmente, y requerirá estribos. El nervio es el reflejo visual del empuje lateral de la bóveda, el arbotante es el contrarresto efectivo a este empuje. La presencia de arbotantes siempre indicará una bóveda de fábrica, no de madera («voyez Notre-Dame du côté du chevet: qui donc pourra dire que ce n'est pas là un monument étayé?»).[11]

Sin embargo, no es preciso insistir con excesiva literalidad en las dobles *essences* de Choisy. La capilla del King's College no tiene ni bóvedas nervadas ni arbotantes, pero es total e incontestablemente gótica; la bóveda de abanico empuja hacia afuera (quizá menos que una bóveda nervada),[12] y el empuje lo absorben directamente los estribos. Las características ineludibles de la construcción de fábrica, ya sea gótica o griega, son el empuje y el contrarresto.

En edificios pequeños (los Propíleos y el Partenón de Atenas, el templo de Egina) los arquitectos griegos utilizaban arquitrabes monolíticos entre ábacos monolíticos; este sistema constructivo «estándar» ha llevado a la noción de que los arquitectos griegos suscribieron ciertos principios estructurales, entre ellos la idea de que la acción de la gravedad se resiste «sólo en la dirección vertical».

En el templo de Zeus, Agrigento (Theron, 470 a.C., sin terminar) el vano entre los ábacos de las semicolumnas era de más de 3,5 m, estando los ejes de las columnas a 8 m (figura 8.14). El arquitrabe no era un monolito, estaba hecho de varias hiladas, con una junta en la hilada inferior precisamente a la mitad de la luz. Aparentemente, para salvar el vano entre los

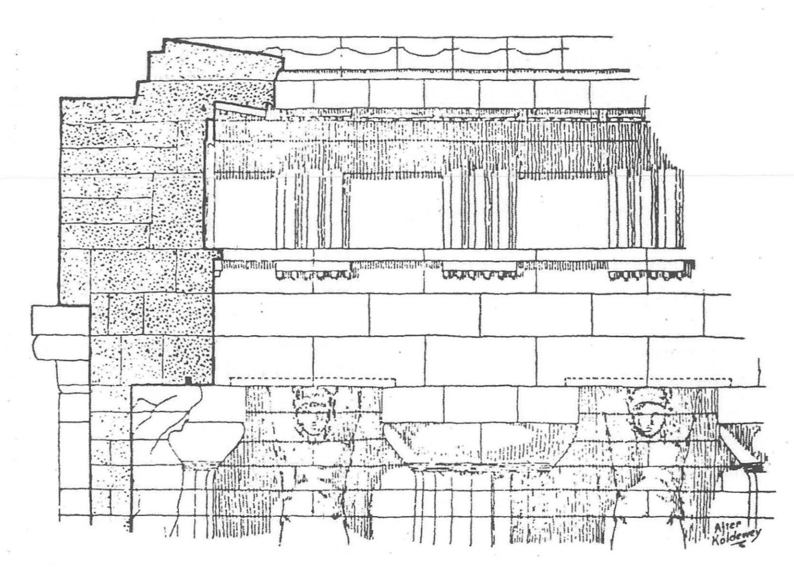


Figura 8.14
Templo de Zeus, Agrigento (según Dinsmoor)

ábacos, y colocar y apoyar la primera hilada durante la construcción, se usó una viga de hierro (de unos 100 mm × 200 mm); como señala Jewet, el hierro no podría haber alcanzado en la estructura original suficiente tensión como para proporcionar un refuerzo efectivo. Así, el arquitrabe completo sólo podría mantenerse funcionando como un arco entre las columnas, con los consiguientes empujes laterales. En este caso, al menos, los griegos emplearon dinteles partidos deliberadamente y no se adhirieron al principio arquitrabado que se les atribuye. Aunque Ruskin formulase de modo confuso sus propios principios estructurales, esencialmente tenía razón: «Stonehenge es suficientemente resistente, pero construir al modo de Stonehenge acarrea algunos problemas: y el propio Stonehenge no es tan resistente como un arco del Coliseo».[13] Y, podríamos añadir, si se decide construir a la manera de Stonehenge, es decir, confiar en que la estabilidad quede asegurada únicamente mediante las fuerzas verticales, no previendo los empujes laterales, lo único que se *puede* construir es Stonehenge.

9

El puente del Clare College

El análisis de los arcos de fábrica consiste en poco más que en la determinación de líneas de empujes, técnica habitual durante algún tiempo. Por ejemplo, Castigliano[1] empleó procedimientos numéricos ordinarios en su análisis del Ponte Mosca en Turín, aunque sus ideas sobre el trabajo mínimo eran innovadoras. Este ensayo expone los cálculos de manera análoga, pero emplea principios diferentes para determinar el empuje sobre el estribo de un arco. (La historia del análisis de los arcos se ha resumido en un artículo reciente,[2] habiéndose discutido con mayor amplitud en otra parte.[3])

Durante más de 200 años se ha reconocido que es la articulación de una dovela sobre la siguiente la que da la clave para comprender el comportamiento de los arcos de fábrica. La presencia de este tipo de articulaciones llevó a su vez a incorporar la teoría de arcos dentro del marco más general del análisis plástico;[4] en particular, los teoremas del límite (superior e inferior) del cálculo plástico sirven para esclarecer el comportamiento real de un puente de fábrica.

El teorema del «límite superior» considera las formas de deformación que llevan al colapso. Adaptado al arco de dovelas, significa que deben formarse bastantes articulaciones entre dovelas para convertir el arco en un mecanismo en el sentido habitual; la simple presencia de una articulación en particular no supone un riesgo, a menos que esté asociada con otras en número suficiente para formar un mecanismo. La forma básica de arco precisa cuatro articulaciones que alternen en el trasdós e intradós para que el mecanismo sea posible, siendo necesario encontrar tales articulaciones para demostrar que el arco es inestable.

El teorema del «límite inferior» aplicado a los arcos se ocupa de las líneas de empujes. Para demostrar que un arco es estable, es necesario encontrar una línea de empujes que equilibre la carga permanente y la sobrecarga y que en todos sus puntos esté contenida dentro de la fábrica. La potencia del teorema radica en que la línea de empujes considerada no tiene por qué ser la real, sino una cualquiera que satisfaga el equilibrio.

Hay argumentos poderosos para afirmar que el llamado estado real de una fábrica no es un concepto útil. La línea de empujes siempre ocupa una determinada posición dentro del arco (aunque determinar dicha posición puede ser difícil); sin embargo, un pequeño movimiento, por ejemplo de un estribo, o una leve variación de la temperatura modificarán casi con seguridad la posición de la línea de empujes de forma considerable.

En esta situación cambiante lo único estable no es el estado real del arco, sino el conjunto de principios en los cuáles se basa el comportamiento del arco.

Impreso y traducido, con autorización de los autores, del original «Two masonry bridges: I. Clare College,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 305-18. Traducción de Jorge Conde Conde.

Una vez se ha demostrado que es posible encontrar una línea de empujes contenida totalmente dentro de la fábrica, no importa cuánto se mueva la línea real en respuesta al entorno, la línea no puede salirse de la fábrica, quedando asegurada la estabilidad del arco.

Los teoremas del cálculo plástico son estrictamente válidos sólo si se aceptan ciertas hipótesis sobre el comportamiento del material. Éstas son que la piedra no tiene resistencia a tracción, que los niveles de tensión son bajos, de forma que no hay peligro de rotura del material por aplastamiento, y que no es posible el fallo por deslizamiento.

Aunque la piedra en sí misma puede ser capaz de transmitir una cierta tracción, las juntas entre dovelas pueden ser en seco o recibidas con un mortero débil. Por eso la hipótesis de la ausencia de tracciones, además de intuitivamente segura, no es irreal. Por otra parte, la hipótesis de tensiones de compresión bajas va intuitivamente en contra de la seguridad, pero los errores que se introducen en un análisis del tipo aquí emprendido son muy pequeños.[4]

Los teoremas plásticos pueden ilustrarse refiriéndose a un arco imperfecto. En la figura 9.1(a) se supone que un arco de dovelas encaja exactamente entre estribos rígidos. Si éstos se abren, quizá como resultado del empuje del arco, el arco debe agrietarse para acomodarse al incremento de la luz. En la práctica se formarán tres articulaciones, como en la figura 9.1(b); las dos articulaciones del intradós pueden estar alejadas del arranque, pero la disposición triarticulada será la misma.

Tres articulaciones en un arco no son suficientes para formar un mecanismo de colapso. De hecho, el arco triarticulado es una forma estructural básica y segura, siendo el estado al que tiende cualquier arco hiperestático de fábrica. Ya que las imperfecciones son inevitables en la práctica, el estado articulado puede considerarse como el estado natural de un arco adovelado. En la figura 9.2 se muestra una articulación entre dovelas en el puente del Clare College.

El arco de la figura 9.1(b) no sólo es perfectamente estable, sino isostático. La presencia de las articulaciones obliga a la línea de empujes a pasar a través de tres puntos conocidos del arco, tal y como aparece dibujada en la figura 9.1(c), y la componente horizontal del empuje H es calculable. Este valor de H es, de hecho, el mínimo necesario para la estabilidad del arco. (Coulomb[3,5] fue el primero en demostrar que en general existen límites entre los cuáles oscilará el valor del empuje horizontal para que el equilibrio se mantenga.) Por eso, si los estribos de un arco de fábrica tienden a moverse, su apertura irá acompañada de una reducción automática del empuje, que tiende hacia su valor mínimo.

Estas ideas «plásticas» sobre articulaciones por una parte, y líneas de empujes por otra, se aplicarán al estudio del puente del Clare College.

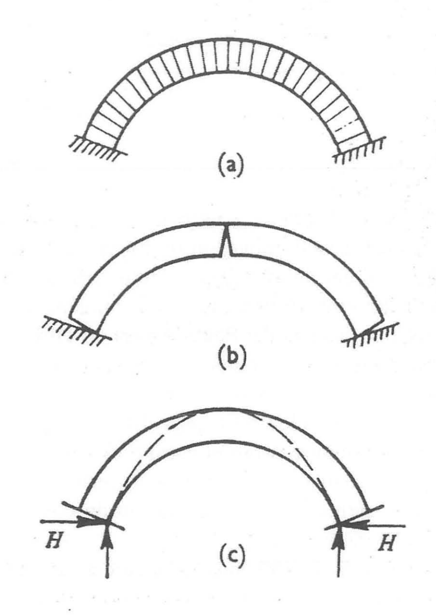


Figura 9.1
Un arco adovelado imperfectamente encajado

DESCRIPCIÓN E HISTORIA DEL PUENTE

«Todo tiene su momento, y todo cuanto se hace debajo del sol tiene su tiempo... hay un tiempo de destruir y un tiempo de edificar.» Estas palabras del Eclesiastés se escribieron en latín en un libro de cuentas abierto por Barnabas Oley en 1635. El Clare College se había embarcado en un amplio programa de reconstrucción, y desde el principio el tesorero llevó las cuentas de cada edificio separadamente en este libro, que fue una fuente primaria de información para Willis y Clark.[6]



Figura 9.2
Dovelas del vano central cerca de la pila occidental

El 18 de enero de 1638, el libro registra un pago de 3 chelines a Thomas Grumbold por el «diseño de un puente». Esta suma es extraordinariamente pequeña, habida cuenta de que el jornal de un cantero era en esa época de alrededor de un chelín;[7] Grumbold, sin embargo, construyó el puente por un salario total de unas 284 libras.

El puente une los edificios principales del College con otras propiedades, salvando el río Cam, y pertenece a una serie de puentes de este tipo construidos por los Colleges en su parte trasera. La figura 9.3 es una fotografía tomada desde el cercano puente del King's College, desde el que se realizaron mediciones del puente del Clare College con el teodolito. Los resultados de este levantamiento junto a las mediciones a mano permitieron realizar el dibujo de la figura 9.4; éste se diferencia en ciertos aspectos del único dibujo hasta entonces existente, el de la Royal Commission on Historical Monuments.[8]

El alzado de la figura 9.4 está tomado desde el sur, pudiendo apreciarse que el puente se encuentra seriamente deformado. El arco occidental se halla deformado hacia el oeste, y la pila occidental se inclina en la misma dirección. El arco central ha descendido en el centro, como se ve en la figura 9.5, siendo famoso el puente por este «trasdós quebrado».

La fábrica está compuesta en gran parte de piedra de Ketton, aunque existen vestigios del empleo de una piedra de Barnack mucho más antigua en la construcción original. Tras el paramento exterior de sillería (coronado por la pesada balaustrada y la albardilla) hay un relleno de arena y arcilla, que forma la base de una calzada de arena; este relleno contiene algunas capas de mampostería que lo atan. El puente se ha limpiado recientemente, drenando la calzada y renovando parte de los paramentos. La amplia grieta que se muestra en la figura 9.2 se encontró tras el paramento, en el relleno del arco central junto a la pila

Figura 9.3
El puente del Clare College desde el puente del King's College

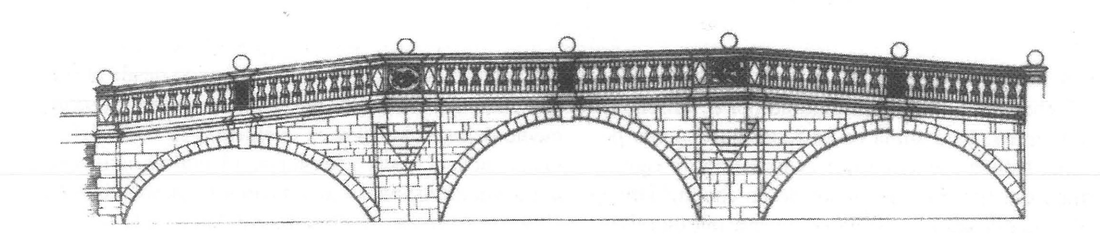


Figura 9.4
Alzado del puente del Clare College

occidental; existían amplios daños en la sillería del estribo occidental, donde el arco había empujado hacia la orilla.

El espesor de las dovelas de las figuras 9.3 y 9.4 parece ser de 0,30 m. Sin embargo este espesor se reduce en la mayor parte del ancho principal de los tres cañones, siendo el espesor de la rosca en cada uno de los tres vanos de unos 0,15 m.

ANÁLISIS MEDIANTE LÍNEAS DE EMPUJES

Vano central; peso propio

Como primer paso en la evaluación de la seguridad actual del puente, se realiza la hipótesis de que los paramentos, de 0,20 m de espesor, forman una estructura portante en sí misma capaz de soportar la



Figura 9.5
El puente del Clare College

balaustrada. Sin embargo los cañones, de tan sólo 0,15 m de espesor y cubiertos de relleno no estructural, son débiles en comparación, y se supone que actúan independientemente de los paramentos.

La forma en que se realizaron los cálculos puede exponerse refiriéndose al vano central. En la figura 9.6 se ha dividido el vano de 6,72 m en rebanadas iguales de 0,42 m. Las cargas que se muestran se evaluaron para un ancho de 5 m, considerando un peso específico uniforme (relleno y fábrica) de 20 kN/m^3. Se ha supuesto, como es habitual, que cada rebanada actúa con independencia de sus vecinas, transmitiendo sólo cargas verticales a la rosca del arco.

El primer problema a resolver es la construcción de una línea de empujes que equilibre las cargas verticales de la figura 9.6, y que esté contenida dentro de un arco de 0,15 m de espesor. En principio se supone que su directriz es exactamente circular, considerándose más adelante el efecto del descenso de la clave.

Siguiendo las indicaciones de la figura 9.1, se evalúa el mínimo empuje horizontal suponiendo que se forman articulaciones en el trasdós en la clave, y en el intradós cerca de los arranques. La posición exacta de las articulaciones de los arranques puede obtenerse por tanteos; en la solución correcta final aparecen a una distancia de 0,63 m de las pilas.

Para estas posiciones correctas de las articulaciones, pueden dibujarse los diagramas de equilibrio para las dos partes del arco triarticulado como en la figura 9.7. Intervienen dos incógnitas, que llamaremos H, componente horizontal del empuje, y V, reacción vertical sobre la pila izquierda (oeste). Las cantidades de la figura 9.7 pueden deducirse de los valores de la figura 9.6; es conveniente preparar una tabla de valores totales acumulados de los pesos de las rebanadas.

A partir de la figura 9.7 pueden escribirse dos ecuaciones de equilibrio, tomando momentos separadamente en cada semiarco. Nuevamente conviene

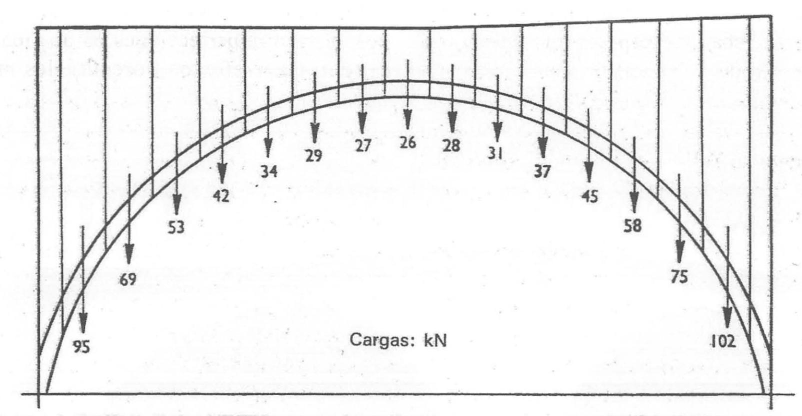


Figura 9.6
Pesos de las rebanadas en el arco central

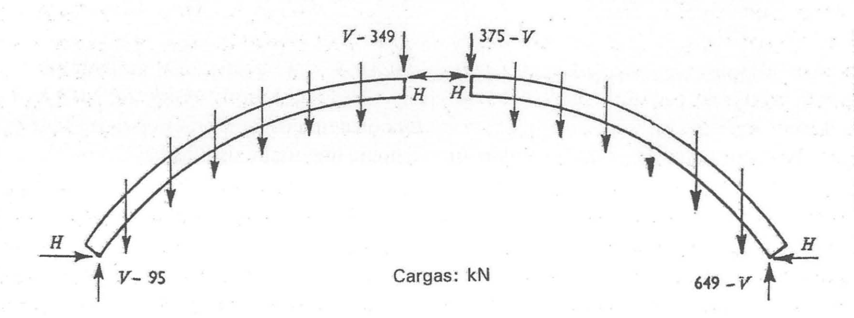


Figura 9.7
Diagrama de equilibrio correspondiente al mínimo empuje sobre los estribos, vano central

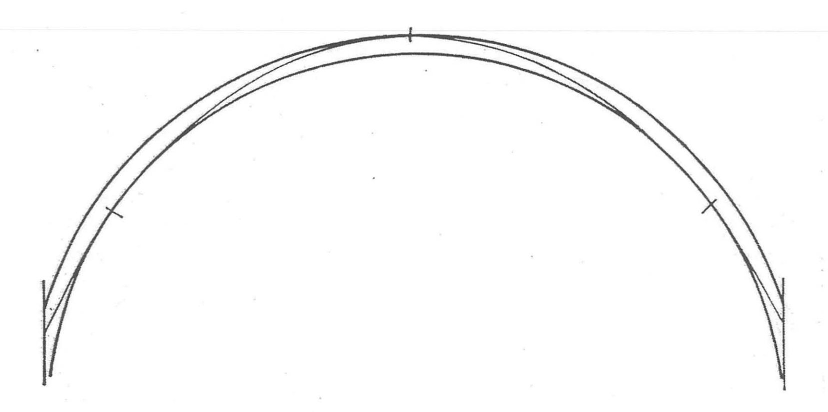


Figura 9.8
Línea de empujes para peso propio en el vano central; valor mínimo de H

preparar una tabla con los momentos producidos por los pesos de cada rebanada respecto a un cierto origen elegido, e introducir los totales acumulados; resulta entonces fácil escribir las ecuaciones. (Una tabla de este tipo se da para el análisis mucho más sencillo del puente de Telford en Over;[9] el puente del Clare College no es simétrico; los cálculos son, por tanto, más largos.)

A partir de la figura 9.7 y empleando las dimensiones idealizadas correspondientes al arco circular de la figura 9.6, se calcula el valor de H como 195 kN. Se debe entonces dibujar la línea de empujes correspondiente a este valor del empuje horizontal H para comprobar que ésta se encuentra en su totalidad contenida dentro de la fábrica. La línea está obligada a pasar a través de las articulaciones de la figura 9.7; en el caso de que éstas resultaran ser incorrectas, la línea se saldría fuera del arco en algún punto, y sería preciso realizar un nuevo análisis.

En la figura 9.8 puede verse que el cálculo realizado corresponde a la solución correcta, pudiendo deducirse que el empuje mínimo necesario para la estabilidad del arco es de 195 kN.

Sin embargo, hasta el momento no se ha tenido en cuenta la deformación del arco producida por el descenso de la clave. Si los cálculos se repiten para dos cuartos de círculo de centros situados de tal modo que se produzca un descenso de la clave de 0,10 m, el empuje horizontal mínimo aumenta de 195 kN a 206 kN. Un descenso de 0,20 m aumentaría el empuje a 218 kN.

Los valores absolutos de estos cambios son pequeños, si bien imperfecciones en apariencia pequeñas pueden tener efectos porcentuales relativamente grandes. No obstante, el modelo básico de comportamiento es el mismo para el arco «perfecto» y para el arco real; la figura 9.7 no se ve afectada, y las ecuaciones de los momentos se escriben con valores levemente distintos.

Análogamente, el efecto de una sobrecarga sobre el arco circular ideal diferirá muy poco de su efecto sobre el arco real; en adelante los cálculos para el arco central se efectúan para un semicírculo. Como se verá, las deformaciones del arco occidental son tan grandes que no podrá ser idealizado de esta forma.

Puede obtenerse el valor máximo del empuje para la carga permanente suponiendo que los estribos se aproximan en lugar de separarse. Se formarán articulaciones en las tres secciones de la figura 9.1(b), pero en los lados contrarios, con las articulaciones de los arranques en el trasdós, y la de la clave en el intradós. Procediendo como antes, se puede dibujar la línea de empujes de la figura 9.9 que corresponde a un empuje horizontal de 223 kN.

Por tanto, el empuje horizontal parece estar confinado entre los estrechos límites de 195 y 223 kN. Sin embargo, debe precisarse que el cálculo del límite superior es sensible a las condiciones supuestas en las pilas. Si el trasdós se refuerza con fábrica en un corto tramo, como muestra esquemáticamente el rayado de la figura 9.9, la línea de empujes puede en

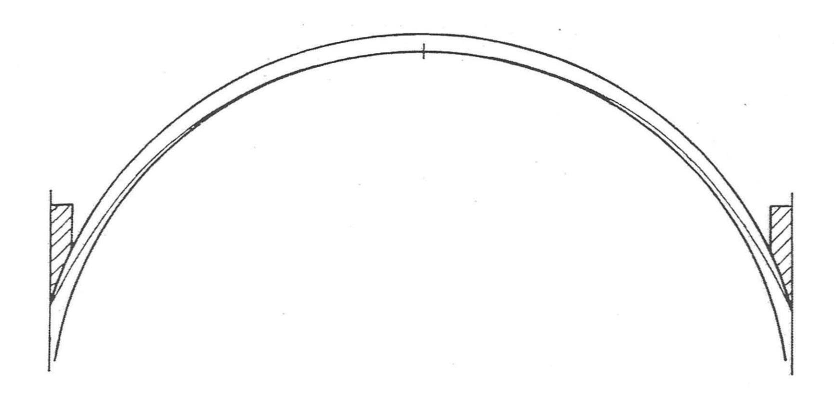


Figura 9.9
Línea de empujes para peso propio en el vano central; valor máximo de H

estas zonas salirse del arco. Un refuerzo como el de la figura 9.9 (0,21 m) aumentaría el empuje máximo posible de 223 a 244 kN.

La línea correspondiente al empuje mínimo, que se muestra en la figura 9.8, no muestra esta sensibilidad, ya que la presencia o ausencia de relleno no afectará a la formación de las articulaciones del intradós, suficientemente lejos de las pilas. Así, puede concluirse que el arco central empuja contra las pilas con una fuerza mínima de unos 200 kN; el empuje real podría ser algo mayor que éste.

Pueden ahora calcularse las tensiones medias. Para la solución de empuje horizontal mínimo, el empuje total (inclinado) del arco en los arranques, sobre las pilas, es de 414 kN. Este empuje actúa sobre un área de 5 m × 0,15 m, dando lugar a una tensión media de 0,55 N/mm^2. La *Specification*[10] de 1970 da una resistencia de rotura a compresión de la piedra Ketton de 15,2 N/mm^2 (Warland[11] da un valor ligeramente inferior de 10,9 N/mm^2); el coeficiente de seguridad en relación con las tensiones es de 20 ó mayor.

Por tanto, la resistencia de rotura a compresión no es relevante en la evaluación de la seguridad del puente; como ocurre en la mayoría de las construcciones de fábrica, es la geometría de la estructura la que es de importancia fundamental.

Vano central; sobrecarga

Además de las cargas permanentes de la figura 9.6, puede considerarse el efecto de una sobrecarga. Si una carga lineal transversal suficientemente intensa actúa como en la figura 9.10, pueden formarse cuatro articulaciones que permitirán un mecanismo de rotura. Dibujando los diagramas de equilibrio para cada una de las tres partes del arco definidas por las articulaciones, existe suficiente información como para calcular el valor de rotura de la carga lineal P. De nuevo las posiciones reales de las articulaciones deben hallarse por tanteos; en la figura 9.10 se determinan fácilmente la articulación bajo la carga y la del estribo izquierdo; los cálculos resultan indiferentes a las posiciones de las articulaciones del intradós.

Los cálculos pueden repetirse para distintas posiciones de la carga, obteniéndose la curva de la figura 9.11. Una curva de este tipo tiene habitualmente dos mínimos; la asimetría del puente del Clare College conduce a un solo mínimo a 0,6 m del centro, donde el valor de la carga lineal P es de 39 kN. Por lo tanto, una carga de esta magnitud que atravesase lentamente el vano central, produciría el hundimiento del arco por la formación de un mecanismo del tipo que se muestra en la figura 9.10.

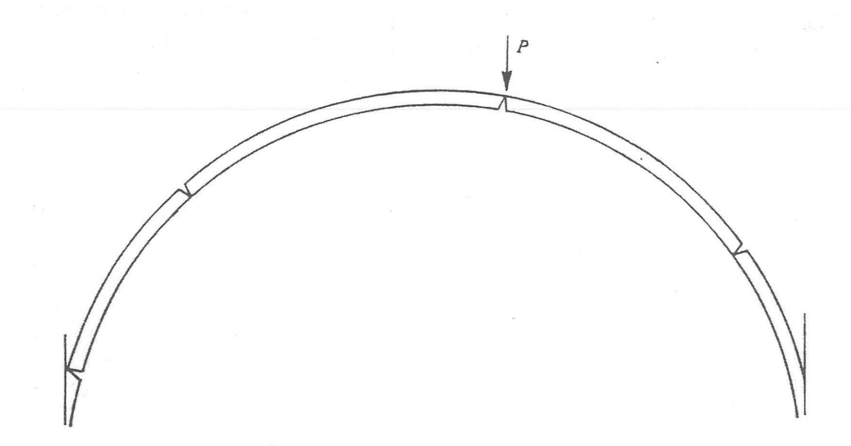


Figura 9.10
Mecanismo típico de colapso para el arco central con sobrecarga lineal

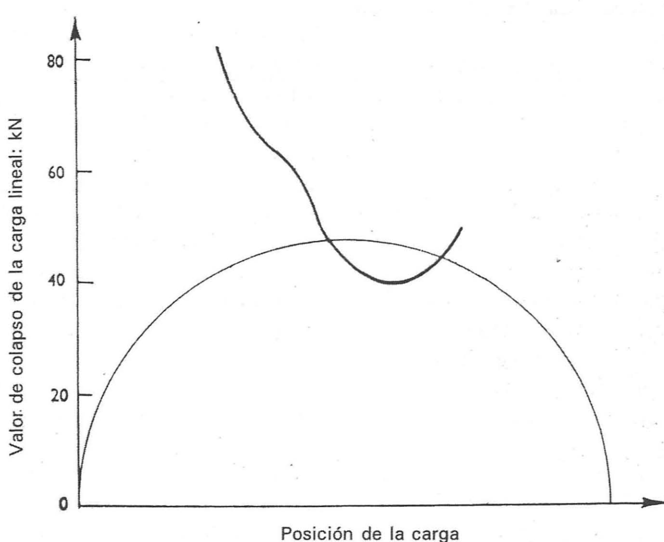


Figura 9.11
Valores de colapso de la carga lineal, arco central

Esta conclusión se basa en la hipótesis de que la carga que actúa sobre la calzada permanece concentrada, sin dispersarse a través del relleno. En la posición más crítica de la carga lineal la calzada se eleva unos 0,7 m por encima del arco; un cálculo para esta posición sustituyendo la carga lineal por una repartida a lo largo de 0,8 m llevó a un aumento en el valor de la carga de rotura de 39 kN a 44 kN.

Nuevamente, el mecanismo de la figura 9.10 es sensible a las condiciones concretas de los estribos; el refuerzo de fábrica del estribo izquierdo aumentará la resistencia del arco para esta posición de la carga. Sin embargo, debe concluirse que una carga lineal de unos 40 kN produciría el hundimiento del arco central.

Vano occidental

Las fuertes deformaciones del vano occidental, visibles en las figuras 9.3 y 9.4, parecen prohibir casi por completo cualquier sobrecarga. Una línea de empujes de las cargas permanentes con un valor de $H = 276$ kN cabe ajustadamente en un arco de 0,15 m de

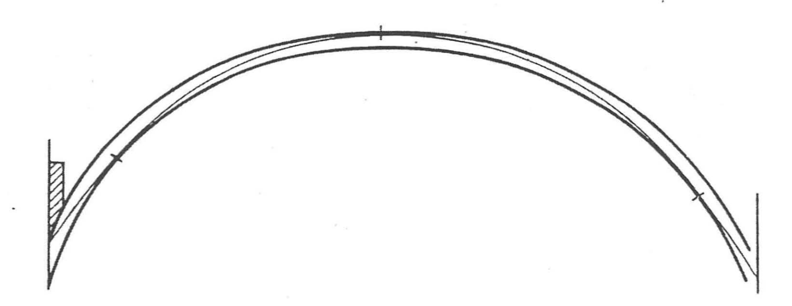


Figura 9.12
Línea de empujes para peso propio, vano occidental

espesor (figura 9.12). La configuración básica de articulaciones es la de la figura 9.8 para el arco central, pero el incremento de la curvatura en el lado izquierdo (estribo occidental) apenas permite que la línea de empujes permanezca dentro; nuevamente, un refuerzo de fábrica en el trasdós haría las condiciones menos críticas.

Ya que la línea de empujes debida a peso propio está tan «ajustada», no puede permitirse sobrecarga alguna. Sin embargo, una línea de empujes correspondiente a una carga lineal de 40 kN podría estar contenida si hubiera un refuerzo de fábrica que se extendiera 0,12 m a partir del estribo izquierdo (sombreado en la figura 9.12). Quizá sea razonable pensar que un refuerzo así podría existir, permitiendo entonces la aplicación al vano occidental de los límites de carga calculados para el vano central.

Conclusiones provisionales

De los tres vanos del puente, el oriental es el menos crítico; se encuentra relativamente sin deformar, y no se proporcionará aquí ningún cálculo.

Para intentar llegar a una conclusión numérica exacta (por ejemplo, la determinación de la carga límite que pueda cruzar con seguridad el puente), deben descartarse ideas convencionales sobre coeficientes de seguridad o coeficientes de mayoración de cargas. En su lugar, resulta más útil el concepto de un coeficiente de seguridad «geométrico»,[2,4] que quizá pueda explicarse mejor repitiendo los cálculos para un espesor distinto del arco.

Si la rosca hubiera sido de 0,30 m de espesor en toda su longitud, (es decir, el mismo espesor de las dovelas que aparecen en las figuras 9.3 y 9.4), el valor crítico de la carga lineal en el arco central habría sido no de 40 kN, sino mucho mayor. En este caso una limitación de la carga a 40 kN hubiera implicado un coeficiente de seguridad geométrico de 2, ya que el espesor del arco de 0,3 m podría haberse reducido a 0,15 m antes de hundirse bajo la carga límite de 40 kN.

Sin embargo, el arco real ya es muy esbelto con 0,15 m, y aunque estable en teoría, pequeñas deformaciones o pequeñas sobrecargas accidentales podrían llevarle al estado crítico. Teniendo en cuenta el valor calculado de 40 kN, el análisis por líneas de empujes hace dudar de admitir algo más que un pequeño turismo alquilado cruzando el puente lentamente. Otras consideraciones, analizadas en este artículo, respaldan esta conclusión provisional.

ESTADO ACTUAL DEL PUENTE

Las principales deformaciones del puente del Clare College se producen en el vano occidental y sus inmediaciones. El estribo de la orilla muestra unos desplazamientos considerables, y la pila occidental presenta un desplome de unos 1,5° hacia el oeste. Este desplome es el que ha aumentado la luz eficaz del arco central al nivel de la calzada produciendo el descenso de la clave.

Durante los trabajos recientes en el puente, se renovaron los paramentos donde era necesario, resanando las dovelas externas. La figura 9.2 muestra el puente una vez picado el antiguo mortero cerca del estribo izquierdo del arco central; las dovelas están muy juntas en el intradós de esta zona, con huecos en el trasdós. La figura 9.2 puede situarse en referencia a la figura 9.13, en la que se han dibujado todas las «articulaciones» visibles en la cara sur del arco central; la anchura de las aberturas viene señalada en mm.

La figura 9.14 contiene información similar para el arco occidental. Hay algunas anomalías en las disposiciones de las articulaciones de las figuras 9.13 y 9.14, pero en general se corresponden notablemente bien con las líneas de mínimo empuje de las figuras 9.8 y 9.12.

Esta coincidencia, sin embargo, es cualitativa más que cuantitativa. Si se supone que las dovelas encajaban perfectamente al principio, entonces las medidas de las aberturas en las articulaciones de las figuras 9.13 y 9.14 pueden utilizarse para deducir los movimientos relativos de los estribos de los arcos. Las articulaciones de la figura 9.13 para el vano central, por ejemplo, corresponden a una disminución de la luz de unos 0,2 m; por otra parte, la inclinación de la pila occidental parece implicar un aumento de la luz.

Para explicar por completo el estado actual del puente parece necesario suponer que la ejecución original fue bastante deficiente, tanto en la obra de fábrica como en la técnica constructiva. Esta hipótesis viene respaldada por un examen general de la fábrica; la calidad no es buena. Las distribuciones de las articulaciones de las figuras 9.13 y 9.14 se explicarían si supusiéramos que las dovelas fueron cortadas con un ángulo de cuña demasiado pequeño, lo que produjo una serie de articulaciones en arco tras su construcción. Las grandes deformaciones posteriores del arco occidental superpondrían las

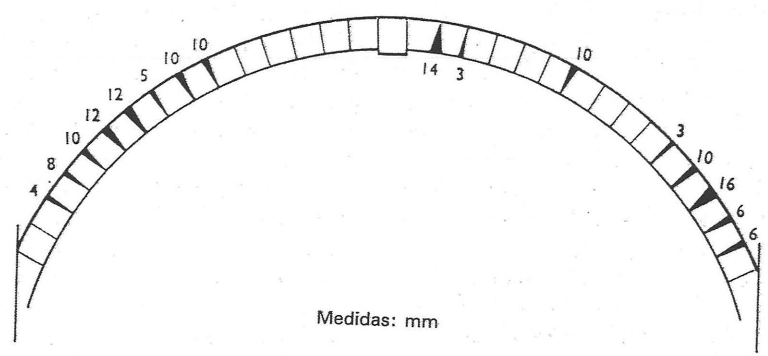


Figura 9.13
Cara sur del arco central; aberturas entre dovelas

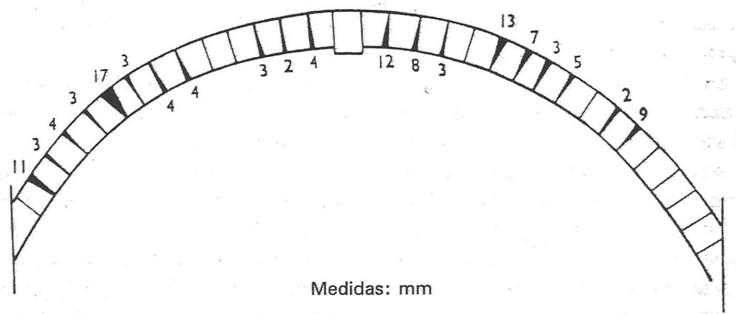


Figura 9.14
Cara sur del arco occidental

articulaciones típicas del descenso de la clave presente en la actualidad.

La hipótesis del mal corte original de las dovelas está respaldada por el hecho de que muchas de las aberturas de las articulaciones se encuentran rellenas con lajas de pizarra Collyweston, y las evidencias apuntan a que estos rellenos se realizaron en la época de la construcción del puente. Si esto es así, los valores numéricos de las figuras 9.13 y 9.14 no pueden usarse para interpretar las subsiguientes deformaciones del puente.

Sin embargo, parece claro que las principales deformaciones tuvieron lugar durante la construcción, y que el asiento y desplome principal, la inclinación de la pila occidental, y las perturbaciones en el estribo occidental, produjeron aberturas en la fábrica que fueron rellenadas de inmediato. En particular, los paramentos se labraron ajustándolos a los estribos ya deformados, para encubrir visualmente los movimientos.

Una secuencia constructiva que podría haber causado la deformación del arco occidental se habría producido de haberse traído el relleno del este, es decir, de la parte principal del College. Si el relleno se hubiera vertido primero en los arcos oriental y central, la pila occidental habría sufrido un enorme empuje desequilibrado (de hasta 200 kN), con escasa resistencia por parte del delgado arco del vano occidental. Esto explicaría el desplome de la pila occidental y la deformación del arco occidental; no ha llegado hasta nosotros información sobre la cimbra, por lo que se desconoce lo endeble que era.

EVALUACIÓN EMPÍRICA DEL PUENTE

Resulta interesante aplicar las reglas del entonces Ministerio de Transportes para la evaluación de puentes de carreteras.[12] En este documento se afirma que «la resistencia real de un puente de arcos de fábrica es casi imposible de calcular, y se recurre por tanto a una fórmula empírica.» Esta fórmula es aplicable a luces de menos de 60 pies (18,3 m) y fundamentalmente para puentes de un solo vano; en ningún momento se calculan las tensiones, ni se considera la resistencia de rotura a compresión de la fábrica. En base a los comentarios realizados anteriormente en este artículo, no tener en cuenta los estados tensionales parece un enfoque correcto.

La evaluación comienza entrando en un nomograma con la luz del arco y el espesor total (rosca mas relleno) en la clave, y leyendo una carga axial provisional. En el caso del vano central del puente del Clare College, esta cifra provisional es de 23 t, pero este valor debe modificarse con una serie de cinco coeficientes.

En primer lugar, la forma del arco se evalúa calculando el coeficiente luz/flecha; el coeficiente adecuado para Clare College es 1. En segundo lugar, la forma del arco interviene en el cálculo mediante un coeficiente de perfil; en este caso $F_p = 0{,}68$.

Ambos coeficientes son geométricos (como lo es la obtención de la carga axial provisional a partir del nomograma), pero el cálculo del tercero, el coeficiente del material, depende en cierta medida del criterio del ingeniero. Se debe evaluar un «coeficiente de rosca» entre 0,7 y 1,5 dependiendo del tipo y condición del material de la rosca del arco. En el caso del puente del Clare College, los límites apropiados son 0,7 y 1,0, tomándose el coeficiente como 0,9. Se evalúa entonces un «coeficiente de relleno» entre 0,5 y 1,0, cuyo límite inferior corresponde a un relleno débil, y el superior a una losa de hormigón; para el puente estudiado se tomó 0,5. A partir de estos dos valores, y de los espesores de la rosca y del relleno, se estimó el coeficiente del material como 0,596, es decir $F_m = 0{,}6$. (Las estimaciones más pesimistas de coeficientes de rosca y relleno conducen a un coeficiente del material de 0,55.)

El cuarto coeficiente F_j, coeficiente de junta, es el producto de tres subcoeficientes. El «coeficiente de ancho» F_w depende del tamaño de las juntas de mortero, y se encuentra entre 0,8 y 1,0; se tomó la undad, ya que la articulación parece estar incluida en el «coeficiente de profundidad» F_d. De hecho F_d se refiere más al apuntamiento de las dovelas que a su apertura, y se encuentra normalmente entre 0,8 y 1,0; sin embargo, las juntas insuficientemente rellenas pueden evaluarse según criterio del ingeniero. Se tomó un valor de 0,8. El «coeficiente de mortero» es la unidad para un buen mortero y 0,9 para un mortero suelto o deleznable; se tomó como 0,9. Así $F_j = 1{,}0 \times 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$; está claro que este coeficiente pudo estimarse en menos en el puente del Clare College.

«La estimación de los coeficientes anteriores se basa en información cuantitativa extraíble de una inspección meticulosa de la estructura, pero el [quinto] coeficiente del estado del puente depende más de una valoración objetiva de la importancia de las diversas grietas y deformaciones que pueden estar presentes y de cómo pueden estar contrarrestadas por los buenos materiales y la buena ejecución.» Se dan notas detalladas a modo de guía, pero la elección final del coeficiente de condición, entre 0 y 1,0, está en manos del ingeniero y parece ser mucho más subjetiva que objetiva.

Excluyendo el coeficiente de condición, la carga admisible para el puente del Clare College es la carga provisional de 23 t multiplicada por los otros cuatro coeficientes, es decir $23 \times 1{,}0 \times 0{,}68 \times 0{,}60 \times 0{,}72 = 6{,}76$ t. La carga axial admisible final tiene, pues, un valor entre 0 y 7 t, dependiendo de la elección del ingeniero para el coeficiente de condición; un valor de 0,3, daría una carga axial admisible de 2 t.

Este valor de 2 t puede compararse con la carga última de 40 kN (4 t) para el arco central; las normas del Ministerio de Transportes no son en realidad aplicables al puente del Clare College, pero dan un resultado del mismo orden de magnitud que el obtenido por el análisis de las líneas de empujes.

PUNZONAMIENTO DE UNA DOVELA

Como cálculo final, se efectúa una estimación del valor de una carga puntual que «punzonase» una dovela. En la figura 9.14, por ejemplo, es evidente que las dovelas cercanas a la clave se mantienen en posición por fuerzas de rozamiento que actúan en las articulaciones. Una carga vertical actuando aisladamente sobre una dovela podría tener la suficiente intensidad como para vencer estas fuerzas de rozamiento.

La longitud de arco de las dovelas en el intradós es aproximadamente de 25 cm, haciéndose los cálculos para una de 25 cm × 25 cm en planta (es decir, se considera la carga puntual actuando sobre esta área cuadrada). El empuje mínimo horizontal en el estribo es de unos 200 kN para el ancho total del cañón de 5 m, o de 10 kN para la dovela de 25 cm. Tomando un coeficiente de rozamiento de 3/4, que es un buen valor clásico,[3,5] la máxima fuerza de rozamiento de que puede disponerse para sostener la dovela es de 7,5 kN Ya que la dovela posee dos caras, una rueda cargada con 15 kN provocaría el punzonamiento.

Debe tomarse un coeficiente de mayoración de al menos 3 en este cálculo, que conduciría a una carga puntual segura de 5 kN, correspondiente a una camioneta de peso total 2 t (20 kN). Las dovelas tienen en realidad una longitud del doble como mínimo que los 25 cm considerados en el cálculo; el punzonamiento no es el criterio más restrictivo.

Conclusiones

El mismo puente evidencia que fue torpemente construido por canteros que carecían de la pericia adecuada. Si efectivamente Thomas Grumbold se encontraba a cargo del trabajo (por el que ciertamente fue pagado), no hubo nadie implicado con la experiencia adecuada. No existen referencias de otros puentes construidos por Grumbold; por el contrario, el resto de su trabajo se relacionaba fundamentalmente con edificaciones domésticas en los Colleges.[13]

Por tanto, es bastante posible que las dovelas fueran torpemente labradas, que las cimbras fueran endebles, y que se vertiera el relleno sin el cuidado apropiado. Ciertamente se escatimó en la rosca del arco; el espesor de las dovelas es del 4,5% del radio, mientras que un 10% resultaría más adecuado para el arco circular del vano central.

Sin embargo, el puente ha permanecido en pie durante más de 300 años. No hay indicios de movimientos recientes de las pilas o de los estribos, la fábrica ha recibido atención considerable y las juntas, siempre que ha sido posible, se han vaciado y rellenado nuevamente. Los cálculos expuestos en este artículo confirman que el puente es bastante seguro para cargas moderadas, es decir, para su uso peatonal. Podría admitirse el cruce ocasional de un vehículo ligero.

10

El puente de Telford en Over

Sejourné[1] dió en 1913 una lista de todos los puentes de fábrica del mundo que tuvieran una luz mayor de 40 m. Sólo ocho pertenecen al Reino Unido; los cuatro primeros son:

1749	Pont-y-Pridd	William Edwards	42,67 m
1824	Puente de Londres	John Rennie	46,33 m
1826	Over	Thomas Telford	45,72 m
1833	Grosvenor (Chester)	Thomas Harrison	60,96 m

De los cuatro restantes, dos son puentes de ferrocarril (Puente Victoria, Durham, 1836 y Ballochmyle, 1839) y dos salvan el Támesis (Putney, 1882 y Kew, 1901).

Pont-y-Pridd tiene sólo 3,35 m de anchura y el puente de Londres ha sido destruido. Por tanto, el puente de Telford en Over, Gloucester, es el más antiguo de los puentes de carretera de gran luz que quedan en Inglaterra (en la actualidad conduce la A40 sobre el ramal oeste del río Severn hacia Gales), solamente superado por el puente de Grosvenor.

Al describir el puente y hacer cálculos surge un problema relacionado con las unidades. En general se dan las medidas en pies, unidad usada por Telford, pero se presentan los cálculos en unidades SI. Ello permite la cita directa sin necesidad de «traducción». La longitud del pie francés del XVIII era de unos 32,5 cm; por tanto la luz libre del Pont de Neuilly de Perronet, de 120 *pieds* era de unos 128 pies ingleses ó 39 m.

DESCRIPCIÓN Y CONSTRUCCIÓN DEL PUENTE

Telford, en su *Life*,[2] dedica diez páginas a la descripción del puente y su construcción:

> Para este puente en arco de piedra introduje una forma que, aunque nueva en Inglaterra, ya había sido empleada en 1768 por un eminente arquitecto francés (Perronet) en un puente de cinco arcos, de 128 pies de luz cada uno, sobre el río Sena en Neuilly, y que parecía ser de especial aplicación al Severn, donde las inundaciones son considerables. En relación con la lámina [figura 10.1], se verá que esto se logra haciendo que el arco tome la forma de una elipse, de 150 pies de luz y 35 pies de flecha, mientras que las dovelas, o sillares externos del arco, de forma alargada, salvan idéntica luz, con sólo 13 pies de altura. Esta compleja forma convierte cada lado de la bóveda del arco en una embocadura, para adaptarse al paso de un fluido, minimizando así la superficie plana enfrentada a la corriente del río cuando las mareas o las inundaciones eleven el nivel por encima de los arranques de la elipse, situados a 4 pies sobre el nivel de la marea baja, mientras que la crecida de 1770 elevó el nivel más de 20 pies sobre el de una marea baja primaveral ordinaria, que, cuando no hay inundación, se eleva ocho o nueve pies.

Impreso y traducido, con autorización de los autores, del original «Two masonry bridges: II. Telford's bridge at Over,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 319-30. Traducción de Jorge Conde Conde.

GLOUCESTER BRIDGE OVER THE RIVER SEVERN.
1827.

Figura 10.1
Grabado del puente en Over, por Telford

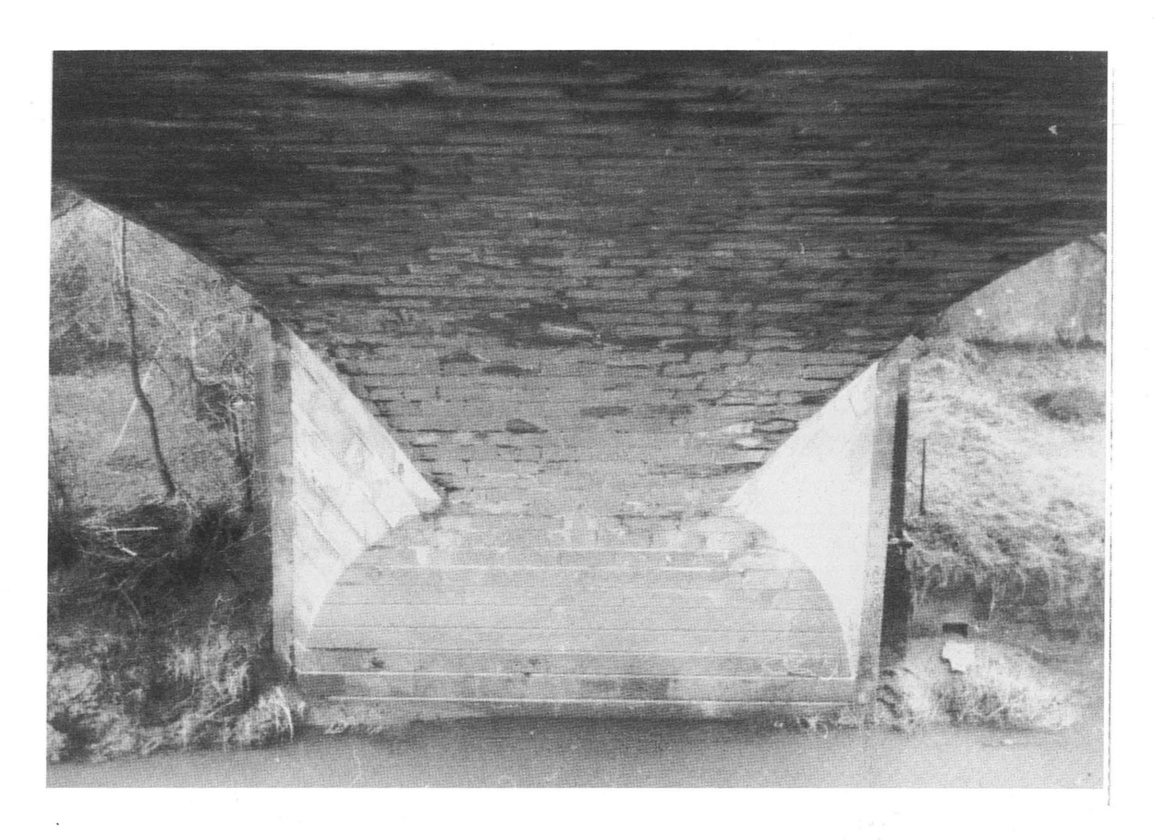


Figura 10.2
Cornes de vache en Over

El corte de la superficie de intradós del arco, claramente mostrado en la fotografía de la figura 10.2, facilitará enormemente el paso del agua en una crecida. La diferencia global de presión a ambos lados del puente se expresa en términos de las pérdidas sufridas por el agua a su paso, que a su vez se deben en gran parte a la generación de turbulencias. Un «tubo» convergente-divergente ayudará a mantener el flujo laminar; en el límite, si el paso del agua es perfectamente suave, la corriente sólo se verá afectada por el rozamiento de las superficies.

Ciertamente, el tratamiento del intradós por parte de Telford parece visualmente torpe comparado con el de Perronet en el Pont de Neuilly, figura 10.3. Perronet[3] permite que los *cornes de vache* intersecten con las caras de las pilas en curvas suaves, lo que se relaciona con su empleo de cuidadosos perfiles ovalados de once centros para cada arco. Perronet afirma que su proyecto es para una crecida de 23 pies; sus arcos tienen 30 pies de flecha, por lo que quedan 7 pies libres bajo la clave; un perfil elíptico hubiera dejado un espacio muy pequeño para la corriente. (Medidas en pies franceses.)

La comparación de los grabados de las figuras 10.1 y 10.4 muestra la estrecha correspondencia entre la forma global del original de Perronet y la copia de Telford. En perfil, el puente de Telford se asemeja a un arco rebajado circular de 150 pies de luz y 13 pies de altura, con dovelas de profundidad variable entre 4,5 pies en la clave y 5,5 pies en los arranques. En realidad, como Telford afirmó, el arco es elíptico con una flecha de 35 pies. La sección central del arco es maciza, pero la carretera se apoya sobre los riñones mediante 6 muros paralelos, como se ve en la sección de

Figura 10.3
El puente de Neuilly, de Perronet

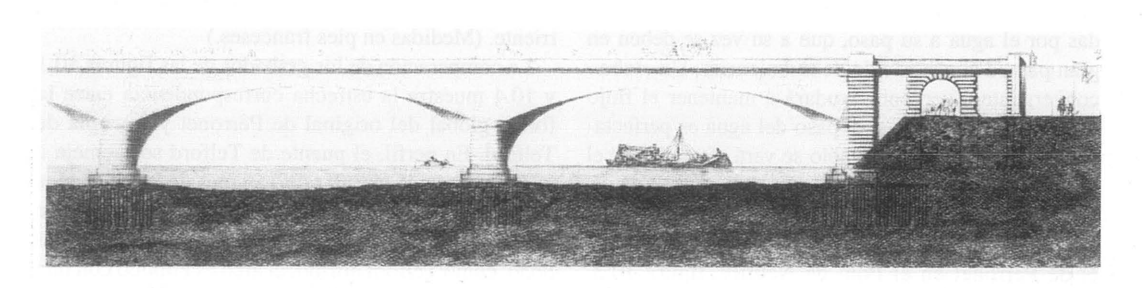


Figura 10.4
Grabado de Perronet del puente de Neuilly

la figura 10.1; los muros externos de los tímpanos tienen 3 pies 6 pulgadas de espesor, y los internos 2 pies.

La fábrica es de arenisca del Bosque del Deán. Warland[4] da (para un lecho gris) una resistencia de rotura a compresión de 62 N/mm^2, que se corresponde bien con el valor de 67 N/mm^2 de la *Specification* 1970.[5]

Telford comenzó los trabajos por el lado este (Gloucester), dando la siguiente estratificación del subsuelo:

pies	
0	marga rica
11	lecho de limo azul blando
23	estrato de turba
28	arcilla marrón
33	grava gruesa endurecida
36	grava más fina o arena gruesa
44	fin del taladro

Baker (Sir Benjamin Baker) trabajó en el puente en 1880,[6] dando Phillips[7] en 1907 una relación sobre este trabajo. Phillips cree que Telford se equivocaba en lo concerniente a la estratificación del suelo. Telford afirma que cimentó el estribo oriental a una profundidad de 33 pies, sobre grava endurecida, pero Phillips no encontró señales de la existencia de esta grava.

Que Telford estaba equivocado lo confirma una exploración del suelo realizada durante las obras de una nueva carretera. Un taladro situado 200 pies aguas arriba del puente de Over en la misma orilla (este) arroja el siguiente resultado:

pies	
0	superficie y arcilla blanda
8	arcilla limosa blanda marrón y gris
17	turba y arcilla turbosa muy blandas
21	arcilla limosa blanda azul y gris
24	arcilla negra blanda
27	arcilla limosa roja blanda
32	arena limpia y guijarros
33	flujo de agua y terreno
35	arcilla azul blanda
38	arcilla azul dura (lías)

Por tanto, en este lugar, un fino estrato de arena y guijarros cubre uno más profundo de arcilla blanda (con una cohesión aparente obtenida en un ensayo triaxial sin drenaje inferior de 0,03 N/mm^2; el lías duro tiene una cohesión de aproximadamente 0,2 N/mm^2). Es posible que Telford confundiera la arena limpia con guijarros (quizá el antiguo lecho del río Severn, que se ha movido hacia el oeste) con un lecho profundo de grava.

En la orilla opuesta Telford encontró que el terreno era en general mucho más firme, con grava a 27 pies. Esta cifra se ha visto confirmada plenamente por una reciente perforación realizada enfrente a la anterior.

Por tanto Telford excavó hasta 33 pies en la orilla oriental y hasta 27 pies en la occidental; excepto este detalle, las cimentaciones de ambos estribos son iguales. Cada cual consta de una capa de mampuesto de gran tamaño dispuesto en hiladas horizontales, sobre la que se construyó con gran cuidado una plataforma de madera. Esta plataforma se ejecutó con troncos de Memel (pino) a 3 pies entre ejes, rellenándose los espacios cuadrados intermedios con mampostería y mortero, y todo ello cubierto con tablones planos de haya de 4 pulgadas bien ajustados; las plataformas concluidas medían 40 por 37 pies.

El grabado de Telford (figura 10.1), no muestra pilotes bajo los estribos, deduciéndose de su propio testimonio que no se colocó ninguno. Telford se recrimina por omitir los pilotes y las plataformas para los muros en forma de aleta de 40 pies que refuerzan los estribos. Estos muros en forma de aleta debían haber sido de 7 pies en la base estrechándose hasta alcanzar 2 pies en su parte superior, e iban a ser cimentados a 2 pies bajo la superficie (especificación original del 22 de febrero de 1826). Sin embargo, un nuevo documento de agosto de 1828 profundiza las cimentaciones hasta 8 ó 10 pies por debajo de la superficie, especificando pilotes de 8 pies y una plataforma de pino; éstos son los que Telford omitió con «imprudente tacañería.»

Telford describe la cimbra del arco principal:

> En lugar de una armadura completa apoyada en sus dos extremos [el constructor] apoyó su cimbra en [siete] hileras paralelas de pilotes, fijados sobre el lecho del río, cada hilera trabada con riostras y durmientes soportando una costilla que constituía la auténtica cimbra.

Esta construcción dejaba pasos abiertos de 16 pies para las gabarras.

La cimbra era muy rígida en comparación con una armadura de madera de 150 pies de luz; el descimbrado en 1829 fue inmediatamente seguido de un

descenso de 2 pulgadas en la clave. Los estribos comenzaron, por vez primera a recibir el empuje, descendiendo la clave otras 8 pulgadas más, haciendo un total de 10 pulgadas. Todos los informes, desde el del mismo Telford hasta el presente, coinciden en que el error del puente radica en el estribo oriental, mal cimentado sobre un estrato de arcilla blanda y mal reforzado con aletas construidas con una economía temeraria. El estribo occidental parece haberse mantenido absolutamente firme, pero el oriental se ha movido rompiendo la nivelación del puente, como se muestra en la figura 10.5.

Aunque Telford lamenta mucho[2] el descenso que se produjo en el puente de Over, públicamente se manifestó satisfecho, y citó el hecho de que el puente de Perronet en Neuilly había descendido 13 pulgadas al descimbrarlo, habiéndose movido después otras 10,5 con un total de 23,5 pulgadas para una luz de 128 pies ingleses.

Sin embargo, en 1830 se le pidió que examinara «varias grietas que precisan ser detenidas.» Tras haberlas rellenado, inspeccionó nuevas grietas en 1831, pero de nuevo se mostró confiado acerca de la estabilidad del puente. De hecho en aquel año le fueron liquidados sus honorarios; sin embargo, en 1832 tuvieron que hacerse nuevas reparaciones que costaron 500 libras, de las que él pagó la mitad. Telford murió en 1834, y el viejo puente al que el de Over sustituía fue demolido ese mismo año.

HISTORIA POSTERIOR

El nuevo puente de Telford siguió causando preocupaciones. En 1864 se realizó una extensa inspección relacionada con el proyecto de un nuevo ferrocarril, y en 1880 la alarma sobre el estado del puente era tal que se requirió un informe. Baker realizó un examen

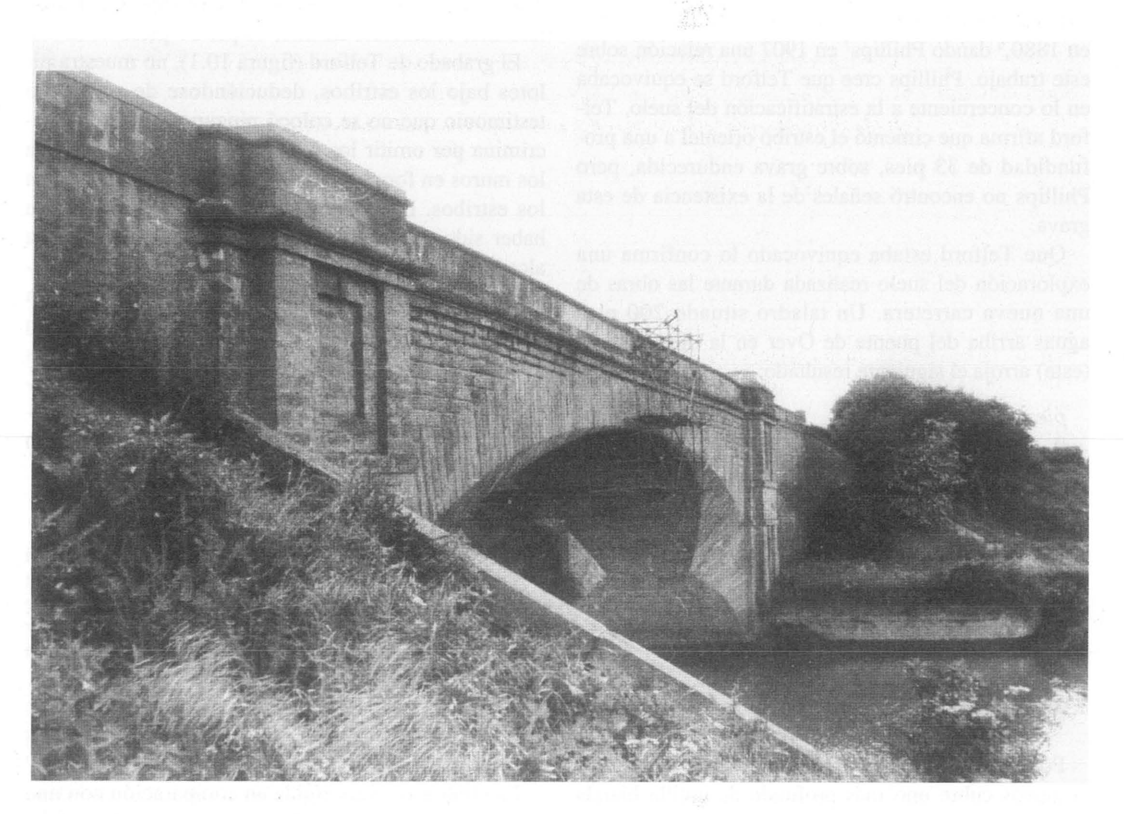


Figura 10.5
El puente de Over, desde el oeste

detallado; la calzada fue levantada, y se inspeccionó el trasdós del arco. Se descubrió que las juntas de los riñones se habían abierto cerca de 2,5 pulgadas, habiéndose retacado con cuñas de hierro fabricadas con viejas ruedas de carretas, presumiblemente en época de Telford. En correspondencia, las juntas del intradós en la clave estaban abiertas, pudiendo introducirse hacia arriba «un bastón 2 pies a partir del intradós sin tocar para nada la abertura.»[7]

Baker resumió sus descubrimientos unos siete años más tarde:[6]

> Los estribos habían cedido gradualmente durante sesenta años. El resultado fue que ciertos bárbaros urgían entonces a los magistrados para demoler el puente, porque el intradós del arco había adquirido una curvatura inversa. Realmente parecía que se iba a desplomar, siendo las grietas de las enjutas lo suficientemente grandes como para caminar por ellas cómodamente. Dijo a los magistrados que sería una desgracia para el país si derribaban el trabajo histórico de Telford, y lo reemplazaban por un espantoso puente en celosía de hierro. El puente había fallado (y muchos errores idénticos se han producido desde entonces) porque las aletas se construyeron en lo que Telford confundió con arcilla, siendo en realidad lodo endurecido, bajo el cual había turba. El Sr Baker intentó profundizar y recalzar las aletas, pero llegó al agua y paró, pues un bombeo hubiera destruido con seguridad el puente. Lo que hizo entonces fue sencillamente construir en el firme malo, recalzando tan profundamente y tan ancho como pudo, para reducir la carga por pie cuadrado en la cimentación. Sugirió que se dejaran las grietas durante dieciocho meses, y fueran entonces vaciadas y nuevamente rellenas. Se alegró de poder decir que las medidas adoptadas hacía siete años habían detenido totalmente el movimiento, no viendo razón alguna por la que el puente no pudiera mantenerse en condiciones permanentemente.

En el recalce de Baker se colocó hormigón bajo las aletas del estribo oriental, y se pretendía después apoyar el hormigón mediante «arbotantes» de ladrillo construidos en pozos. Sin embargo, al realizar el primer pozo, se encontró un flujo de agua a 8 pies antes de alcanzar la profundidad total; esta profundidad parece corresponder exactamente con la de la moderna perforación practicada en la orilla oriental. El nivel del agua no podía rebajarse con facilidad, y Sir John Fowler, que fue llamado como asesor, dio su opinión de que el trabajo debía ser abandonado. Se siguió este consejo y el pozo fue rellenado con hormigón.

Las juntas abiertas del intradós se acuñaron con losas de Broseley y cemento, usándose el mismo relleno para el trasdós en los riñones. Baker pensó que su intervención había parado totalmente el movimiento del puente; esto es esencialmente cierto como lo confirman mediciones más modernas.

Phillips trabajó con Baker en 1880, no haciendo mención de movimiento alguno entre esa fecha y 1908, cuando se publicó su monografía. El topógrafo del Condado de Gloucester ha realizado mediciones de los niveles a partir de 1908. Desde ese año, el descenso permanente en el centro del arco parece haber aumentado en 0,05 pies (de los que 0,02 podrían deberse al paso de una carga de 180 t en los últimos años). Algunas grietas se han producido durante este siglo, por ejemplo en 1928 y 1934, pero el trabajo principal de los últimos diez años ha sido la reparación de los pretiles de fábrica dañados por accidentes.

Un nuevo tipo de grieta se observó por primera vez en 1958; grietas de cortante se produjeron en las dovelas de la clave a 1 pie aproximadamente por debajo y paralelas al trasdós en la cara septentrional del arco. No se sabe cuánto penetran estas fisuras en la rosca del arco; se observó su lenta propagación durante 10 años, pero desde 1969 no ha habido nuevos movimientos.

ALGUNOS CÁLCULOS SOBRE EL PUENTE

Incluso sin la evidencia de las grietas de cortante, es claro por su historia que el puente se comporta como un arco triarticulado, con su línea de empujes acercándose al trasdós en la clave y al intradós en los riñones. A efectos de este análisis, el puente se dividió en segmentos de 2 m; medio arco se muestra en la figura 10.6. El peso de cada rebanada se calculó a partir de las medidas de proyecto, considerando los muros de enjuta cuando era pertinente; se utilizó un peso específico de 24 kN/m^3. Se consideró asimismo una calzada de 0,64 m, incluyendo su acabado (grava, piedra, arcilla, etc...).

En la figura 10.6 se ha supuesto que el empuje horizontal H actúa en el trasdós de la clave, siendo el primer problema determinar la sección en la que

x(m)	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	22,86
y (intradós, m)	1,370	1,380	1,461	1,629	1,895	2,232	2,687	3,263	3,988	4,906	6,106	7,822	12,038
W(kN)		48	100	104	110	119	131	148	168	196	233	288	384
ΣW (kN)		48	148	252	362	481	612	760	928	1.124	1.357	1.645	2.029
Wx (kNm)		0	200	416	660	952	1.310	1.776	2.352	3.136	4.194	5.760	8.428
ΣWx (kNm)		0	200	616	1.276	2.228	3.538	5.314	7.666	10.802	14.996	20.756	29.184

Tabla 10.1

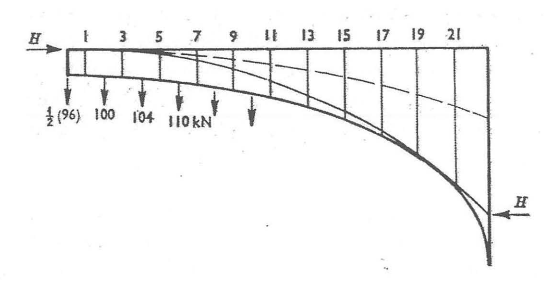


Figura 10.6
Linea de empujes para medio arco

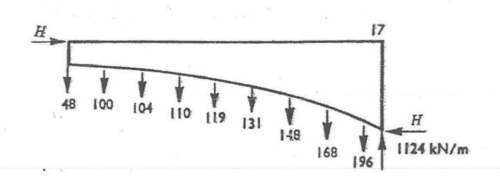


Figura 10.7
Diagrama de equilibrio para 17 m de arco

la línea de empujes toca el intradós. La tabla 10.1 se elaboró para ayudar en los cálculos; se ha tomado el origen en la clave, considerándose un ancho de puente unidad. (Para el ancho total del puente de 8,5 m, el último dato de la tabla para $\sum W$ supone un peso total del arco de 2 × 2.029 × 8,5 = 34.500 kN, que coincide con el peso de 3.500 t citado usualmente.)

La forma de usar la tabla 10.1 puede verse a partir de la figura 10.7. Este diagrama de equilibrio de una parte del semiarco se ha dibujado suponiendo que la articulación del riñón se encuentra a 17 m de la clave, es decir, que la línea de empujes toca al intradós en ese punto. Usando directamente los valores de la tabla,

17: $4{,}906H = (1.124 \times 17) - 10.802$; $H = 1.693$ kN/m

Es preciso ahora investigar las secciones adyacentes; el valor máximo de H resultante de esta búsqueda dará el mínimo valor del empuje horizontal necesario para la estabilidad del arco. (Este exactamente es el método usado por Coulomb[8] hace doscientos años.) Repitiendo, por tanto, los cálculos para secciones a 19 m y a 21 m:

19: $6{,}106H = (1.357 \times 19) - 14.996$; $H = 1.767$ kN/m
21: $7{,}822H = (1.645 \times 21) - 20.756$; $H = 1.763$ kN/m

Los cálculos son claramente indiferentes a la posición exacta de las articulaciones del intradós (lo que fue apuntado por Coulomb). La línea de empujes es tangente al intradós a unos 20 m de la clave, como se indica en la figura 10.6, y el arco triarticulado resultante tiene una luz de unos 40 m, en lugar de la total de 46 m.

El empuje horizontal total de las cargas permanentes se estima por tanto en unos 1.770 kN/m (ó 15.000 kN para el puente de 8,5 m de ancho). Sin embargo, esta cifra se basa en una geometría perfecta e idealizada. El descenso de la clave puede introducirse simplemente cambiando los coeficientes a la izquierda de las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, si el descenso total en la clave se toma como 0,5 m, la ecua-

ción para que la línea de empuje pase por el punto a 19 m del intradós es

$$5{,}606H = (1.357\times 19) - 14.996; \quad H = 1.924 \text{ kN/m}$$

Lo que representa un incremento cercano al 9% sobre el valor teórico.

La geometría del arco triarticulado es simple. Tomando la luz como 38 m, un incremento de 1 cm en la distancia entre estribos supone un descenso en la clave de unos 38/(4×6,106) = 1,55 cm; un cálculo similar para una luz de 42 m da 42/(4×7,822) = 1,34 cm. Por tanto, el descenso de la clave de 1,5 cm registrado en los últimos 60 años indica que los estribos se han alejado 1 cm como máximo durante este período.

Desde luego la línea de empujes no puede pasar por la superficie exterior de la fábrica. Tomando el valor de 1.924 kN/m, y una resistencia de rotura a compresión de 67 N/mm^2, la fábrica comenzará a romper por aplastamiento cuando el contacto entre las dovelas tenga sólo una profundidad de 2,87 cm. Una profundidad de contacto de 30 cm daría un coeficiente de seguridad satisfactorio cercano a 10; es precisamente a esta profundidad de la clave donde aparecen las grietas de cortante.

La gran masa de la fábrica (3.500 t) hace que el efecto de la sobrecarga sea pequeño, aunque no insignificante. Si se sitúa una carga de 250 kN en la clave del puente de 1 m de ancho (es decir, un vehículo de 212 t en el centro del vano del puente real de 8,5 m de ancho), la componente horizontal del empuje en el estribo aumenta en 423kN (de 1.924 a 2.347 kN/m).

han arrojado cifras significativas, algunas cantidades no se conocen con la precisión adecuada. Por ejemplo, al evaluar los pesos, se han empleado las dimensiones de proyecto en lugar de las resultantes de una medición exacta del puente.

Más aún, el recorte de la superficie del intradós no se ha considerado al calcular la línea de empujes. La figura 10.2 indica que la posición de la figura 10.6 podría ser válida para más o menos la mitad central del ancho, pero los dos bordes laterales del puente, que soportan las aceras y sus petos, se encuentran «comidos» por los *cornes de vache*.

La figura 10.8 muestra la posición de la línea de empujes obligada a pasar por el interior del espesor aparente de las dovelas; el empuje para un ancho de puente de 1 m se hace casi el doble. Por tanto, para el puente en conjunto la presencia de los *cornes de vache* puede incrementar el empuje total en los estribos en un 20% del valor correspondiente al arco elíptico completo.

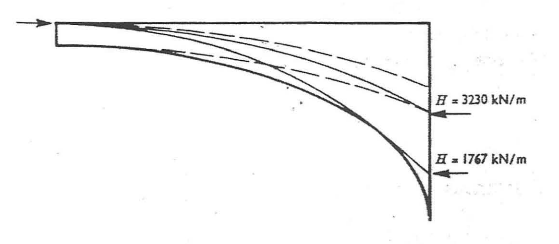


Figura 10.8
Líneas de empuje alternativas

Resumen y conclusiones

Como ya se indicó para el puente del Clare College en el capítulo anterior, la configuración triarticulada es el estado «natural» de un arco de fábrica y, en principio, el arco triarticulado es una estructura perfectamente satisfactoria. Por tanto, los primeros problemas del estribo oriental del puente de Over, que produjeron un acentuado descenso de la clave, no son significativos; lo importante es el estado real del arco deformado.

Los cálculos numéricos del apartado anterior ayudan a evaluar dicho estado. Aunque dichos cálculos

El análisis detallado del apartado anterior muestra que los niveles de las tensiones medias son cómodamente bajos, y los coeficientes de seguridad correspondientemente altos. Estas conclusiones generales continuarán siendo válidas incluso si el empuje aumenta digamos en un 20 ó 25%; hay holgura suficiente para grandes variaciones de las magnitudes antes de que la seguridad del puente empiece a ser cuestionable.

De igual forma, no existe el problema de falta de estabilidad geométrica debido a una rosca de arco excesivamente delgada (como ocurría en el puente del Clare College); por el contrario, el es-

pesor de la fábrica permite una enorme variedad de posibles líneas de empujes. Por ello, el arco podría acomodarse con facilidad a movimientos posteriores de cualquiera de los estribos, aunque dichos movimientos, si fueran muy grandes, causarían evidentemente preocupación por los mismos estribos. Sin embargo, no se han registrado movimientos significativos de éstos durante los últimos 60 años. Si tanto los estribos como la estructura del arco son en general satisfactorios, el puente sólo quedará fuera de servicio por degradación del material.

La opinión de Phillips en 1908 fue que la superficie de la calzada debía ser objeto de un buen mantenimiento para proteger el trasdós del arco, y que el puente debía inspeccionarse periódicamente buscando signos de una excesiva alteración por los agentes atmosféricos.

Suponiendo que esto se cumpla, parece difícil refutar la opinión de Baker de que el puente continuará siendo perfectamente satisfactorio. *Tempus destruendi et tempus aedificandi,* hay un tiempo para destruir y un tiempo para edificar; esperemos que el tiempo para destruir no haya llegado aún.

11

El refuerzo de la torre occidental de la catedral de Ely

Los pararrayos de la Catedral de Ely se revisan cada cinco años. En 1971 el conservador del campanario informó al Inspector de la Fábrica de que algunas bandas se habían desprendido y que, en algunos sitios, la fábrica estaba suelta o muy degradada. Algunos defectos menores se repararon inmediatamente, y se encargó una revisión de las cuatro fachadas de la torre. El informe, de principios de 1972, señalaba el mal estado de la fábrica, por ej. los pretiles de las torretas; se habían producido considerables daños por la corrosión del hierro de los tirantes y de la ornamentación, y era preciso resanar muchas juntas; además consignaba numerosos defectos menores (grietas capilares en las piedras, erosión superficial, corrosión de los marcos de hierro de las ventanas, etc.).

Como resultado de este informe, el Inspector de la Fábrica recomendó, y el Deán y el Capítulo aceptaron, que se realizase una reparación general de la sillería externa de la torre. Se estimó que una de las mayores partidas del presupuesto de esta reparación correspondía al andamiaje y, por ello, el Inspector recomendó que se aprovechase la oportunidad, mientras estaba colocado el mismo, para llevar a cabo las obras de consolidación necesarias. Por consiguiente, el Deán y el Capítulo autorizaron que una Consultora de Ingenieros realizara un informe y se revisara la torre; el informe se terminó en mayo de 1972.

Se encontraron multitud de grietas en toda la torre y se puso de manifiesto que, a lo largo de los siglos, se habían llevado a cabo una gran cantidad de obras de reparación. De éstas, la más evidente era la del decenio 1860-70, realizada bajo la dirección de George Gilbert Scott. Unas barras de hierro pasaban a través de las cajas de escalera de las esquinas y a través de la torre, a dos niveles independientes; además, había muchos tirantes locales y bandas externas para sostener los abombamientos de la sillería. Como se verá más adelante, parte de la torre está constituida efectivamente por dos cáscaras casi separadas; las grietas eran especialmente importantes en esta zona y, para atar las dos cáscaras, se habían empleado tirantes adicionales.

La inspección de los ingenieros confirmó los hallazgos iniciales: que la fábrica de los pretiles y las torretas se encontraba en muy mal estado y era peligrosa, y que se habían producido muchos daños a causa de la corrosión del hierro. Era fundamental llevar a cabo reparaciones inmediatas, y el informe concluía que sería económico y prudente realizar una intervención más extensa para reforzar la torre a fin de prevenir una posible ruina general en el futuro.

Las detalladas recomendaciones para reforzar la torre se siguieron con minuciosidad y se describirán en la debida secuencia. En resumen, las obras de reparación se pueden describir en tres apartados:

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The strengthening of the West Tower of Ely Cathedral,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 60 (1976): 123-47. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

a) refuerzo de los dos tercios inferiores de la torre, barrenando y «cosiendo» con barras de acero inoxidable y lechada de mortero; introducción de vigas anulares de este tipo a cuatro niveles y atado de las dos «cáscaras» que componen torre;
b) mejora de la estabilidad geométrica de la torre, colocando tres conjuntos de tirantes de acero inoxidable pasantes de una cara a otra de la torre, y conectando las escaleras de las esquinas; uno de estos conjuntos de tirantes sustituye parte de la intervención de Scott; los otros dos proporcionan un refuerzo adicional;
c) consolidación del campanario octogonal, de construcción más ligera que la parte principal de la torre, reforzando su parte superior con un nuevo anillo de hormigón, e insertando y pretensando cables de acero inoxidable a un nivel ligeramente inferior.

El Deán y el Capítulo aceptaron el informe de los ingenieros y, en junio de 1972, se inició una petición pública de fondos con el fin de empezar la restauración de la torre a finales de año. Durante tres semanas, en julio y agosto, se llevaron a cabo algunos trabajos exploratorios preliminares sobre el estado de la fábrica, realizándose durante esta época tres catas. Es interesante describir los resultados de una de éstas, pues indicaban cómo está construida la torre, lo que se confirmó posteriormente mediante las extensas operaciones de barrenado que se realizaron finalmente. La longitud total de la perforación era de 1610 mm y se encontró que el muro constaba (de dentro a fuera) de 180 mm de «caliza», 1280 mm de «núcleo» y 150 mm de caliza de Barnack. Así, el muro tenía dos hojas de lo que resultó ser una caliza de buena calidad; la caliza de Barnack del exterior era el material constructivo original del siglo XII (la cantera de Barnack se agotó en el siglo XV), mientras que la del interior fue probablemente colocada por Scott en su restauración del decenio 1860-70.

El núcleo central, que representa la mayor parte del espesor del muro, estaba constituido por fragmentos de piedra, mortero y guijarros; tenía mucho polvo. Los fragmentos de piedra resultaron ser de arenisca y caliza. Durante el barrenado se encontró que, a menudo, el taladro cedía unos cuantos milímetros, lo que indicaba que había vacíos en la estructura. Esta construcción típica de un muro medieval (dos pieles delgadas de piedra de buena calidad con un relleno de mortero y cascote) se confirmó en la restauración posterior. Por tanto, en las siguientes descripciones, las referencias a un muro grueso lo serán a un muro de estas características. Los muros delgados, es decir de hasta unos 500 mm de espesor, sobre todo en la parte superior de la torre, son normalmente de fábrica maciza de piedra bien aparejada.

Descripción e historia de la torre

En la figura 11.1 se muestra un alzado-sección de la fachada occidental de la torre. La planta de la torre en la parte baja se aproxima a un cuadrado de 16 m de lado y su altura total es de unos 65 m. La torre se construyó en dos etapas. No se saben las fechas con precisión, pero la parte más importante (la torre «normanda») de unos 48 m de altura, probablemente estaba ya terminada en 1189 d.C.; las fechas convencionales de la construcción de la nave, la torre occidental y el transepto occidental son 1107-1189 d.C. Estas fechas se confirmaron con la datación por carbono de algunos maderos extraídos del núcleo del muro cerca de la cúspide de la torre. Era una práctica habitual el «rigidizar» el núcleo de cascote colocando tirantes de madera en su centro, horizontales y paralelos a los muros. En las obras de barrenado se descubrieron algunos y se envió una muestra a la unidad de datación por carbono de la Universidad de Cambridge; las fechas atribuidas al fragmento de este madero eran 1134±40, es decir 1094-1174 d.C.

Los cuatro pilares se elevan desde el suelo de la catedral a una altura de 13 m para soportar los muros principales de la torre sobre arcos; estos muros son macizos y de unos 3 m de espesor. A 23 m del terreno (nivel A) la construcción cambia y se alcanza la primera de las tres arcadas; los suelos de las otras arcadas (niveles B y C) se encuentran a 27,5 y 31 m. Un techo de madera, por debajo del suelo del campanario, cierra el interior de la torre a una altura de unos 36 m, y la torre normanda continúa hasta el nivel de la techumbre primitiva a unos 46 m. El tratamiento de las tres arcadas es diferente, y también varían las dimensiones de un nivel a otro, pero la planta en el nivel C (figura 11.2) muestra la construcción típica. El muro, de algo más de 3.000 mm de espesor tiene efectivamente dos hojas. La hoja exterior es maciza y tiene 1.500 mm de espesor, mientras la hoja

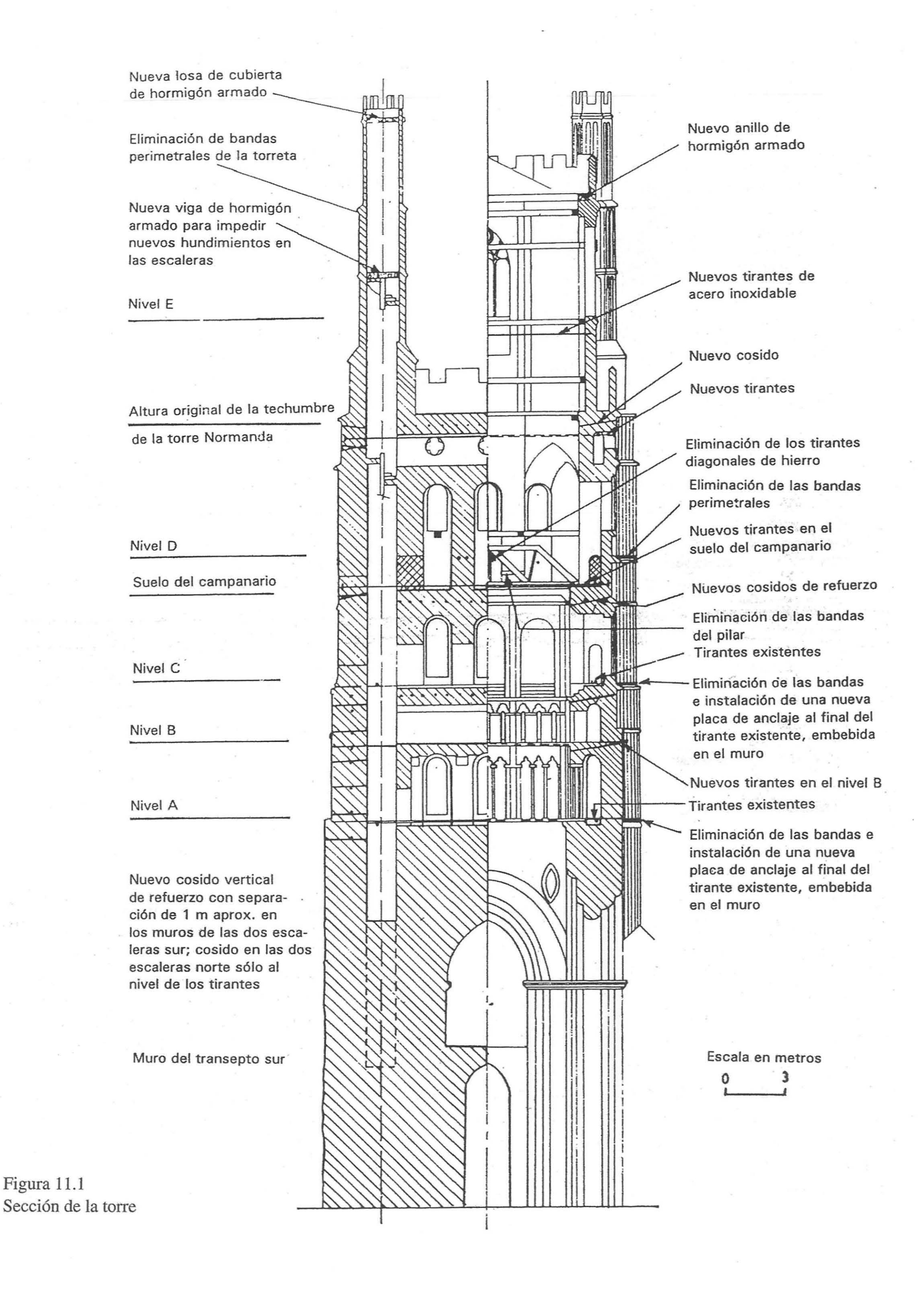


Figura 11.1
Sección de la torre

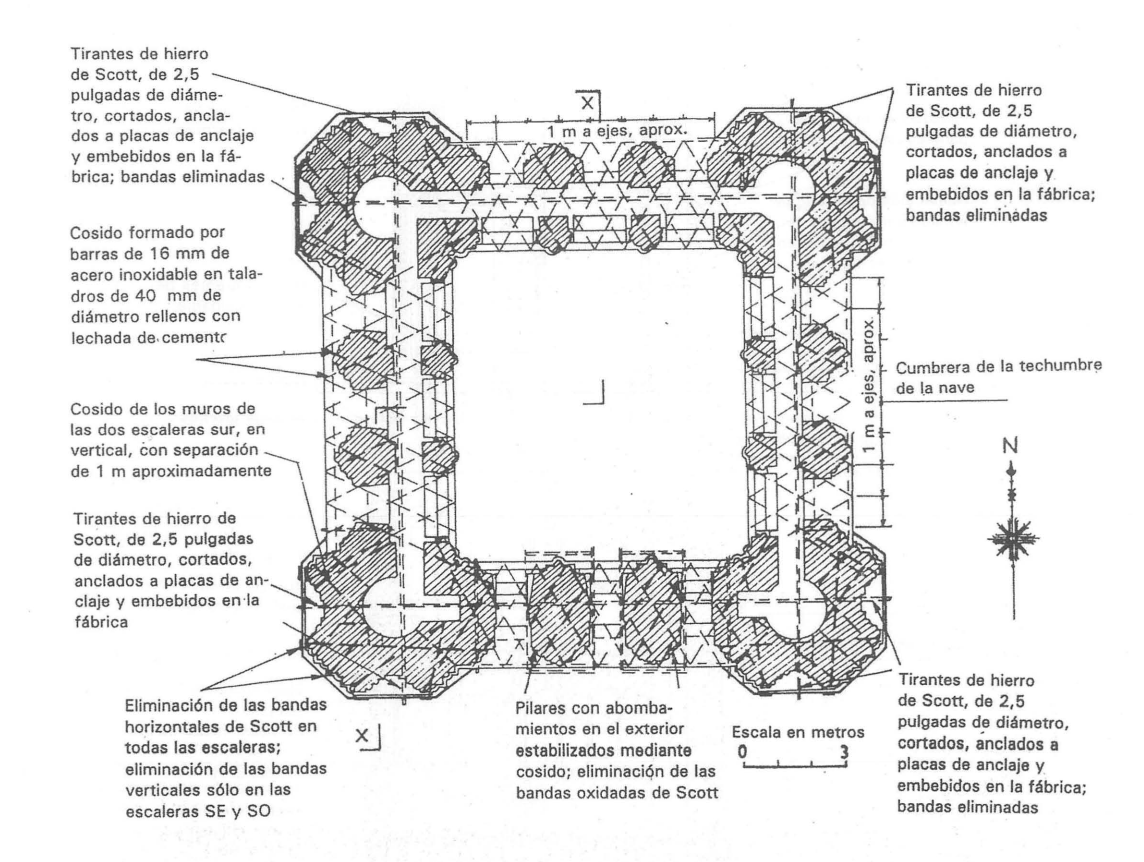


Figura 11.2
Planta seccionada en el nivel «C»

interior con arcos tiene aproximadamente 800 mm; el pasaje que separa las dos hojas tiene también un ancho de unos 800 mm. En realidad la hoja exterior maciza está construida como la que se encontró en el barrenado previo; el espesor total incluye alrededor de 1.200 mm de relleno cascote y mortero que separa las dos hojas (de unos 150 mm cada una) de buena sillería de caliza de Barnack.[1]

Desde el suelo del campanario hasta el nivel de la cubierta original (36 m a 46 m) el acabado interior es basto y estaba proyectado para que no se viera desde el interior de la catedral. La sección cuadrada interior de la torre continúa hacia arriba, pero debajo del nivel original de la techumbre se dispusieron trompas para convertir el cuadrado en un octógono. La techumbre de 1180 era probablemente de madera y puede que fuese octogonal para adaptarse a las trompas. Por otra parte, es posible que las trompas no fuesen originales, pero ya existían alrededor de 1250, época en la que ya se había reconstruido la techumbre.

En el lado sur de la torre se abre un transepto y parece evidente en la propia fábrica que, en el lado norte, se abría en tiempos un transepto similar. Sin embargo, no existen pruebas escritas ni de su terminación ni de la subsiguiente ruina y, en su estado actual (figura 11.3), la cara norte de la torre está arriostrada por el extremo de la nave lateral norte y unos estribos de fábrica muy inclinados.

El coro original y la torre del crucero se terminaron en 1106, antes del comienzo de la nave y la torre

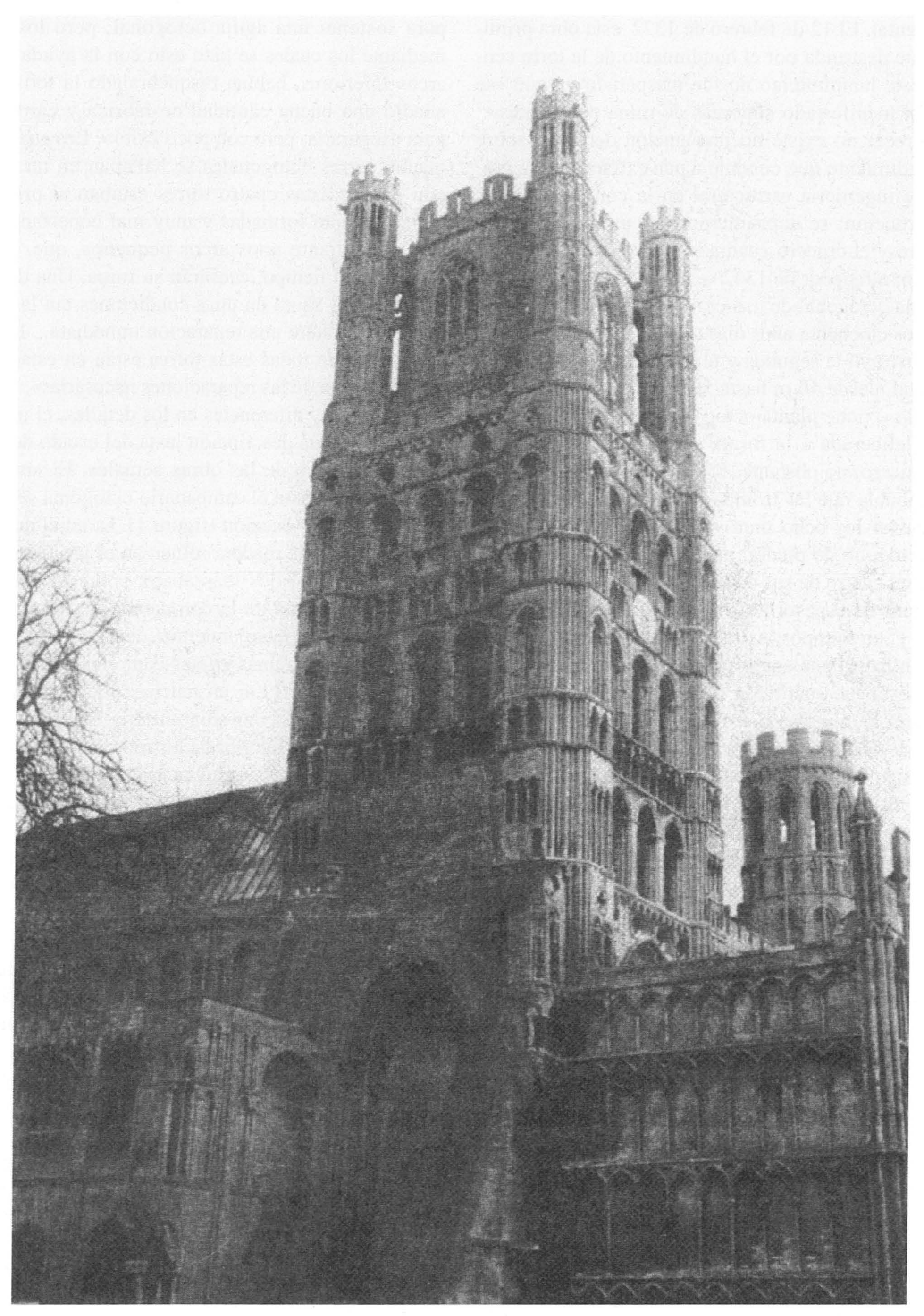


Figura 11.3
La torre occidental de Ely vista desde el noroeste

occidental. El 12 de febrero de 1322, esta obra primitiva fue destruida por el hundimiento de la torre central; este hundimiento no fue inesperado ya que «se habían manifestado síntomas de ruina poco antes».[2] Al parecer no existe documentación detallada sobre el hundimiento que condujo a una extraordinaria proeza de ingeniería estructural en la consiguiente reconstrucción; se suprimieron los cuatro pilares del crucero y el crucero cuadrado se convirtió en un octógono; alrededor de 1342 se había terminado la gran linterna octogonal de madera de Walsyngham.

Unos cincuenta años más tarde, entre 1380 y 1400, se construyó la segunda y última parte de la torre occidental, desde 46 m hasta 59 m. Esta obra («el campanario») tiene planta octogonal y quizá era una alusión deliberada a la forma del octógono de madera del crucero; no obstante, como ya se ha mencionado, es probable que las trompas ya existieran y lo lógico era elevar los ocho muros directamente. Los muros del octógono de piedra, perforados por grandes ventanas en cuatro de sus caras, son de fábrica maciza de 500 mm de espesor. Al nivel de la cubierta hay un pretil y, en tiempos, existió (como muestra el dibujo de Bentham[3]) una aguja de madera de fecha desconocida; ésta fue sustituida (a finales del siglo XVIII) por una techumbre octogonal de armadura de madera, de escasa altura. Al tiempo que se construía el campanario, se ampliaron las cuatro escaleras de esquina de la torre formando unas torretas octogonales exentas, que alcanzaban los 65 m de altura.

También por la misma época, pero no se sabe si antes o después de que se hubiera añadido el campanario octogonal a la torre normanda, se recrecieron los cuatro pilares que soportan la torre desde la cimentación.[3,4] Sea cual fuere el orden, dos cosas parecen razonablemente evidentes. La torre normanda había asentado considerablemente incluso antes de añadir la obra final. En segundo lugar, el añadido del campanario produjo daños de uno u otro tipo, y los monjes de Ely, en la primera mitad del siglo XV, se encargaron de efectuar obras de reparación. El que estas obras continuaron a través de los siglos lo atestigua el informe de Essex de 1757 al Deán y al Capítulo. «La gran torre octogonal», señala, «es un edificio muy ligero, pero se ha visto muy favorecido por el añadido de armaduras de madera y otros atados de hierro, sin lo cual apenas se podría sostener. La parte superior de la torre sobre la que se levanta el octógono, se redujo, en origen, a una forma adecuada para sostener una aguja octogonal; pero los arcos mediante los cuales se hizo esto con la ayuda de los arcos inferiores, habían resquebrajado la torre, y se añadió una buena cantidad de fábrica y carpintería para asegurarla, pero con poco éxito». Las cuatro pequeñas torres octogonales se hallaban en un estado aún peor: «Estas cuatro torres estaban al principio delicadamente formadas y muy mal conectadas a la mayor mediante unos arcos pequeños, que, por su peso, con el tiempo, causarán su ruina. Una de ellas se encuentra ahora en unas condiciones tan lamentables que requiere una reparación inmediata... Las coronaciones de todas estas torres están en estado ruinoso por falta de las reparaciones necesarias».

Aunque hay diferencias en los detalles, el informe de Essex es una descripción justa del estado de la torre al comienzo de las obras actuales. El «maderamen» que refuerza el campanario octogonal se puede ver en el alzado-sección (figura 11.1), en el que cuatro armaduras de madera refuerzan el propio campanario, junto con dos más abajo, sobre el suelo del campanario, cerca de la coronación de la torre normanda. El «resquebrajamiento» de la torre normanda quizá se refiere a unas grietas como las que se muestran en la figura 11.4; en muchas partes de la torre, estas grietas se encontraron entre la hoja maciza exterior y la arcada interior de los muros de la torre.

Essex llevó a cabo gran cantidad de obras pero en 1845 fue precisa otra restauración de la torre. George Gilbert Scott se encargó de las obras más importantes del siglo XIX, y en 1860 insertó el primer sistema de tirantes de hierro forjado próximo a la cúspide de la torre normanda. El hierro tenía una sección de 5 por 1 1/4 pulgadas, y los tirantes (en el nivel D, figura 11.1) pasaban diagonalmente a través del campanario abierto, llevándolos a través de la fábrica para rodear el exterior de las escaleras; el conjunto estaba tensado por un sistema de cuñas.

Scott instaló dos sistemas de tirantes más, en los niveles A y C (figura 11.1). En cada nivel, se colocaron cuatro tirantes de 2 1/2 pulgadas de diámetro en los pasajes (entre las dos hojas de cada muro); estos tirantes pasaban por el centro de las escaleras de cada esquina, y estaban unidos a las bandas exteriores, el remate estaba constituido por grandes tuercas al descubierto. La figura 11.5(a) muestra las bandas exteriores de la fachada occidental en la esquina suroeste sobre el pórtico de acceso. Scott introdujo más refuerzos de este tipo a otros niveles. En concreto dos

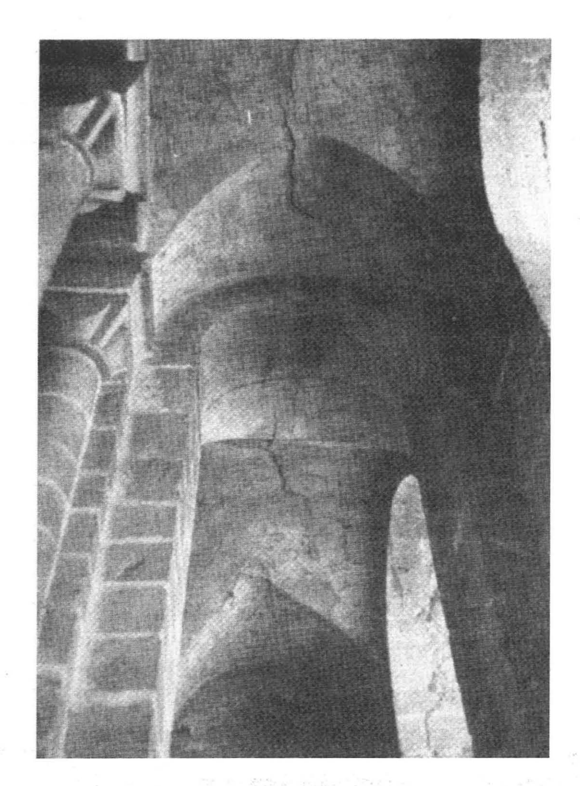


Figura 11.4
Grietas en el intradós del nivel «B», galería oeste

de los pilares de las ventanas de la fachada sur se ataron con tirantes y correas (figura 11.6), y en la cúspide del campanario, unas bandas de hierro aseguraban las cuatro torretas y se ataron al armazón de madera exactamente por debajo de la techumbre de madera de la torre.

Aunque quizá se pueda cuestionar la eficacia de alguno de estos refuerzos, el propósito es evidente. Los tirantes principales de los niveles A, C y D controlaban la forma cuadrada de la torre e impedían cualquier movimiento de la fábrica a esos niveles. Las bandas exteriores aseguran que el «atado» de los tirantes se reparta alrededor de las esquinas de las escaleras y, al mismo tiempo, intentan controlar los abombamientos locales de la fábrica (como en la esquina suroeste que se muestra en la figura 11.5(a)). Sin embargo, los tirantes principales no sirven en absoluto para controlar los movimientos entre las dos hojas de los muros; en cada nivel de arcadas se pueden ver grietas similares a las de las figura 11.4. Aún más, las bandas exteriores no sólo eran ineficaces debido a la corrosión; en muchos sitios estaban produciendo daños crecientes a la fábrica.

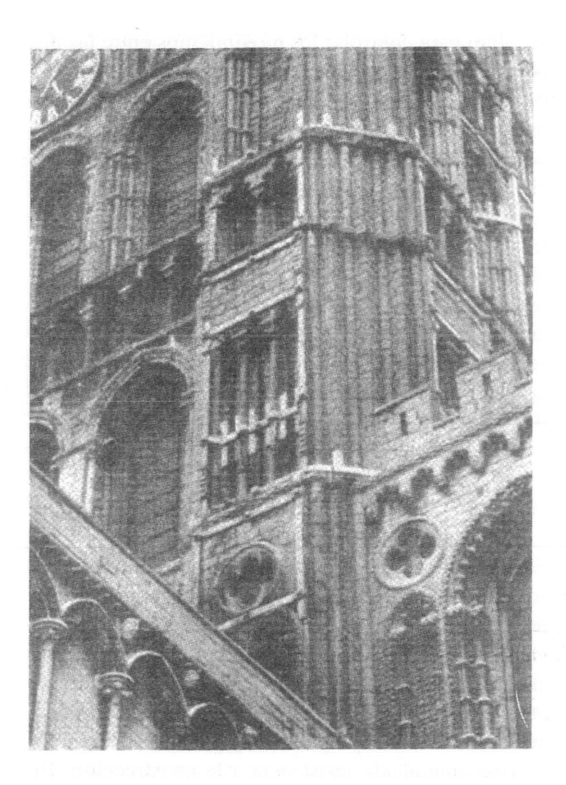
Las bandas correspondientes en el interior de la torre (de menor volumen) estaban en muy buenas condiciones. Las diversas reparaciones realizadas en la restauración se describen detalladamente más adelante, pero aquí, es preciso señalar que todo el bandeado exterior de Scott se ha suprimido (compárense las figuras 11.5 (a) y (b), mientras el hierro del interior no se ha tocado, si no constituía un estorbo.

PRINCIPIOS ESTRUCTURALES DE LA RESTAURACIÓN

Es prudente, a la vez que conveniente, considerar el edificio de fábrica como un conjunto de piedras aparejadas en seco, algunas escuadradas y otras no, colocadas una sobre otra para configurar una estructura estable. El mortero se puede utilizar para rellenar los intersticios, pero éste será, al principio, poco resistente, y con el tiempo puede degradarse; no se puede suponer que añade resistencia a la construcción. En realidad, la estabilidad del conjunto está asegurada por la compactación debida al peso de los diversos elementos; existirá un estado general de tensiones de compresión pero sólo se pueden resistir tracciones muy débiles.

En particular, la forma de la construcción se mantendrá mediante la traba de los elementos; en el caso de piedras con caras escuadradas, si hay posibilidad de deslizamiento, el rozamiento debe actuar en esas caras. Así los esfuerzos de compresión verticales debidos a la gravedad actúan como una especie de pretensado de la fábrica, manteniendo la estabilidad del conjunto y permitiendo que los esfuerzos internos inclinados se transmitan sin producir ni tracciones ni deslizamientos.

La magnitud de los esfuerzos de compresión que aparecen debido al peso propio del material se pueden estimar con bastante facilidad. La tensión debida al peso propio en la base de un muro de espesor constante es simplemente ρh, donde ρ es el peso específico del material y h la altura del muro. Es interesante comparar esta tensión por peso propio con la resistencia a rotura de la piedra. Utilizando valores



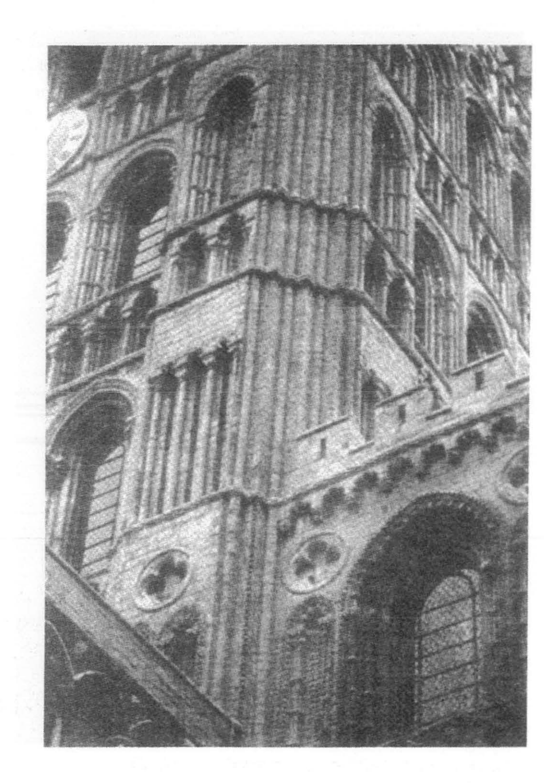


Figura 11.5
(a) Atado externo en la esquina suroeste, abril de 1972. (b) Esquina suroeste, diciembre de 1974

aproximados (que, como se verá enseguida, es todo lo que se necesita) la resistencia a rotura de una piedra de resistencia media podría ser 40.000 kN/m² (40 N/mm²), y el peso específico 20 kN/m³. Así, si se construyera un muro con una altura tal que se produzca la rotura por aplastamiento del material en la base, esta altura h sería de 2.000 m. Si las tres cuartas partes del muro se perforan en la base con ventanas, arcadas o algo similar, la cuarta parte restante de fábrica maciza todavía podría tener una altura de 500 m, o casi 10 veces la altura de la torre de Ely.

Considerando construcciones de fábrica de alturas habituales, estas cifras implican que el coeficiente de seguridad es muy grande si los cálculos se refieren a la resistencia de rotura a compresión de la piedra. En

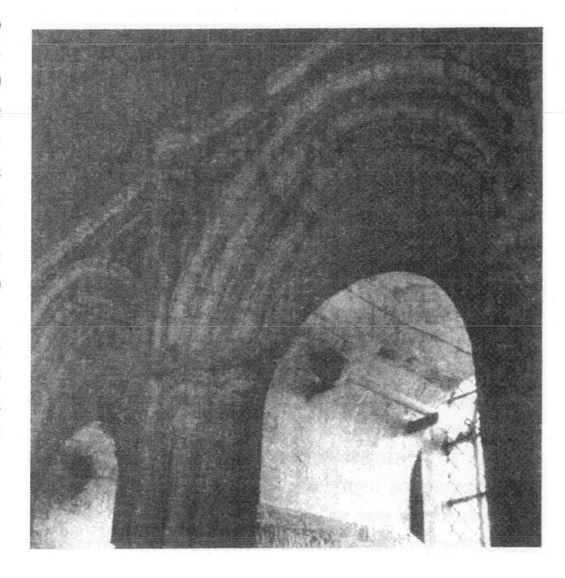


Figura 11.6 (*derecha*)
Fachada sur de la torre (interior), nivel «C», abril de 1972

realidad, los elementos más tensionados de un edificio antiguo tienen unas tensiones medias no mayores que 0,1 la resistencia de rotura a compresión del material y, de hecho, la mayor parte de la estructura portante estará trabajando a menos del 0,01 de dicha resistencia a rotura; las plementerías y los elementos secundarios estarán sometidos a una tensión «de fondo» de, digamos, 0,001. Aunque los cálculos anteriores sólo proporcionan el orden de magnitud de los valores, se pueden extraer algunas conclusiones significativas.

Un primer (y menor) aspecto concierne al nivel de las tensiones «de fondo». Aparentemente, para evitar la posibilidad de deslizamiento y la pérdida de cohesión de la fábrica, sólo se necesita una pretensión de compresión muy pequeña. Así, en relación con la presente restauración, en la que no todos los principios están igual de bien definidos, tener un nivel de referencia con el que medir un esfuerzo de pretensión aplicado artificialmente, supone una cierta ayuda, como se señala más adelante.

No obstante, del orden de magnitud de los cálculos se extrae una conclusión más importante. Si los valores *medios* de las tensiones resultantes de los cálculos son bajos, toda la teoría del funcionamiento estructural de la fábrica se convierte en parte de la más amplia teoría plástica de las estructuras.[5] Las hipótesis de la teoría plástica son bien conocidas y no es preciso detallarlas; para los propósitos actuales el requisito de que las deformaciones sean pequeñas implica que no haya elementos esbeltos de la estructura (como columnas o muros delgados) que puedan pandear. En estas circunstancias, se aplica el potente «teorema de la seguridad». En términos sencillos, este teorema afirma que si es posible encontrar un sistema de tensiones internas que equilibre las cargas exteriores y este sistema es satisfactorio en el sentido de que no haya peligro de fallo por aplastamiento del material, entonces, es absolutamente cierto que la estructura en conjunto es segura.

El análisis estructural de la fábrica se convierte en algo muy distinto de lo que proporciona una teoría elástica convencional. En particular, no es preciso calcular incógnitas «hiperestáticas» mediante las ecuaciones de compatibilidad; por ejemplo, no es necesario determinar con precisión las condiciones de la cimentación para determinar los desplazamientos a utilizar en los cálculos subsiguientes. El ingeniero o arquitecto no busca determinar el estado «real» de la estructura. En cambio, todo lo que necesita examinar es un único estado de equilibrio, y tiene derecho, realmente en cierto sentido se le anima, a buscar un estado de equilibrio favorable —por ejemplo, uno en el que se suponga que las tensiones se reparten uniformemente por toda la fábrica en vez de ser bajas en algunos sitios y altas en otros (y no sería necesario comprobar que las tensiones «reales» están distribuidas uniformemente).

Surge así un principio fundamental de la restauración de las fábricas; hay que cerciorarse de que tanto el conjunto de la estructura, como los elementos aislados de la misma, se hallan en un estado que se corresponde con las hipótesis de la teoría plástica de las fábricas. Esta aparente inversión del proceso científico, en el que la teoría normalmente explica la práctica en vez de que la práctica, como aquí, tenga que cumplir la teoría, realmente no es más que un buen sentido estructural. En la construcción de acero, lo análogo sería que el material tuviera unas cualidades mínimas de resitencia y ductilidad; una analogía más rigurosa sería la especificación exacta del material para la construcción de hormigón armado.

Así, volviendo al sencillo ejemplo de un muro de fábrica de dos hojas doble con relleno, es preciso cerciorarse de que el relleno se consolida, si es necesario, para que pueda soportar cómodamente la tensión de equilibrio calculada. Si nos aseguramos de esto, la resistencia real del relleno no importa; el proyectista al analizar las tensiones no está obligado a distribuirlas con arreglo a una idea especulativa sobre las rigideces relativas de la piel y el relleno. De hecho, uno de los primeros cometidos en Ely era asegurar que los muros eran, en este sentido, lo bastante resistentes.

Habiendo hecho que la estructura se ajuste a las hipótesis de la teoría plástica, el proyectista puede analizar otras consecuencias de esa teoría. Estará trabajando con conjuntos de fuerzas en la fábrica y, en general, no le interesarán las magnitudes reales de las tensiones. Por supuesto, se deben calcular las tensiones de algunos elementos de la estructura. En Ely se tiene un ejemplo en los cuatro pilares principales que, en definitiva, soportan el peso de la torre. Lo que le interesa al ingeniero o arquitecto es asegurar que realmente puede encontrar un sistema de esfuerzos dentro de la fábrica. Si las fuerzas estuvieran obligadas a pasar por fuera de la fábrica (al igual que una línea de empujes podría verse obligada a estar fuera del espesor de un arbotante mal proyectado),

esto implicaría tracciones en la fábrica y, como se ha señalado, es bastante realista suponer que la fábrica es incapaz de soportar tracciones.

Así el analista busca sistemas de esfuerzos de *compresión* en equilibrio con las cargas exteriores y, por definición, estos esfuerzos deben estar dentro de la fábrica; lo importante no es calcular la magnitud de las tensiones, sino verificar si la fábrica tiene la *forma* correcta. Efectivamente, la cuestión es de carácter geométrico.

Así surge un segundo principio de la restauración de las fábricas. Si un edificio se ha sostenido durante un corto periodo de tiempo, es garantía suficiente, por el teorema de la seguridad, de que su geometría es satisfactoria. En la restauración, hay que cerciorarse de que no hay síntomas de deformación continua; es preciso estabilizar la geometría de la estuctura.

Los dos principios enunciados a partir de la teoría plástica convencional, a saber, que se debería reforzar la estructura de relleno y estabilizar la geometría, pueden parecer tan evidentes en sí mismos como para que la aplicación de una teoría de altos vuelos resulte un poco absurda. Sin embargo, alguna de las conclusiones que se pueden extraer de la teoría plástica quizá no sea tan evidente. A una de éstas ya se ha aludido: que la mera existencia de una estructura de fábrica es suficiente prueba de que ésta es absolutamente segura. El periodo mínimo para que una estructura se sostenga podría ser de algunos minutos, o quizá sería más realista, para permitir la compactación del mortero de fraguado lento, decir un año. Si se analiza una estructura existente y manifiesta deformaciones o grietas, pero no síntomas de deformación continua, la estructura deformada también es absolutamente segura. La mera presencia de grietas antiguas no es en sí misma alarmante; en realidad, como ya se ha afirmado en otra parte,[6] es lógico esperar que el agrietamiento se haya producido al adaptarse la estructura a su entorno. Un estudio de esta adaptación normalmente proporciona un indicio claro de las razones de la presencia de las grietas.

Un cambio en el entorno, donde la escala de tiempo puede ser de una generación más que de un año, se produce en el terreno que soporta la estructura. Hasta ahora, las conclusiones se han basado en el análisis únicamente de la fábrica, pero los asientos debidos, por ejemplo, a la consolidación del terreno debajo de la cimentación pueden interactuar con la misma. La cuestión aquí es lo que en análisis estructural convencional se denomina la «teoría de la pequeñas deformaciones». La hipótesis general de la teoría de estructuras es que las deformaciones son lo suficientemente pequeñas como para no afectar de manera significativa a las ecuaciones de equilibrio, lo que a su vez significa que se pueden ignorar las alteraciones en la geometría del conjunto. Como se ha visto, es precisamente la geometría global lo que es de fundamental importancia para la estabilidad de la fábrica.

Para aclarar la naturaleza de los cambios geométricos que pueden derivarse del asentamiento, es evidente que la torre occidental de Ely ha asentado unos 300 mm con respecto a la nave y el transepto suroeste. Esto se puede ver fácilmente en el exterior examinando las hiladas horizontales de la sillería de la nave; en el interior, la nave y las arcadas del transepto colindantes con la torre manifiestan grandes deformaciones al adaptarse al descenso de la torre. Todo esto es sencillo y trivial; los cuatro pilares que sostienen la torre, muy cargados, producirán grandes tensiones en el terreno, y la consolidación y los asentamientos se producirán inevitablemente. Es de esperar que cualquier torre de este tipo asentará con respecto a las estructuras que la rodean; el tiempo de consolidación de la mecánica del suelo, es decir, el necesario para alcanzar el equilibrio efectivo, es de una generación, más que de un año. Si los asientos no son uniformes o conducen a cambios importantes en la geometría de la torre, puede ocurrir que la torre se derrumbe. Por otra parte, una vez que este período de riesgo se ha superado sin problemas, y siempre que no haya cambios en las condiciones generales del terreno, como las que causarían las alteraciones en el nivel freático, la torre se puede considerar estructuralmente segura.

Esta «regla de la generación» comprende un gran número de ruinas, tanto en Inglaterra como en otros sitios. Por ejemplo, los grandes hundimientos de Winchester, Gloucester, Worcester y Beauvais (dos veces), ocurrieron todos en un corto período de tiempo después de haber finalizado las obras. Hay dos ejemplos que superaron periodos mucho más largos; la torre de Chichester, por ejemplo, se hundió en 1861 y, como se ha señalado, la torre del crucero de Ely se sostuvo durante dos siglos antes de que se derrumbara en 1322. La explicación para Ely se puede buscar en los efectos de la capa freática fluctuante de los Fens, sin drenar. Sea como fuere, la torre occidental no manifiesta en absoluto síntomas de haberse movido en

los últimos 600 años; después del gran asentamiento uniforme inicial, se ha mantenido perfectamente. El proceso de actuación que indica la aplicación de la teoría plástica es, simplemente, dejarla como está.

Así, resumiendo, los siguientes principios son los que rigen la restauración de las estructuras de fábrica, y se utilizaron como guía en las obras de la torre occidental que se describen aquí:

a) la fábrica disgregada y el relleno de cascote se deben consolidar hasta que alcancen una resistencia suficiente; no es preciso que la resistencia sea la de la fábrica mejor aparejada, pero debe ser tal que los estados tensionales calculados sean relativamente pequeños comparados con esa resistencia.
b) si existen pruebas de una deformación continua de la estructura o se sabe que hay esfuerzos permanentes (como los empujes de las techumbres) que pudieran deformar la estructura en el futuro, se deben tomar medidas para estabilizar la geometría del conjunto.
c) si no existen pruebas de esa deformación continua, aunque existan deformaciones permanentes debido a causas que ya no actúan (por ejemplo, el asentamiento de la cimentación), no es preciso realizar ninguna intervención.

Obras de reparación

Como se ha mencionado, la torre ha asentado con respecto al resto de la estructura, pero no hay indicios de que se hayan producido movimientos durantes varios siglos. Scott[7] encontró que las partes normanda e inglesa primitiva de la catedral descendían hasta lo que se consideró una cimentación sólida de roca, «pero sólo era una capa delgada de piedra, bajo la cual se hallaba un estrato de material más blando. Alan de Walsingham suprimió esta capa delgada y bajó hasta la roca firme situada unos pies más abajo».

Scott hace referencia a las condiciones cerca del crucero. Se tenían los resultados de una reciente cata próxima a la torre. Esta cata se realizó en el extremo occidental del ala norte de la nave y mostraba un estrato de arenisca de, aproximadamente, 1 m de espesor a una profundidad a 1,5 m por debajo del nivel del suelo de la nave. La cata se realizó hasta una profundidad de unos 10 m, pasando los últimos 6 m a través de arcilla compacta gris oscuro; no había indicios de un segundo estrato de «roca firme».

Sea cual fuere el nivel real de la cimentación de la torre, parece que es en la arcilla compacta que se encontraba debajo de la arenisca donde se había producido el asentamiento a largo plazo. Aún más, se produjo una consolidación satisfactoria, en el sentido de que todos los asientos han cesado hace tiempo. Por tanto no había que hacer reparaciones en la cimentación, y las bases de los pilares principales no se descubrieron para su examen.

No había, ni hay, signos de alarma en los cuatro pilares principales y los arcos; las grietas menores de la parte superior de los arcos no tiene importancia desde el punto de vista estructural. Si el peso total de la torre se estima en 240.000 kN cada pilar, con una sección transversal de unos 20 m^2 soportará una tensión de 3.000 kN/m^2 (3 N/mm^2); el área de la sección transversal de cada pilar quizá era la mitad de este valor antes de que éstos se recrecieran a finales del siglo XIV y principios del XV. La construcción interna de los pilares se desconoce. Si están constituidos por fábrica bien aparejada en todo su grosor, la tensión media de trabajo será 10 ó 20 veces menor que la resistencia de rotura a compresión del material. Si el núcleo es de cascote, el factor de seguridad se reducirá en consecuencia.

Si el peso total de la torre se reparte uniformemente sobre el terreno sobre toda el área encerrada por la torre, es decir unos 240 m^2, las tensiones pueden tener un valor medio de 1 N/mm^2. Éste es lo bastante alto como para explicar el considerable asiento que se ha producido, pero no tan alto como para afectar a una arcilla compacta consolidada, del tipo indicado por la cata.

Tanto los pilares como las cimentaciones se encuentran en un estado satisfactorio, y en la torre no se llevó a cabo ninguna obra por debajo del nivel A a 23 m (excepto la supresión de la las bandas inferiores de la fachada occidental que se pueden ver en la figura 11.5(a)).

Cosido

Algunas partes de la torre se han «transformado» en hormigón armado taladrando, «cosiendo» y rellenando con lechada de cemento. A modo de ejemplo, la figura 11.2 muestra la planta de la torre al nivel C, exactamente debajo de los tirantes de Scott de $2^1/_2$

pulgadas de diámetro. En esta planta se ven las posiciones aproximadas de gran parte de las barras de refuerzo, colocadas en agujeros taladrados horizontalmente desde el exterior de la torre. El nivel del refuerzo estaba debajo de los pasajes, de manera que cada agujero, de unos 4,5 m de largo e inclinado, pasaba a través de la fábrica maciza y el relleno de cascote, de un lado a otro del muro de 3 m. Cada agujero tenía un diámetro nominal de 40 mm y en ellos se colocaron, antes de enlechar, barras de acero inoxidable Staifix de 16 mm de diámetro. Estas barras tenían en su composición un 18% de cromo, un 10% de níquel y un 3% de molibdeno, hasta Grado AISI 316; estaban trabajadas en caliente para proporcionar una gran resistencia. Las barras eran también dúctiles y resistentes a la corrosión y se escogieron por su disponibilidad.

Los agujeros para las barras Staifix tienen una separación de 1 m entre los centros y la disposición se mantiene en las cuatro escaleras de esquina de manera que, después bombear la lechada en los agujeros, en el nivel C se formaba una viga anular completa. La lechada penetra en los huecos del relleno de cascote y consolida la fábrica alrededor de cada agujero perforado hasta un diámetro de quizá 1 m; así, la viga anular tiene un espesor igual al del muro de fábrica de la torre (3 m) y, quizá, 1 m o más de canto.

Estas vigas anulares completas se dispusieron en cuatro niveles de la torre normanda, en los niveles B y C, en el del suelo del campanario y en el de la techumbre original. En la sección-alzado de la figura 11.1 se observará que estas vigas anulares atan las dos hojas del muro, y evitarán completamente cualquier posibilidad de que las hojas se separen.

Al igual que los problemas de consolidación del conjunto, había numerosas zonas de la torre donde se habían producido movimientos que podrían continuar. Por ejemplo, las bandas exteriores originales de Scott contenían los abombamientos en la fábrica. En los 8 m, aproximadamente, de la escalera suroeste que se ve en la figura 11.5, toda la fábrica se estabilizó taladrando desde el exterior hasta la propia escalera, insertando barras Staifix y enlechando. Así, las dos vigas anulares principales de «hormigón armado» en los niveles B y C se integran ahora con una escalera reforzada entre los niveles A y C. Análogamente, los dos pilares principales de la cara sur sobre el nivel C (figura 11.6) se reforzaron por cosido, y se suprimió la pesada cerrajería (que también se puede ver en la figura 11.5). Este tratamiento local estaba encaminado, en su mayor parte, a la supresión de todo el hierro exterior; las zonas tratadas de esta manera se muestran en la figura 11.7.

Todos los taladros de 40 mm de diámetro se realizaron mediante perforación con percusión. El polvo de los agujeros fue retirado utilizando chorro de aire y planteó pocos problemas. En la descripción anterior parecía implícito que los agujeros atravesaban el muro de lado a lado, pero en realidad se tuvo mucho cuidado en tratar de detener la perforación a 100 ó 150 mm, para reducir al mínimo su aparición en el interior de la catedral, no sólo de la perforación, sino también de la subsiguiente lechada. Este procedimiento implicaba un replanteo muy preciso de los agujeros y cada uno se realizaba después de haberlo discutido entre el aparejador y el capataz de la subcontrata de perforado. En cualquier caso, los agujeros debían colocarse entre límites verticales muy estrechos; en el nivel B, por ejemplo, era preciso que los redondos de cosido que unen la hoja exterior del muro con la arcada interior pasaran lo más cerca posible del centro del suelo de la galería de 300-400 mm de espesor. Hubo unos pocos «accidentes»; uno o dos redondos aparecieron debajo del intradós de las galerías, y uno o dos taladros pasaron hasta el muro interior. Sin embargo, la subcontrata realizó las perforaciones con una precisión extraordinaria; uno o dos agujeros ciegos se abrieron deliberadamente y se encontró que se habían detenido con el recubrimiento requerido.

Antes de enlechar con cemento Portland puro, los agujeros se limpiaron con chorro de agua, los escapes de agua (que a veces se produjeron a cierta distancia de los puntos de enlechado) se cerraron con papel y, durante el enlechado, se vigilaron cuidadosamente las fugas, tanto en el interior como en el exterior. Las fugas del exterior se limpiaron continua e inmediatamente. En principio, no se toleraron fugas dentro de la catedral; efectivamente, si se producía alguna fuga en el interior se paraba el trabajo de inmediato hasta que se hubiera taponado. En una ocasión, el agua que lavaba el exterior de la torre encontró su vía hacia dentro de la catedral, en la cara sur de la torre en el transepto sur. Esto se produjo lejos del punto de enlechado, y no se observó hasta que se formó una mancha considerable (pero, a menos que se señale, la mancha es realmente poco apreciable). Aparte de este contratiempo, se cree que no hay manchas ni dentro ni fuera de la catedral.

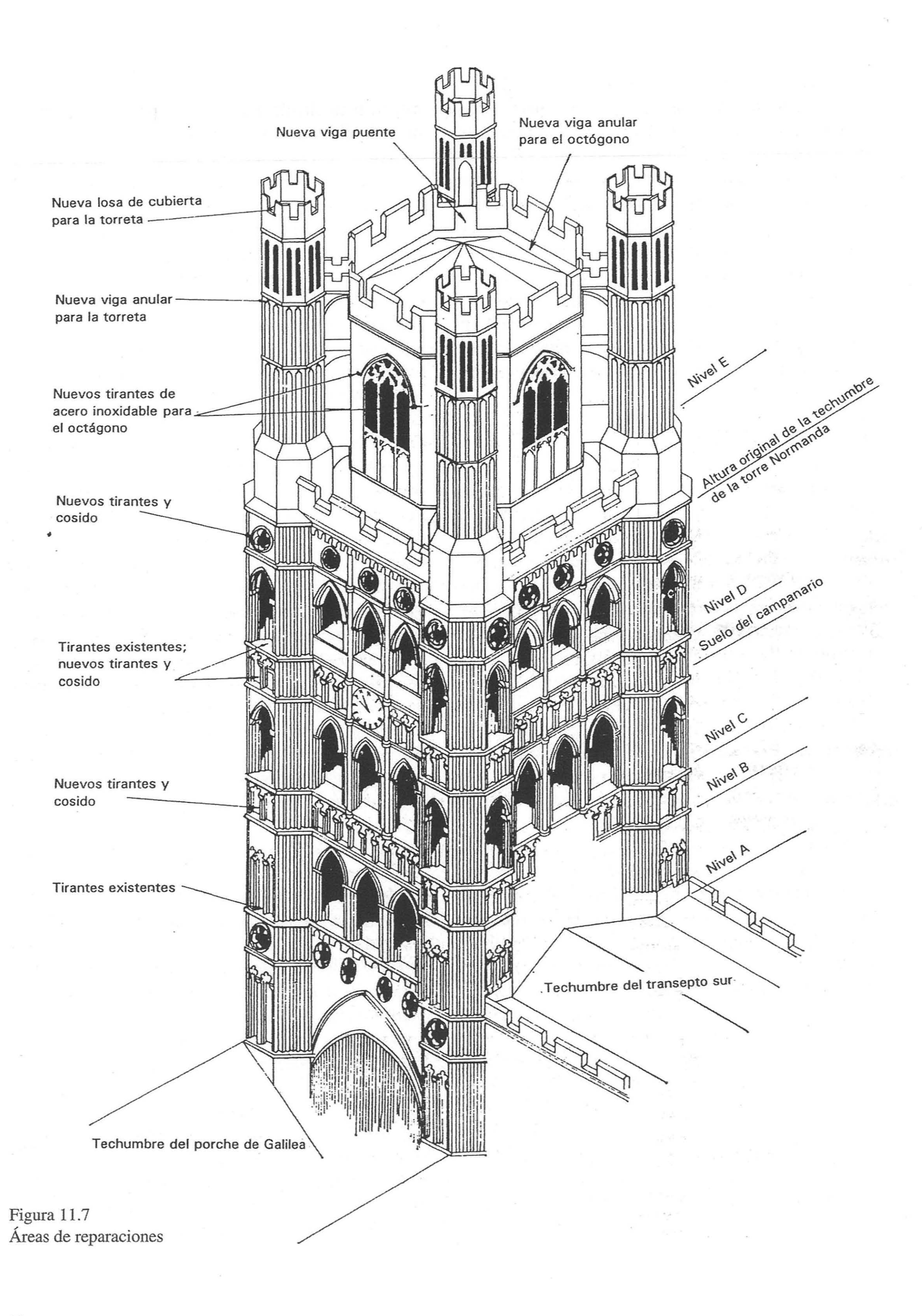


Figura 11.7
Áreas de reparaciones

El enlechado se realizó con un control muy riguroso. Se utilizó una bomba de mano, y el operario era sensible a las diferencias entre el fluir relativamente libre del mortero sometido a baja presión y el repentino «endurecimiento» cuando el agujero estaba lleno. Las cantidades de cemento empleadas variaban entre medio saco y cuatro sacos por agujero, con una media de aproximadamente un saco; uno de los agujeros admitió hasta doce sacos.

Los agujeros enlechados se terminaron trepanando con un taladro tubular de 75 mm, e insertando arenisca nueva; los taladros de cosido, cientos de ellos, son casi imperceptibles de cerca y prácticamente invisibles de lejos.

Tirantes de acero inoxidable

El principio general que llevó a Scott hace un siglo a colocar los tirantes en los niveles A y C es correcto; los tirantes forman un anillo completo en la torre y mantienen unidas, rígidamente, las cuatro escaleras de las esquinas, satisfaciendo así el requisito fundamental de asegurar la estabilidad geométrica. Sin embargo, adolecen de los dos defectos ya señalados. Primero, se colocaron entre las hojas interior y exterior del muro y, por tanto, no contribuían al atado de las mismas. Segundo, las bandas de hierro que repartían la carga concentrada de cada tirante alrededor de la fábrica de la escalera estaban corroídas. Había un tercer defecto, no estructural; los tirantes pasaban exactamente por los centros de las escaleras de las esquinas e impedían el acceso.

El sistema fundamental de Scott se extendió a la restauración actual mediante la inserción de dos conjuntos de tirantes de acero inoxidable en el nivel B y en la coronación de la torre normanda, y sustituyendo los tirantes diagonales de Scott, situados sobre el suelo del campanario, por un tercer conjunto de tirantes. Cada uno de estos tres niveles ha sido cosido para formar una viga anular, de manera que los tirantes, que fueron postesados, actuaban sobre zonas reforzadas de la torre. En la figura 11.8 se muestra el esquema general; a ambos lados de cada escalera de esquina se colocaron barras inclinadas de 32 mm de diámetro y se conectaron a una barra central de 40 mm de diámetro situada aproximadamente en el centro del muro, en el espacio entre las dos hojas. Planchas de acero inoxidable (150 mm × 150 mm) embutidas detrás de la superficie de la fábrica funcionan como anclajes de las barras de 32 mm; la zona general de los anclajes se cosió y enlechó para que la carga del tirante se distribuyera en la fábrica de la escalera. Todo el acero inoxidable de los tirantes y los yugos es del tipo 18/8 austenítico de Grado AISI 304.

Las perforaciones para las barras de 32 mm de diámetro requerían un cuidadoso replanteo. Se utilizó una barrena lenta para conseguir una gran precisión; estaba impulsada por aire y montada sobre un armazón rígido y se podía mover hacia adelante mediante un tornillo manual. Primero se utilizó un taladro de 50 mm de diámetro, pero era difícil mantenerlo en la línea correcta. Por último se utilizó una broca de 65 mm de diámetro, con inserciones exagonales de carburo de tungsteno, afilado según fuese necesario. A medida que se ampliaba el agujero, se enroscaban fustes huecos de 65 mm de sección hueca detrás de la broca. Alguno de los agujeros discurría «ciego» a través de más de 5 m de fábrica y, en los pasajes, era preciso que salieran en la posición del yugo, con una precisión de unos 25 mm en cualquier dirección. (El diseño de los yugos de unión permitía cierto desalineamiento de las barras.) Finalmente, sólo se tuvo que volver a taladrar uno de los 48 agujeros. El taladrado estaba asistido con agua y se tuvieron que hacer cuidadosas comprobaciones de las fugas a través de la fábrica.

El sistema de tuercas y arandelas en los yugos de los tirantes permitía que se pudiesen postensar mediante gatos (con anterioridad se había intentado, sin éxito, tensar las barras mediante tuercas). La imposición de la tensión de compresión está encaminada a asegurar totalmente la geometría al nivel de los tirantes; cualquier tendencia a la formación de grietas verticales en los muros de la torre se contendrá por medio de las tensiones de compresión horizontales en la fábrica.

Tal y como se instalaron, los tirantes ejercen una tensión de compresión «de fondo» del orden de la mencionada anteriormente (i.e. 0,001 de la resistencia de rotura a compresión). Se ha señalado que los tirantes se situaron contiguos a las vigas anulares y se podría considerar que cada una de éstas tiene una sección transversal de una anchura de 3 m (el ancho del muro) y una altura de 1 m (la dimensión vertical de la dispersión de la lechada). Si se considera que toda la sección transversal está tensionada traccionando los tirantes, la barra principal de 40 mm de diámetro representa aproximadamente el 0,05 % del

área de la viga anular. (Nótese que las barras de cosido, digamos cinco, de 16 mm de diámetro, representan, en una sección transversal aproximadamente el 0,03 % de los 3 m^2.) Estas cuantías de armado son, desde luego, muy bajas en comparación con las habituales en hormigón; este aspecto puede ilustrarse con el cálculo del nivel de las tensiones de compresión. Si los tirantes tienen que «trabajar» a la mitad de su límite elástico a unos 120 N/mm^2, esto corresponde (para barras de 40 mm de diámetro) a una pretensión de unas 150 kN, ó 50 kN/m^2 en la sección transversal de 3 m^2 de la viga anular. Sin embargo, este valor, aproximadamente 0,001 de la resistencia de rotura a compresión de la piedra, corresponde al orden de magnitud adecuado de una tensión de fondo.

Es interesante señalar que si los tirantes de hierro forjado de Scott de $2^1/_2$ pulgadas de diámetro hubieran estado tensados hasta 3 tons/pulgada^2 (50 N/mm^2), proporcionarían una fuerza de tracción de 15 t, y que este nivel de tensión es razonable para el material. Cabe esperar, de hecho, que los tirantes nuevos se comporten de la misma manera que los antiguos.

La tensión de compresión inducida permanentemente en la fábrica por medio de los tirantes evitará la formación de grietas verticales y, por tanto, impedirá cualquier alteración de las dimensiones globales de la torre en estos niveles. En realidad la tensión no se mantendrá constante, sino que fluctuará con la temperatura ambiental de los tirantes de acero; sería más exacto decir que la longitud de los tirantes se mantendrá constante, ya que la variación de longitud debido a la temperatura se anula mediante una deformación elástica de signo opuesto. Los muros son tan gruesos que es probable que sólo se produzcan pequeños cambios estacionales de la temperatura y, para el cálculo del sistema de tensado, se supuso que no habría variaciones térmicas en la fábrica. No obstante, los propios tirantes, de acero inoxidable austenítico, están expuestos y tendrán un coefiente de dilatación de aproximadamente 15×10^{-6} °C. Si para el acero se acepta un valor del módulo de Young de 2×10^5 N/mm^2, una variación de un grado en la temperatura conducirá a un cambio en la tensión (en una barra de longitud fija) de 3 N/mm^2.

Teniendo en cuenta este cálculo, las barras se tensaron con un valor de (120–3 T)N/mm^2, donde T es la temperatura de las barras en °C. Así en condiciones de congelación la tensión en las barras llegará a 120 N/mm^2 (véase más adelante), y las barras se aflojarán a una temperatura ambiental de 40°C. En realidad, si se produce *algún* cambio térmico en la fábrica, la tensión observada en el día más frío será menor que la que se deduce de la fórmula y, consiguientemente, la temperatura superará los 40°C antes de que los tirantes se aflojen. Estos aspectos teóricos todavía no se han verificado en la práctica; los tirantes se tensaron inicialmente en marzo de 1974, con temperaturas medias de unos 7°C, y se han comprobado en un día fresco de agosto del mismo año (alrededor de 17°C) y de nuevo en diciembre de 1974 (unos 7°C). Hubo una cierta dispersión en las lecturas, tomadas con un instrumento Demec estándar sobre una longitud media de 200 mm, pero éstas indicaban que todos los tirantes estaban trabajando con valores de la deformación prácticamente constantes, lo que implica que las longitudes no han cambiado y, por tanto, que los muros no se han movido. Se seguirán inspeccionando los tirantes.

El campanario octogonal

La planta de la figura 11.9 muestra la estructura del campanario. De la cúspide de la torre normanda surgen ocho grandes pilares de esquina, y como relleno entre ellos hay una fábrica más delgada; en los cuatro lados se abren grandes ventanas. Estos muros de fábrica del octógono tienen un espesor aproximado de 500 mm y constan de una piel exterior de sillería y una fábrica de mampostería en el interior; ambas son macizas y no tienen relleno. Fuera del propio campanario, las masivas escaleras de esquina de la torre principal se continúan como cáscaras cilíndricas exentas rematadas por torretas almenadas.

Es bastante evidente, tanto a través del análisis del estado de la obra como de los remedios adoptados a través de los siglos, que en la estructura ha habido dos defectos fundamentales. El primero (y menor) es que las escaleras de las torretas de esquina han funcionado independientemente de la torre. Los pesados «puentes» de fábrica que conectan las torretas con el octógono al nivel del tejado se unen a éste entre los pilares, y no han sido eficaces en su conjunto; posteriormente se insertaron tirantes de hierro (probablemente por Essex) en un intento de atar las torretas. Igualmente, los arbotantes, que se pueden ver en la figura 11.3, actúan sobre los delgados paños de la fábrica del octógono y tienen, por tanto, escaso valor

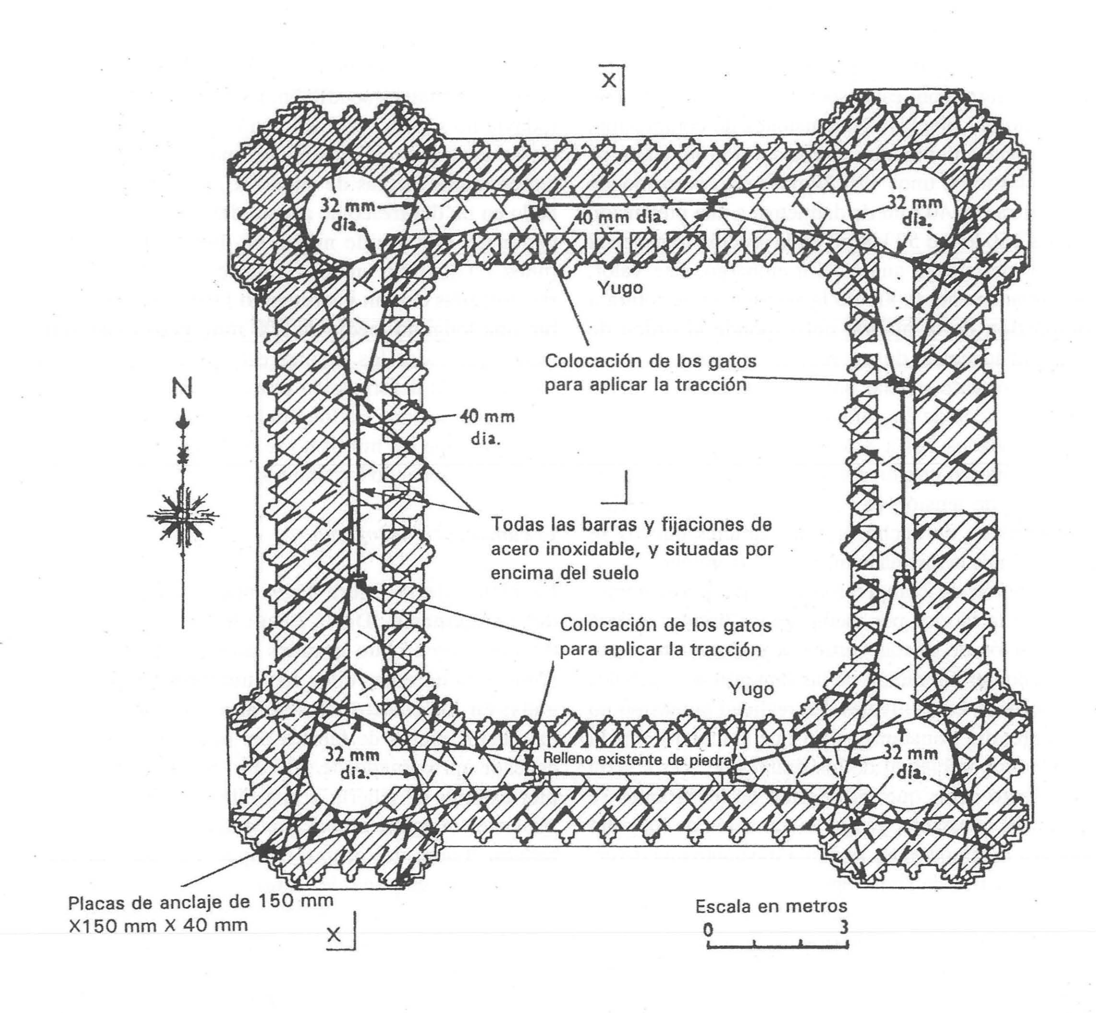


Figura 11.8
Esquema de atado

estabilizador. Debajo de éstos, se insertaron además dos tirantes de hierro (al nivel de la tercera armadura de madera desde arriba) que atraviesan diagonalmente el campanario de una torreta a otra y están anclados en el interior de las torretas por travesaños de madera. Estos tirantes estaban corroídos parcialmente en algunos sitios (y en uno completamente); ahora se han suprimido en el exterior.

El segundo y principal defecto de la construcción es que los ocho pilares de esquina del octógono se han separado entre ellos al nivel de la techumbre, casi con toda seguridad a consecuencia del empuje continuo de la sucesión de armaduras de madera. Es este defecto continuo lo que condujo a la inserción de las armaduras de madera del interior, proyectadas para mantener la posición de los pilares de esquina.[8]

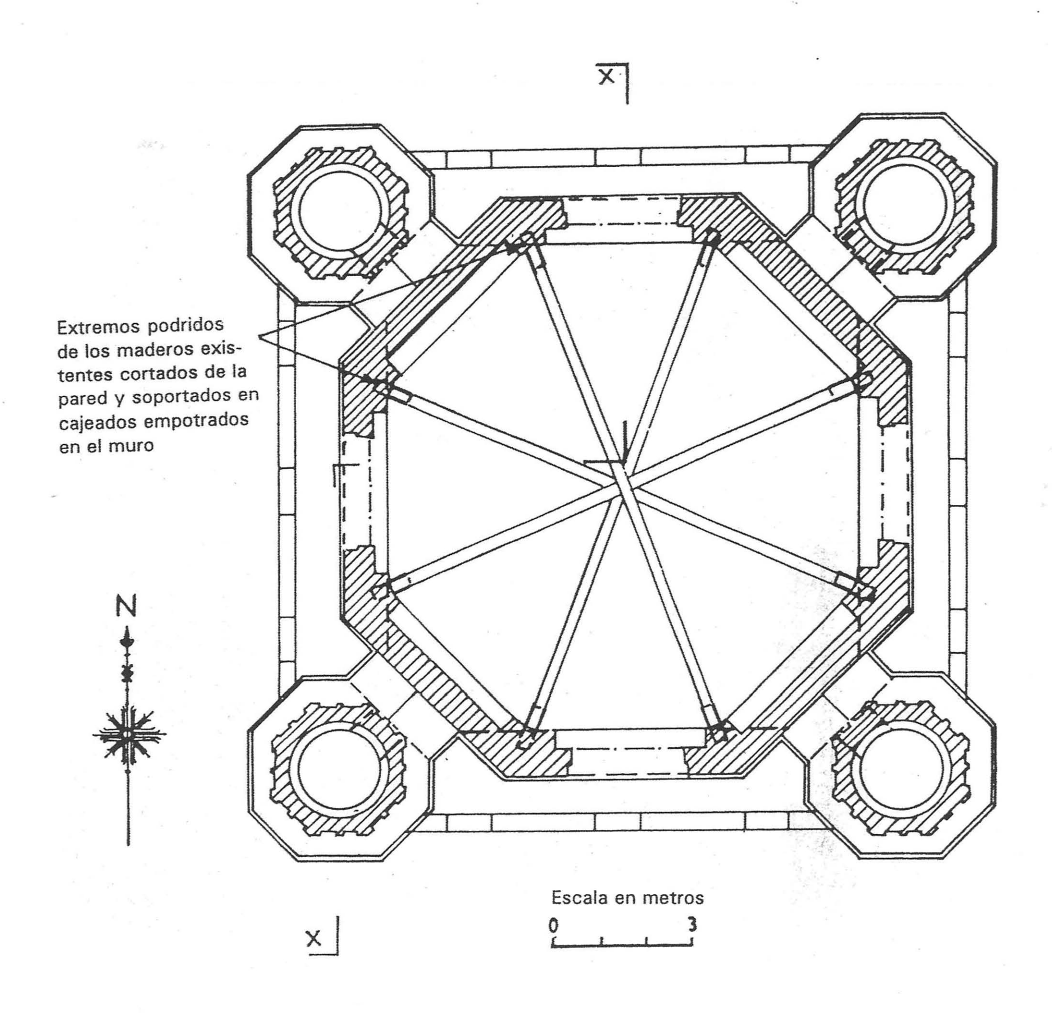


Figura 11.9
Planta del campanario

La separación de los pilares al nivel de la cubierta se ha visto acompañada, inevitablemente, por el descenso y abombamiento de la fábrica de relleno; estas deformaciones se pueden ver en las ocho caras del campanario y son especialmente perceptibles (en una vista próxima) sobre los arcos de las ventanas, donde tanto el descenso como el abombamiento se aproximan a los 100 mm. Estos grandes defectos son en realidad aceptables (si se comparan con el espesor de la fábrica de relleno, es decir 500 mm) siempre que no tiendan a aumentar. Sin embargo, las fuerzas que provocaron los defectos todavía actúan y la primera preocupación de la restauración actual fue fijar el campanario en la posición que ocupa ahora y evitar las futuras deformaciones.

El principal instrumento de esta estabilización fue embutir una viga anular de hormigón armado en el canalón excavado del camapanario. La figura

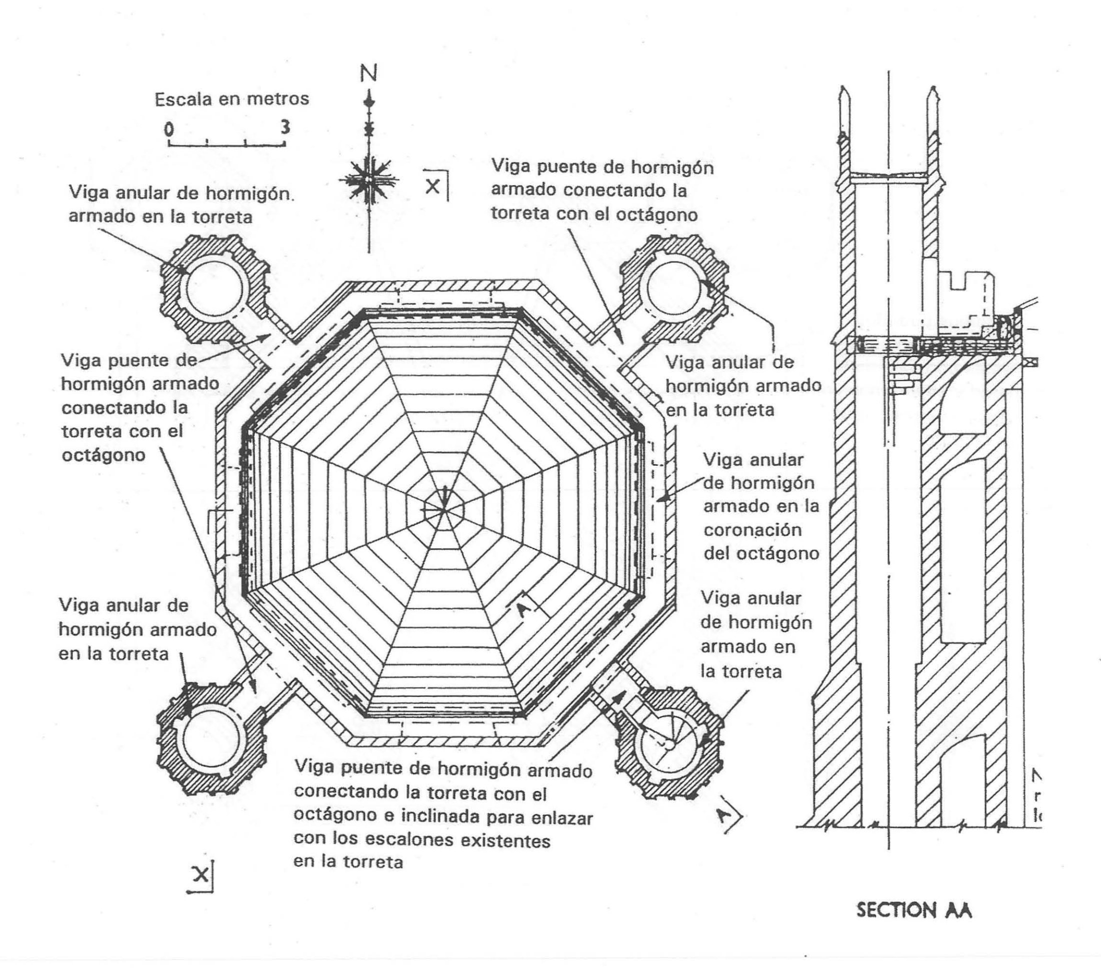


Figura 11.10
Detalles de la viga anular del campanario

11.10 muestra su posición. También se vaciaron los puentes de fábrica hasta las escaleras de las torretas y, en la figura 11.10, puede verse que la viga anular de hormigón forma un conjunto con los puentes reforzados que terminan en unos anillos dentro de cada torreta. Así, no sólo se ha estabilizado el campanario octogonal completamente, sino que además las torretas se apoyan totalmente, por primera vez en 600 años, en la estructura principal. Todas las armaduras son de acero inoxidable y, excepto los anillos de las torretas, la obra no se ve en absoluto.

La segunda reparación llevada a cabo se sitúa en el siguiente nivel inferior, en el arranque de los arcos de las ventanas. Aquí, la armadura de madera, unos 200 años más antigua y, por tanto, anterior a Essex, estaba deteriorada en algunos sitios, especialmente donde los maderos penetran en la fábrica. La apertura de una ventana en un muro de fábrica origina, inevitablemente, un empuje lateral en la misma, y la

presencia de las cuatro grandes ventanas en cuatro de las caras implica esfuerzos hacia afuera en los pilares de las esquinas. Una vez más, la segunda armadura deteriorada intentaba contrarrestar estos esfuerzos, pero se halló que era ineficaz. Los extremos de los elementos principales se cortaron a ras del muro pero, por lo demás, se dejaron en su sitio y se colocó un nuevo sistema de arriostramiento.

La figura 11.11 muestra un sistema de cuatro pares de cables de acero inoxidable tendidos a través del campanario. Los anclajes y el cosido de refuerzo de los pilares se pueden ver en la figura. Los cables y los tensores se consiguieron en una empresa de aparejos náuticos, después de que el ensayo sobre cierta longitud de cable resultase satisfactorio. El cable trenzado de 6 × 19 (alrededor de un núcleo de plástico) tenía una carga de rotura nominal de 4,8 t, y una longitud de prueba de unos 2 m rompió exactamente a esta carga. Las medidas del alargamiento se realizaron sobre una longitud media de 1550 mm, registrándose una curva autográfica carga/alargamiento. El cable presentó un alargamiento permanente (de unos 4 mm/m) seguido de un alargamiento elástico reversible de unos 4 mm/m por t. Esta información permitió calcular el sistema de cables.

La presencia de los huecos de ventana implica que los pilares opuestos del octógono tienden a separarse por un empuje calculado en 5,2 t; por consiguiente, los pares de cables se tensaron para un esfuerzo de 2,6 t cada uno. Esto implica a su vez un alargamiento de cada cable, mientras se tensa, de unos 15 mm/m, es decir 150 mm por cada cable de unos 10 m de longitud. En los extremos de cada cable se colocó un tensor para conseguir el alargamiento necesario.

Los ocho cables terminados se entregaron a los Laboratorios de Ingeniería de Cambridge donde se tensaron hasta la carga de trabajo y se pudo observar la relajación de tracción en los cables. Los cables se colocaron en la torre y se tensaron el 15 de agosto de 1974; el 19 del mismo mes se habían aflojado

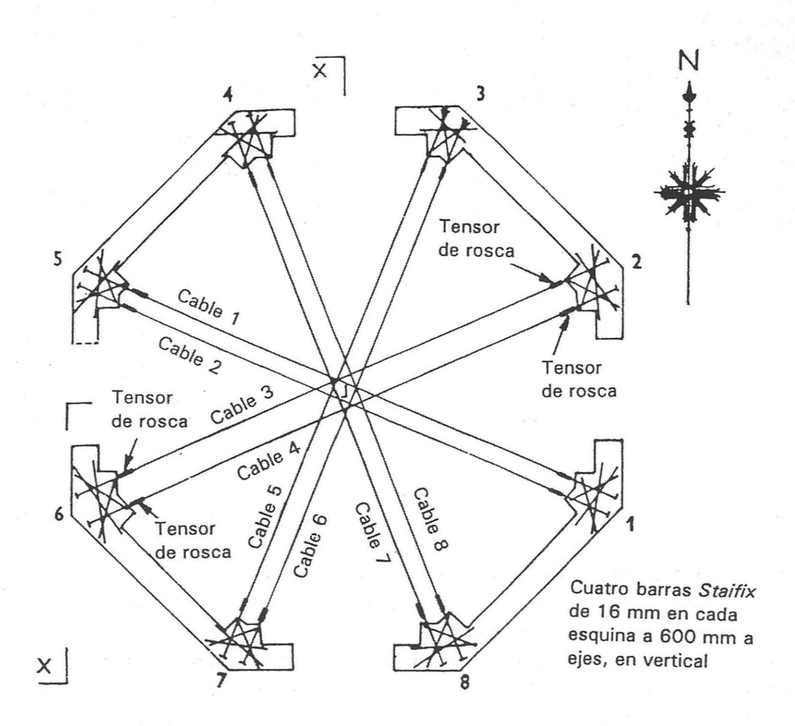


Figura 11.11
Detalles de los tirantes del campanario

aproximadamente un 5%. Se volvieron a tensar ese mismo día y al parecer se estabilizaron alrededor del 5 de septiembre; se volvieron a observar el 12 y el 19 de septiembre, con idénticas lecturas los tres días. Siete de los ocho cables tienen tracciones con una desviación dentro del 2% del valor de proyecto de 2,6 t; el octavo es el 4% inferior. (Los cables pueden resultar interesantes en el futuro como pasarelas para los reparadores del campanario, encargados de su mantenimiento, dentro del mismo. Un hombre que pese 1 kN de pie en el centro de uno de los cables incrementará su tensión de 2,6 a 2,8 t, y el cable flectará aproximadamente 90 mm.)

Las torretas que se consolidaron, como se ha dicho, al nivel de la techumbre del campanario, se reforzaron aún más a un nivel por encima de las ventanas alargadas en la hilada superior, exactamente debajo de los parapetos. A modo de cubierta permanente de cada torreta, se vertió una losa in situ para sustituir las endebles y parcialmente deterioradas cubiertas de madera. Ahora, la losa in situ de la torreta sureste sostiene la campana de las horas del reloj de la catedral; todas las partes metálicas expuestas son de acero inoxidable. Aunque la cáscara de las torretas, tal y como se muestra en la figura 11.1, parece endeble, debe recibir, por supuesto, apoyo de la escalera espiral. Este es en realidad el caso de la torreta sureste, que ha funcionado en los últimos años como escalera de acceso a la cubierta y en la que las escaleras originales se han restaurado con piedra de York. En las otras tres escaleras faltan los últimos 5 o 6 m, que se han deteriorado debido a la acción combinada de los agentes atmosféricos y los excrementos de las palomas; las escaleras superiores existentes se han afianzado embutiendo vigas de hormigón armado a través del interior de las torretas.

Andamiaje

La organización general del andamiaje de la torre la decidieron el Inspector, los ingenieros, el contratista general y la contrata de los andamios (SGB). SGB realizó proyectos y dibujos detallados y los sometió a la aprobación de los ingenieros.

El andamiaje interior se colocó en dos etapas. En la primera, se levantó desde el suelo de la catedral hasta la superficie inferior del suelo del campanario situada a 36 m; las obras se aislaron de la catedral mediante un suelo completo de tablero colocado a 15 m del terreno. En el propio campanario octogonal se colocó un andamio de acceso ligero de aluminio, levantado, en parte, desde la fábrica que constituye la cúspide de la torre normanda y desde el arriostramiento de madera del mismo nivel.

Los problemas más importantes del andamio exterior se relacionaban con las cimentaciones, ya que las zonas en las que se podía imponer la carga en la fábrica de la catedral eran limitadas. En la cara occidental, se colocaron zapatas de hormigón en masa a ambos lados del pórtico de Galilea y el andamio se levantó hasta que dos cerchas gemelas de acero pudieron salvar el pórtico; estas cerchas se utilizaron entonces para apoyar el resto del andamio en toda la cara occidental.

En la cara norte, las piezas de acero se empotraron en los estribos inclinados y el rudimentario muro este del desaparecido transepto norte; estas piezas de acero estaban sobre el «locutorio» a un agua de la catedral y sostenían el andamio de la cara norte. Asimismo, el transepto sur se salvó con una cerchas de acero que se apoyaban sobre zapatas en unas zanjas sobre los muros exteriores, y pasaban por encima de la cumbrera de la cubierta de madera de escasa pendiente.

En la cara este, el andamio se proyectó como un arco triangulado para no interferir con la cubierta de gran pendiente de la nave. Durante la construcción se tuvo mucho cuidado para cargar la cubierta de la nave lo menos posible.

El contratista del andamiaje estuvo a pie de obra durante casi dos años y, para aminorar los gastos de alquiler se desarrolló un cuidadoso programa. Por ejemplo, el andamiaje del campanario octogonal y las torretas no se colocó hasta casi pasado un año, tiempo en el que se habían terminado las obras de cosido de la torre normanda.

Costes

En cifras globales el presupuesto ascendió a 247.000 libras esterlinas. De esta suma, 79.000 libras correspondieron al andamiaje y la grúa, y 74.000 se atribuyen a las obras de perforación y cosido de la torre normanda. Unas 15.000 libras se destinaron a pagar subcontratas especializadas (emplomado de las ventanas, instalación de pararrayos, reloj, etc.).

12

Las memorias de ingeniería de Couplet, 1726-33

Couplet, alias Couplet de Tartreaux, también llamado Tartereaux (Pierre), cuyo lugar y fecha de nacimiento son desconocidos, fue el hijo de Claude-Antoine Couplet, Tesorero permanente de la Académie Royale des Sciences, donde fue admitido como discípulo de su padre el 4 de abril de 1696; llegó a ser a su vez Tesorero permanente en marzo de 1717; murió en París el 23 de diciembre de 1743; fue Professeur Royal de Mathématiques des Pages de la Grande Écurie. Esta es casi toda la información existente en el autorizado *Index Biographique*[1] de la Académie; la relación de Maindron[2] no añade nada más, aunque su anterior historia[3] hace referencia a Couplet una o dos veces. No parece que hubiera habido un *Éloge* a su muerte, lo que es bastante extraño; la colección de *Éloges* de Académicos fallecidos en 1741, 1742 y 1743 de Dortous de Mairan[4] no contiene mención alguna de Pierre Couplet.

Las publicaciones de Couplet parecen estar en su totalidad incluidas en las *Mémoires* de la Académie. En 1700 escribió una corta nota sobre algunas experiencias de un viaje, y en 1701 presentó unas observaciones astronómicas, pero nada más durante el siguiente cuarto de siglo. Después, entre 1726 y 1733, la Académie publicó cada año una memoria completa de Couplet. Las tres primeras tratan sobre el cálculo del empuje del suelo sobre los muros de contención, y las dos siguientes del empuje de los arcos; finalmente hubo tres memorias independientes sobre la forma de las armaduras de madera, sobre el flujo del agua dentro de conductos de gran longitud, y sobre el arrastre de carros y trineos de carga. En lo que sigue se describirán estas contribuciones a cinco problemas diferentes de la ciencia de la ingeniería.

CLAUDE-ANTOINE COUPLET

En contraste con su hijo, C. Couplet tuvo un *Éloge* completo (en la *Histoire* de la Académie relativa al año 1722: murió el 25 de julio de ese año). Había nacido en 1642 y llegó a ser discípulo de Jacques Bu(h)ot, matemático, geógrafo terrestre e Ingeniero Real; en 1665 se casó con la hijastra de Buot. El mismo Buot fue elegido en 1666 como uno de los miembros fundadores de la Académie des Sciences, por eso no es sorprendente que cuando a los miembros fundadores se les añadieron casi inmediatamente algunos «jóvenes preparados para ayudarles en su trabajo y en su día sucederles»,[5] C. Couplet estaba incluido en la lista. El joven Couplet estuvo a cargo del «Cabinet des Machines»; este laboratorio de mecánica se albergaba en el Observatorio, en el suburbio parisino de Saint-Jacques, donde también residía Couplet.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Couplet's Engineering Memoirs, 1726-33,» *History of Technology* 1 (1976): 21-44. Traducción de Rafael García García.

C. Couplet aceptó de Buot en 1670 el cargo de Professeur de Mathématiques des Pages de la Grande Écurie, puesto que, a su vez, pasó más tarde a su hijo. La Grande Écurie albergaba las caballerizas reales de Versalles, junto con el «Maestro del Caballo» y los pajes; las caballerizas eran también una suerte de escuela privada para los hijos de la nobleza.[6] El nombramiento de C. Couplet coincidió con la gradual transformación de Versalles en residencia permanente de la Corte por parte de Luis XIV (la instalación definitiva fue en 1682); en el decenio 1670-80 se estaban realizando las conducciones de agua y C. Couplet tuvo abundantes oportunidades para aprender y practicar las virtualmente nuevas ciencias de la hidráulica y la topografía. Es más, como evidencia el *Éloge*, las habilidades técnicas de C. Couplet entran completamente en estos dos campos; prácticamente la mitad del *Éloge* describe uno de sus principales trabajos, la traída de agua a la población de Coulanges-la-Vineuse, cerca de Auxerre en la Borgoña.

Su única publicación,[7] en 1699, fue una descripción de un instrumento de nivelación, con instrucciones para su fabricación y uso; C. Couplet presupone que el lector está familiarizado con el texto clásico de La Hire.[8] El mérito del nuevo instrumento está en el hecho de que podía ser utilizado por ayudantes sin experiencia; una y otra vez en las actas de sesiones de la Académie se pone en evidencia el deseo de simplificar la teoría y los aparatos científicos para facilitar su uso en la práctica.

El mismo año de 1699 vio un «segundo nacimiento» de la Académie como cuerpo creado por la autoridad real; Luis XIV otorgó los estatutos para su composición y funcionamiento. Al mismo tiempo, la Académie inició la publicación anual de un volumen de actas de sesiones, cuya primera parte, la *Histoire*, consistía en los comentarios analíticos de la segunda parte, las *Mémoires*. (La *Histoire* también incluía algunas actas de reuniones, *Éloges*, y otros asuntos.) Los estatutos fueron acompañados a los dos días por una carta de Ponchartrain, Ministro y Secretario de Estado, nombrando los Académicos de número, los miembros extranjeros y los Académicos asociados, así como cuatro discípulos; Fontenelle fue confirmado como Secretario permanente y C. Couplet como Tesorero permanente.

Mantuvo el cargo de Tesorero hasta los 75 años, cuando lo pasó a su hijo y obtuvo su retiro. Cuatro años más tarde tuvo dos ataques sucesivos de apoplejía, seguidos de parálisis parcial, de modo que los dos últimos dos años de su vida sólo pudo hablar y respirar con dificultad. Es indudable que era estimado por sus colegas, como muestra la conclusión del *Éloge* (de Fontenelle): «Fue Tesorero de la Académie, un título demasiado grandioso y en realidad equivocado; fue más bien lo opuesto de un Tesorero; nunca tuvo el dinero en sus manos, pero él mismo hizo adelantos de cantidades incluso grandes comparadas con su propia fortuna, y que recuperó con dificultad. Dejó un hijo que le ha sucedido merecidamente en el cargo».

PIERRE COUPLET

Pierre Couplet fue un *fils à papa*. La escasa información biográfica que existe proviene de una carta suya publicada por la Académie en 1700, en la que hace comentarios sobre su juventud; debía ser muy joven cuando su padre le nombró su discípulo en 1696, y todavía sería joven cuando fue designado en la lista de 1699 como uno de los cuatro discípulos de la renovada Académie. Su padre debió asegurarle la sucesión como Tesorero permanente, y transmitirle también el trabajo de maestro en la escuela de Versalles.

Por consiguiente, Couplet ocupó la mayoría de los cargos de su padre, y, al igual que éste, estaba versado en topografía. En 1700 acompañó a Cassini II en la expedición para la medida del arco del meridiano en Francia. (Los resultados de la medición fueron presentados en la *Suite* de las *Mémoires* de la Académie de 1718, y han sido analizados por Todhunter.[9]) En 1701 se enviaron a la Académie observaciones de un eclipse de luna; uno de los observadores (estacionado en Francia y en España) fue Couplet, y Cassini I comparó y analizó las observaciones.[10]

Previamente, en 1700, la Académie publicó extractos de varias cartas escritas por Couplet desde Portugal y Brasil a M. l'Abbé Bignon, Presidente de la Académie. Estos extractos, reunidos en forma de una *Mémoire*, tienen cierto interés, aunque quizá no en el sentido en que Couplet pensó; nos proporcionan una cierta idea autobiográfica, y la visión de un joven seguro de su propia fortaleza científica. Nos dice que asistió a las sesiones de la Académie durante varios años, y que sintió que debería viajar; en 1697, después de debatirse entre ir al este o al oeste,

partió hacia las Indias Occidentales. Estuvo cierto tiempo en Lisboa para aprender portugués, después fue a Brasil y volvió a Portugal, regresando a Francia tras dos años y medio de ausencia.

Durante su viaje hizo varias observaciones astronómicas, aludiendo en primer lugar a la longitud de Lisboa. El 7 de mayo de 1698 observó un eclipse del primer satélite de Júpiter; Cassini (¿I?) hizo lo mismo desde el Observatorio de París. Couplet compara la diferencia de tiempos del inicio del eclipse en ambos lugares, y calcula como diferencia entre las longitudes de París y Lisboa 12°57′45″. Compara con otros valores publicados y afirma que todos los mapas oficiales dan valores menores para la diferencia entre meridianos. En realidad, la diferencia existente es de 11°27′; los valores previos eran mejores que los de Couplet.

No sólo fue errónea la observación de Couplet, sino que, además, fue poco crítica sobre la precisión pretendida. En realidad, los últimos 45 segundos de arco son realmente 3/4 de minuto; la diferencia de tiempo, 51 min 51 seg, ha sido simplemente reducida a medida de arco (1 minuto de tiempo= 15 minutos de arco). Sin embargo, $1^1/_2$ grados de arco, el error de Couplet, corresponden sólamente a 6 minutos de tiempo, lo que parece completamente excusable en la observación simultánea en París y Lisboa de un eclipse del primer satélite de Júpiter, en 1698.

Couplet repitió errores de esta clase en otras observaciones. Antes de abandonar París había puesto su reloj en hora con el del Observatorio (o quizás su padre lo hizo por él), y encontró que en Lisboa atrasaba 2 minutos 13 segundos al día. Comprobó esto con un péndulo de segundos, y concluyó finalmente que dicho péndulo debería ser $2^1/_2$ líneas más corto en Lisboa que en París (la *ligne* era la doceava parte de una pulgada ó 2,12 mm). (La medida de la longitud de un péndulo de segundos era sin duda común; Newton dio en la primera edición de los *Principia* tres longitudes –París, Goree y Cayenne–, y muchas más en la segunda y tercera.) Couplet no ofrece ningún comentario sobre la amplia discrepancia entre sus observaciones; si el péndulo fuera realmente $2^1/_2$ líneas más corto, entonces su reloj hubiera atrasado 4 minutos en vez de 2 cada día.

Análogamente, su observación en Paraiba (João Pessoa) en Brasil, de que el péndulo debería ser acortado en $3^2/_3$ líneas entra en conflicto con la evidencia del tiempo atrasado por su reloj, y el factor es de nuevo aproximadamente dos. Couplet llegó a Paraiba en marzo de 1698, y cita otras constantes físicas, por ejemplo la declinación magnética (5°35′ O) y la latitud deducida de observaciones solares (6°38′ S; el valor real es 7°11′ S).

Casi la totalidad de la corta *Mémoire* es de hecho una miscelánea de imprecisas informaciones geográficas. Couplet tiene probablemente una excusa; en el mismo final de su viaje, ya de regreso a Francia, naufragó en la costa de Picardía (el 25 de noviembre de 1699) y perdió todos sus libros, instrumentos y especímenes. Todo lo que se salvó de su viaje de dos años y medio fueron las cartas escritas al Abbé Bignon y a Cassini.

La Historia Natural no estaba, sin duda, fuera de lugar en las sesiones de la Académie, y Couplet finaliza su *Mémoire* con la descripción de una serpiente venenosa denominada por los portugueses la «serpiente de dos cabezas». No es que realmente tenga dos cabezas, dice Couplet, quien examinó varias; hay una protuberancia al final de la cola que ha sido confundida con una segunda cabeza. Su reputación de ser venenosa fue verificada por el propio Couplet que contrajo un persistente sarpullido sólo por manipular su piel.

Los errores de aficionado cometidos por Couplet en sus observaciones no fueron pasados por alto en la Académie. El informe en la *Histoire* del año 1700 rechaza diplomáticamente las observaciones de Couplet sobre las longitudes del péndulo de segundos, que entraban en conflicto con las estimadas para otras latitudes (por ejemplo la de Cayenne, citada por Newton). Indudablemente Couplet no tuvo a su disposición instrumentos ni lo suficientemente precisos, ni lo suficientemente delicados, pero, no obstante, es difícil no llegar a la conclusión de que como científico experimental fue arrogante, torpe, inexperto y probablemente desafortunado; ciertamente parece haber sido propenso a sufrir accidentes.

Guardó entonces silencio durante un cuarto de siglo antes de presentar su serie principal de *Mémoires*, todas teóricas menos una. Sucedió a su padre como Tesorero permanente de la Académie en 1717, y por lo que Maindron da a entender,[11] hubo evidentemente algún escándalo asociado a su administración. Desde 1666 hasta 1696 no hubo propiamente un tesorero; C. Couplet asumió el cargo desde 1696 hasta 1717 y Pierre Couplet lo adquirió hasta su muerte en 1743. Maindron dice que las cuentas de Couplet el joven

fueron duramente criticadas, y sólo aprobadas finalmente tras una investigación. Entre 1666 y 1725 no hubo ninguna auditoría, pero en el último año, como resultado de las objeciones a las cuentas de Couplet, se estableció un Comité de Tesorería. Desde entonces no se permitió gastar ningún dinero sin la autorización de tres de los cuatro miembros del comité; el comité continuó hasta cinco años antes de la muerte de Couplet, en que se establecieron otras disposiciones.

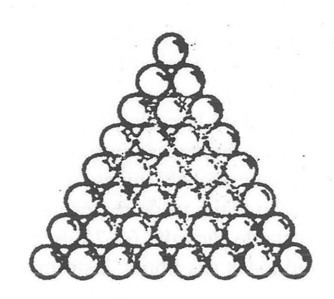


Figura 12.1
Bullet (1691)

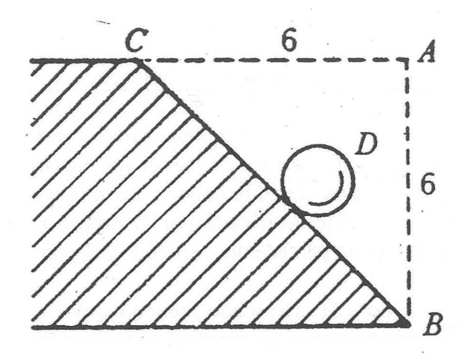


Figura 12.2
Bullet (1691)

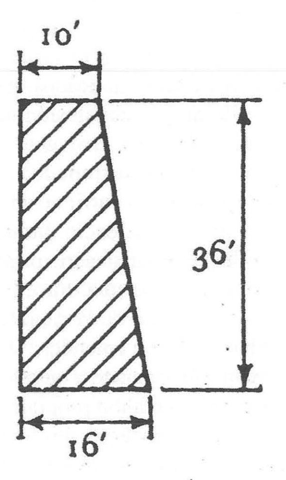


Figura 12.3
Bullet (1691)

LAS MEMORIAS SOBRE EL EMPUJE DE LAS TIERRAS, 1726, 1727, 1728

El empuje del suelo contra un muro de contención llegó a convertirse en uno de los problemas «clásicos» del siglo XVIII, y no ha sido en realidad resuelto nunca por completo,[12,13] ni siquiera en su forma más simple. El problema se había puesto de actualidad por el sistema de fortificación de Vauban, que requería profundos cortes en el terreno; el mismo Vauban había publicado tablas empíricas de las que se podían obtener el espesor e inclinación deseados para muros de 10 a 80 pies de altura. Couplet quiso abordar este problema teóricamente.

Comienza su primera *Mémoire* haciendo notar que sólo dos autores habían realizado investigaciones sobre la materia (Bullet[14] en 1691 y Gautier[15] en 1717). De hecho Gautier añade poco al trabajo de Bullet, que está basado en la idea de que la arena puede ser considerada como un conjunto de pequeñas esferas rígidas. Bullet supuso que la pendiente natural de dicho conjunto sería de 60°(figura 12.1); sin embargo, por motivos de seguridad, utilizó en sus cálculos un ángulo de 45°. Así, si se corta un suelo verticalmente como en AB (figura 12.2), se contiene con un muro, y dicho muro se retira rápidamente, el terreno caerá hasta formar la superficie inclinada BC, correspondiente a la pendiente natural supuesta; lo que se necesita es el cálculo de la fuerza necesaria para equilibrar el empuje de la cuña CAB.

Bullet cita un «resultado clásico» de los principios de la estática: La fuerza necesaria para sostener una esfera sobre un plano inclinado a 45° es $1/\sqrt{2}$ del peso de la esfera. Por extensión a la masa total, el muro debe resistir una fuerza igual a $1/\sqrt{2}$ del peso del triángulo CAB. Así, si AB=AC=6 *toises*, entonces la fuerza será proporcional a $1/\sqrt{2}$ (18)=13 *toises* ^{2}; el muro de contención deberá tener esta misma

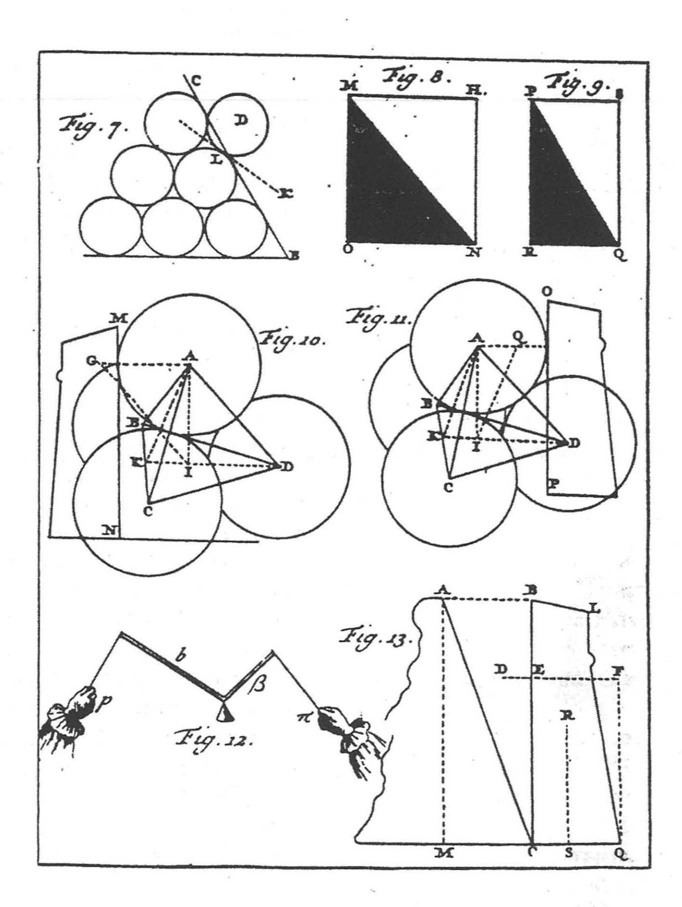


Figura 12.4
Couplet (1726)

área. Dado que 1 *toise*=6 pies, la figura 12.3 muestra un posible diseño de muro (con una inclinación de 1 a 6).

Couplet en su primera memoria adopta la teoría «sin rozamiento» de Bullet, afirmando que en su segunda memoria tratará el importante problema, desde un punto de vista práctico, de un muro de contención rugoso. Sin embargo, su objetivo inmediato es corregir los errores de Bullet. En primer lugar la pendiente de 60° es falsa; la figura 12.1 plantea una configuración en dos dimensiones, cuando en realidad la esferas se compactan en tetraedros (figuras 10 y 11 de Couplet en la figura 12.4). En segundo lugar, el factor $1/\sqrt{2}$ de Boullet da el empuje *inclinado* en vez del empuje horizontal.

En su tercera crítica, Couplet vislumbra una idea crucial, de la que no hace uso más adelante: el plano de rotura no tiene por qué coincidir con el plano de la pendiente natural. (Gadroy[16] observó esto veinte años después y más tarde Coulomb[17] hizo por primera vez uso de ello analíticamente en 1773.) En la configuración de 60° de Bullet, Couplet imagina una esfera D en la parte exterior de la pendiente natural CB (figura 7 de Couplet en la figura 12.4). Esta esfera no deslizará sobre CB sino sobre un plano imaginario LK, y la fuerza necesaria para sostenerla dependerá de la pendiente de LK. Por contra, Couplet muestra que la teoría de la cuña lisa implica un empuje constante horizontal contra el muro de contención, independiente de la pendiente, y que dicho

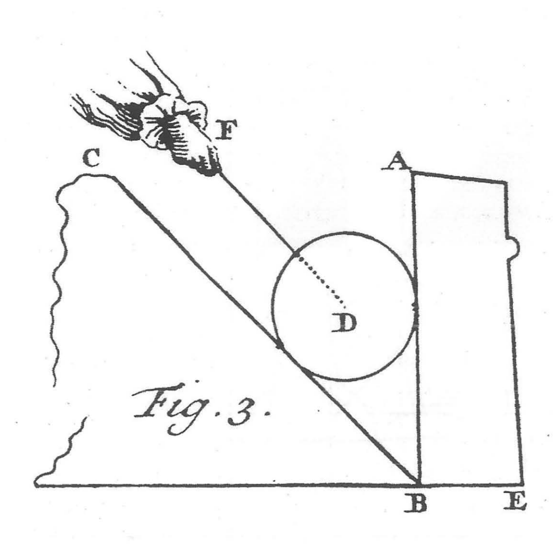


Figura 12.5
Couplet (1726)

empuje es proporcional a $^1/_2h^2$, donde h es la altura del muro.

Couplet maneja todo esto correctamente, y está claramente versado en estática elemental de una forma en que no lo estaba Bullet treinta años antes. Igualmente, domina la geometría del tetraedro con economía y habilidad. Tiene alguna dificultad en decidir si AK en su figura 10 (figura 12.4) o AD en su figura 11 representan la pendiente natural. No resuelve este punto, pero demuestra que en ambos casos el empuje del suelo contra un muro liso será el mismo. Finalmente, utiliza la idea de momento de una fuerza (cantidad que él llama *energie*), ilustrada en la figura 12.4 (figura 12), para calcular el momento de vuelco de un muro de contención.

Teniendo la expresión de dicho momento es, por supuesto, muy sencillo igualarlo al correspondiente momento estabilizador del muro. En su figura 13, Couplet considera el muro basculando sobre su arista inferior Q, y partiendo de esta hipótesis calcula correctamente dicho muro. De hecho, el resto del trabajo (la parte más extensa) consiste en la aplicación de su resultado básico sobre el momento de vuelco al proyecto de muros con diez perfiles diferentes.

En realidad, Couplet comete un error en el último paso de su análisis. Al establecer su valor básico del momento de vuelco, establece que el brazo de palanca del empuje horizontal es $^2/_3$ de la altura del muro; es decir, en la figura 13 de Couplet el empuje actúa a lo largo de DF. Se ha supuesto, sin comentario alguno, que la cuña ABC de terreno soportado tiene que alcanzar el equilibrio bajo la acción de tres fuerzas concurrentes en el centro de gravedad del triángulo.

Esta hipótesis se mantiene en la segunda *Mémoire* de 1727, en la que Couplet intenta tener en cuenta el efecto del rozamiento del suelo contra el muro de contención. Es bien consciente de que el modelo sin rozamiento es demasiado imperfecto para servir en la práctica; los resultados de la teoría sin rozamiento difieren considerablemente de las dimensiones de muros de contención establecidos por la experiencia. El efecto del rozamiento del muro hace que el empuje del terreno actúe de forma inclinada y no horizontal, de manera que el momento de vuelco del muro se reduce considerablemente.

La dirección del empuje no se conoce *a priori*, y Couplet afirma sin ningún comentario, que es paralela a la pendiente natural del suelo. Así, Couplet decide tanto la posición como la dirección del empuje, dejando la mecánica de lado en este segundo trabajo; de nuevo, Couplet se dedica al estudio de la geometría de sólidos y al cálculo de las distintas dimensiones necesarias para conocer el valor del momento de vuelco. Todavía es incapaz de decidir si la cara o la arista del tetraedro debe ser considerada como la pendiente natural, y añade además un tercer tipo de disposición de esferas, el de la pirámide de base cuadrada, lo que le da un mayor valor del momento de vuelco que los otros dos. Finalmente, presenta sus resultados en forma de tres tablas, una por cada una de las hipótesis sobre la pendiente natural; la elección de la tabla para aplicaciones prácticas depende de la observación de la pendiente natural del suelo en cuestión. Los perfiles de los muros de contención resultantes son mucho más esbeltos que los de la primera *Mémoire*, y similares a los de Gautier (los cuáles a su vez eran más esbeltos que los de Bullet).

La tercera *Mémoire*, de 1728, contiene poco de interés científico. Couplet aplica su teoría de cálculo de muros de contención a los casos con contrafuertes. Supone que la fábrica es tan sólida que no puede darse ningún fallo local, y que el vuelco del muro tiene que ir por tanto acompañado del vuelco del contrafuerte. Parece como si el principal interés de Couplet fuera el de enredar al lector en un especie de

algebra laberíntica pero, sin embargo, no llega a una solución, aunque el problema es, sin duda, de importancia práctica real.

En conjunto, las tres primeras memorias son algo difusas. Sin embargo, Couplet es indudablemente competente en geometría de sólidos, y maneja la noción de fuerza correctamente (tanto en magnitud como en dirección); utiliza sus elementales «matemáticas aplicadas» para estudiar un problema que, como él dice, sólamente Bullet y Gautier han abordado previamente (todavía tendría que pasar otro medio siglo antes de que se publicara el próximo trabajo teórico, por Coulomb[17] en 1773). El parámetro esencial que ha permanecido desde el siglo XVIII en el proyecto de muros de contención es el del momento de vuelco debido al empuje del terreno. Es difícil saber si este parámetro era de uso común en 1726 ó si fue Couplet quien lo introdujo. Ciertamente Bélidor[18] en 1729 llegó (semiempíricamente) al mismo valor de momento de vuelco que Couplet, y usó este valor para dar tablas de dimensiones para diferentes muros de contención.

Sin embargo, quienquiera que sea el responsable del parámetro, Couplet fue capaz mediante su uso, de publicar tablas dando una solución técnica al problema del muro de contención. Aún podría economizarse más, pero las tablas de Couplet podían usarse con confianza para cualquier cálculo práctico.

LAS MEMORIAS SOBRE EL EMPUJE DE LOS ARCOS, 1729, 1730

Habiendo encontrado, si no *la* solución, sí *una* solución al problema del empuje del suelo, Couplet volvió su atención al empuje de los arcos. Su única memoria sobre el empuje de los arcos fue dividida en dos partes y publicada en años sucesivos. La primera parte examina el problema en la hipótesis de que las dovelas del arco son perfectamente lisas; ésta fue la hipótesis de La Hire en 1695. Aunque La Hire[19] había desarrollado en el curso de su análisis la potente herramienta del polígono funicular, la hipótesis de no rozamiento conduce a un absurdo, y La Hire sólamente pudo concluir, con bastante poca convicción, que el rozamiento confiere estabilidad a un arco aún cuando se haya «demostrado» que es inestable.

Sin embargo, en 1712, La Hire[20] avanzó considerablemente la teoría de arcos adoptando un enfoque más «monolítico» del problema. Más concretamente, observó que un arco débil tendería a agrietarse en puntos intermedios entre los apoyos y la clave, y que el arco podría entonces ser considerado, no como un conjunto de dovelas, sino como formado por un pequeño número de bloques de tamaño mucho mayor. Aunque no describe las juntas débiles como articulaciones, comprendió con claridad que la línea de empujes estaba obligada a ser tangente al intradós en estas juntas, estando de esta manera condicionada tanto en posición como en dirección. Si los puntos de articulación son conocidos, entonces el empuje del arco puede ser calculado mediante la estática, y pueden también determinarse los estribos necesarios para resistir el empuje.

El objetivo del análisis de los arcos era en realidad el cálculo del tamaño de los estribos, al igual que los cálculos del empuje del terreno fueron necesarios para determinar el tamaño de los muros de contención. Es más, Couplet comienza sus dos *Mémoires* sobre arcos haciendo referencia a su propio trabajo sobre el empuje de los suelos, y afirma que no sólo son dos problemas análogos, sino que también lo son las soluciones.

La primera *Mémoire*, asumiendo la hipótesis sin rozamiento, repite algo del trabajo de La Hire, y consiste en poco más que un estudio de las líneas de empuje y el cálculo de las fuerzas correspondientes. Couplet sabe que esta parte del trabajo es de poco valor práctico, y que el problema importante es el relativo a arcos en los que las dovelas no pueden deslizar unas sobre las otras. Disculpa la hipótesis sin rozamiento indicando que todos los autores previos han hecho esa suposición (que es falsa) y que desea comparar estos primeros resultados con los que resultan de la hipótesis con rozamiento.

Sin embargo, hacia el final de esta primera memoria hay un interesante cálculo de las fuerzas sobre las cimbras; dicho cálculo es de una importancia constructiva obvia, y Pitot[21] tres años antes ya había dado detalles prácticos de cimbras de madera e intentado un análisis teórico. El problema planteado por Couplet es el de un arco semicircular de sección constante con dovelas sin rozamiento, apoyado sobre una cimbra lisa; la clave (de espesor muy pequeño) todavía no ha sido colocada. En esta situación Couplet trata de hallar la junta, (MV en la figura 12.6), por encima de la que las dovelas necesitarán el apoyo de la cimbra, y por debajo de la que se soportarán por sí mismas. Couplet encuentra dificultades en su análisis debido a que las técnicas para el manejo de las componentes de

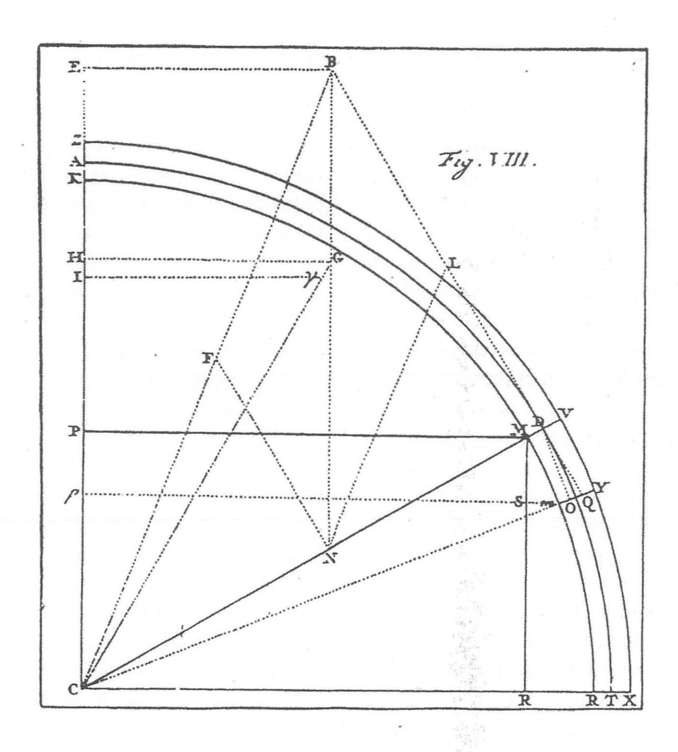


Figura 12.6
Couplet (1729)

las fuerzas no estaban bien desarrolladas, pero aún así resuelve esta parte del trabajo correctamente, y deduce que la junta divisoria se encuentra a 30° del arranque. Aunque el resultado parece razonable, no llega a darse cuenta de que las dovelas inferiores no están en equilibrio, sino que precisan una fuerza de *tracción* entre ellas y la cimbra.

La segunda memoria es de muy diferente calibre; es el mejor trabajo científico de Couplet, y una contribución fundamental a la teoría de arcos. La *Histoire* de 1730 es terminante acerca de la calidad del trabajo, y comienza con un contundente resumen de los objetivos y métodos de Couplet:

> M. Couplet continúa su teoría de arcos, que presentó en 1729 solamente en la hipótesis de dovelas perfectamente lisas, una hipótesis que es meramente matemática y de hecho falsa. Aquí vuelve a la verdad; las dovelas están trabadas a través de sus superficies y además, lo hacen de tal manera que nunca darán lugar a ninguna fuerza cuyo efecto sea lograr que una superficie deslice sobre otra; esta suposición no es completamente cierta pero los matemáticos no pueden prestar ayuda a la ingeniería a menos que se suponga algo, que sea más definido y menos ambiguo que la verdad.

Couplet en su propia introducción expone con claridad su hipótesis de que las dovelas no pueden deslizar; si bien está impedido su deslizamiento, no ofrecerán resistencia a su separación durante el colapso del arco. No hace mención de la resistencia de la piedra de la que están hechas las dovelas y, por tanto, supone implícitamente que los niveles de tensión son tan bajos, que la resistencia de rotura a compresión es de poca importancia. Por consiguiente, el estudio de Couplet está basado sobre premisas que conducen a una forma particularmente simple de análisis límite de las fábricas; si se puede suponer que la piedra tiene infinita resistencia a compresión, ninguna a tracción, y que el fallo por deslizamiento nunca puede ocurrir, entonces se pueden aplicar los teoremas de la teoría plástica convencional.[22]

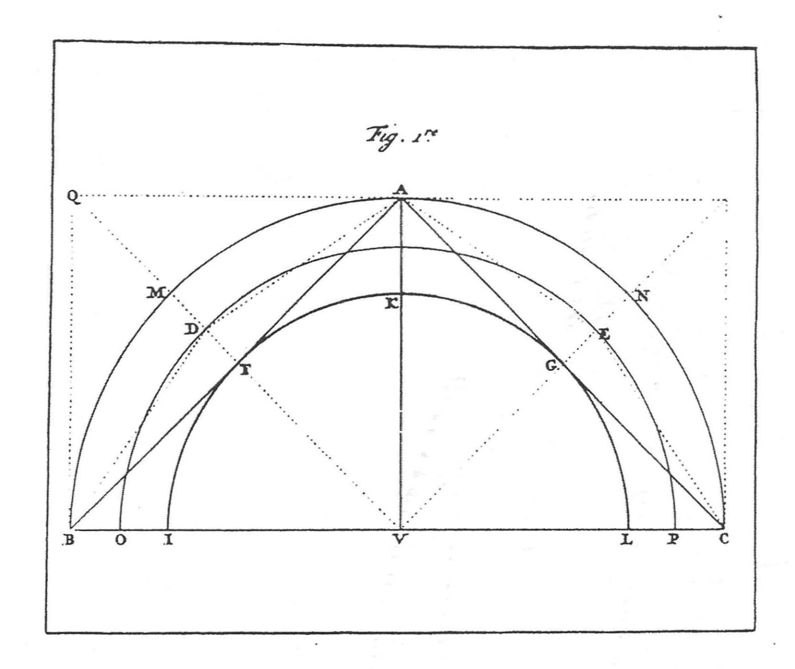


Figura 12.7
Couplet (1730)

En particular, el «teorema de la seguridad» aplicado a un arco dice que, si puede encontrarse una línea de empujes que esté contenida dentro de la fábrica, y que equilibre el peso propio y las sobrecargas, entonces el arco no puede colapsar bajo estas cargas. Esto es todo lo que se necesita para probar que un arco es estable. Para demostrar que un arco es inestable, es necesario construir un sistema de articulaciones (del tipo de la «junta débil» de La Hire), que corresponda a un mecanismo de colapso. Por consiguiente, la clásica dualidad de enfoque de los problemas estructurales tiene lugar también en las fábricas; hay un enfoque a través del equilibrio («estática») y otro por deformación («mecanismo»).

La demostración de Couplet del primer teorema de su segunda memoria contempla precisamente esta dualidad del comportamiento estructural. El teorema establece que un arco no colapsará si la cuerda de la mitad del trasdós no corta al intradós, sino que permanece dentro del espesor del arco. Couplet tiene en mente un arco de peso propio despreciable, sometido a una única carga puntual en su clave A (figura 12.7). Cualquiera que sea el valor de la carga, puede trasladarse directamente a los apoyos B y C, siguiendo las líneas de empujes rectas AFB o AGC. Además, dice Couplet, para que el arco colapse el ángulo BAC debe abrirse, lo que sólamente puede ocurrir con la separación de los apoyos, y esto no es posible según la hipótesis establecida; en efecto, no hay disposición de rótulas en el intradós o en el trasdós que sea compatible al mismo tiempo con una línea de empujes, y que dé lugar a un mecanismo de colapso (Couplet no analiza en este punto la idea de mecanismo; sin embargo, como se verá, concibió el modelo de rotura como un mecanismo. No considera el caso de carga excéntrica; de hecho, una carga que actúe fuera de la clave en este mismo arco, BAC;IKL en la figura 12.7, puede originar un mecanismo).

Después, Couplet considera el comportamiento del arco más delgado BAC; ODEP. Si la clave A se carga suficientemente, entonces el ángulo DAE puede ahora abrirse, y los ángulos ADB y AEC cerrarse, en el supuesto de que las partes BMDO y CNEP no tengan suficiente masa como para resistir

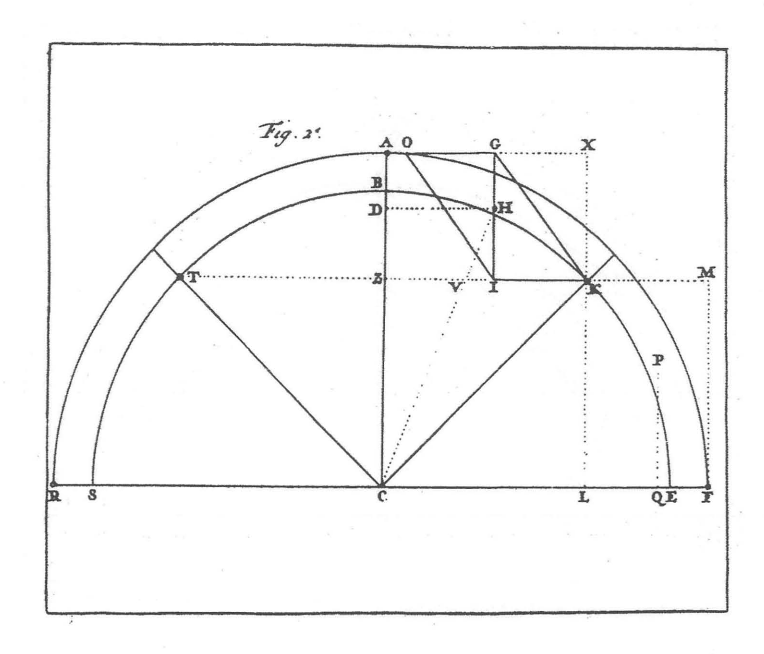


Figura 12.8
Couplet (1730)

la tendencia al vuelco. Sin embargo, el modo de colapso podría impedirse si se cargan los riñones. Couplet observa que dicha sobrecarga se omite a veces en arcos altos, como los empleados en iglesias, con el fin de reducir el empuje sobre los estribos; cuando tales arcos fallan, el punto más débil es con frecuencia el punto medio entre arranque y clave.

Con estos preliminares en mente, Couplet aborda su primer problema, a saber, encontrar el mínimo espesor que puede darse a un arco semicircular que soporta únicamente su propio peso. El arco, dice Couplet, colapsará rompiéndose en cuatro partes, unidas entre sí por articulaciones (figura 12.8). Las articulaciones T y K en los riñones están situadas a 45° de los arranques y, por consideraciones de equilibrio del arco en este estado, se puede encontrar una sola ecuación que relaciona el espesor del arco con su radio. Couplet obtiene esta ecuación (cúbica) y la resuelve numéricamente para obtener la relación buscada entre el espesor y el radio medio $t/R = 0{,}101$. El análisis estático de Couplet es evidente en la figura 12.8; para el equilibrio de la pieza AK del arco, el empuje horizontal en A combinado con el peso actuando en H origina un empuje en K según la línea GK. Pero ahora GK no es tangente al intradós en K; Couplet olvida esta consideración, pero su análisis es por otra parte completamente válido. (Coulomb, cincuenta años más tarde,[17] fue el primero en liberarse de la idea de modos de colapso preestablecidos, tanto en el problema del muro de contención como en el del arco; para el último de ellos, hizo posible que la posición de las articulaciones del intradós fuera determinada mediante el cálculo diferencial. Señaló, además, que los cálculos eran indiferentes a la posición precisa de estas articulaciones; en el presente ejemplo del arco semicircular, la rótula se forma realmente a aproximadamente 31° de los arranques en vez de a 45°, pero el valor correcto de t/R se incrementa sólo hasta 0,106 con respecto al valor de 0,101 dado por Couplet.)

Después Couplet repite su análisis para un arco circular de 120° en vez de 180°. Supone nuevamente que las rótulas de los riñones se forman en el punto medio entre los apoyos y la clave y obtiene el espesor mínimo $t/R = 0{,}0195$; el valor correcto es 0,0226 pero de nuevo el error es insignificante.

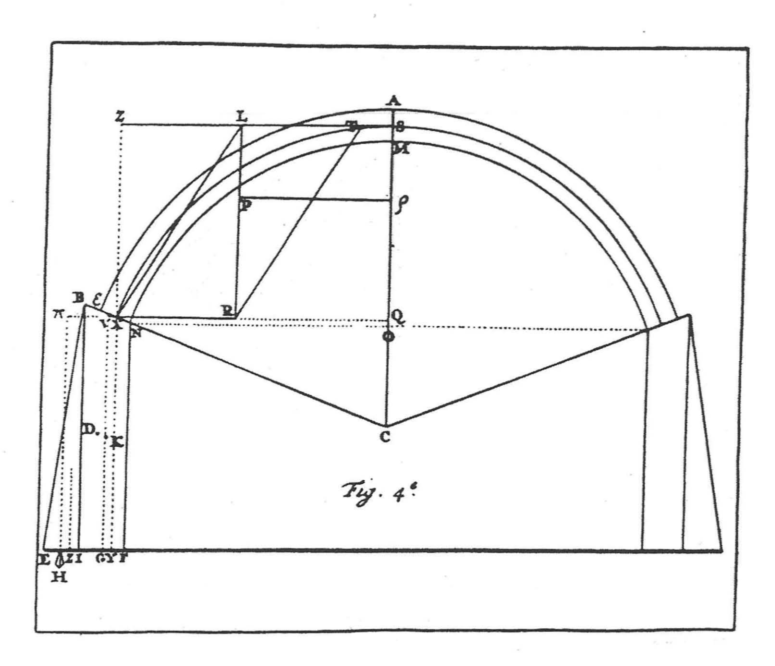


Figura 12.9
De Couplet (1730)

El tercer problema de Couplet se refiere a la determinación del empuje del arco. Aunque el trabajo es esencialmente una repetición del de La Hire, merece la pena un breve estudio a la luz de las soluciones previas de Couplet. Abandona ahora el «análisis a rotura» y trabaja a partir de una línea de empujes dentro del arco; más concretamente (figura 12.9), utiliza la directriz del arco SX. El empuje en la clave actúa horizontalmente en S y el peso del semiarco en la línea LR; una simple descomposición de fuerzas da entonces la magnitud del empuje en el estribo, actuando sobre la línea LX. Couplet observa correctamente que esta línea no es necesariamente perpendicular a la junta de los arranques BN sobre el estribo, por lo que necesariamente tienen que existir fuerzas de rozamiento.

El cálculo del empuje sobre los estribos es, por supuesto, necesario para la solución del cuarto y último problema de Couplet, a saber, el de dimensionar los estribos del arco de manera que la estructura sea estable en su conjunto. Como ejemplo concreto, Couplet calcula la base EF del estribo (figura 12.9) de manera que la línea de empujes pase por un punto dado H en dicha base.

Esta contribución de Couplet es notable. Tenía ideas claras sobre líneas de empujes y mecanismos de colapso originados por la formación de articulaciones, estableció explícitamente las simplificaciones necesarias para su análisis y utilizó estas ideas para obtener una solución esencialmente completa y correcta del problema del cálculo de los arcos. Su trabajo tuvo un impacto inmediato, encontrando su lugar en textos clásicos (p. ej. el de Frézier[23]); dos años más tarde Danyzy[24] obtuvo confirmación experimental de la corrección de la teoría de Couplet. Desafortunadamente el trabajo se fue olvidando lentamente, por lo que cincuenta años más tarde Coulomb, ignorante aparentemente de la contribución de Couplet, tuvo que redescubrir gran parte de la teoría.

LA MEMORIA SOBRE LAS ARMADURAS MANSARDAS, 1731

La sección transversal de un sistema de armadura simple consiste en dos pares rectos encontrándose en una hilera, y descansando en sus extremos inferiores sobre soleras. Los pares tenderán a curvarse de forma permanente debido al peso del material del tejado,

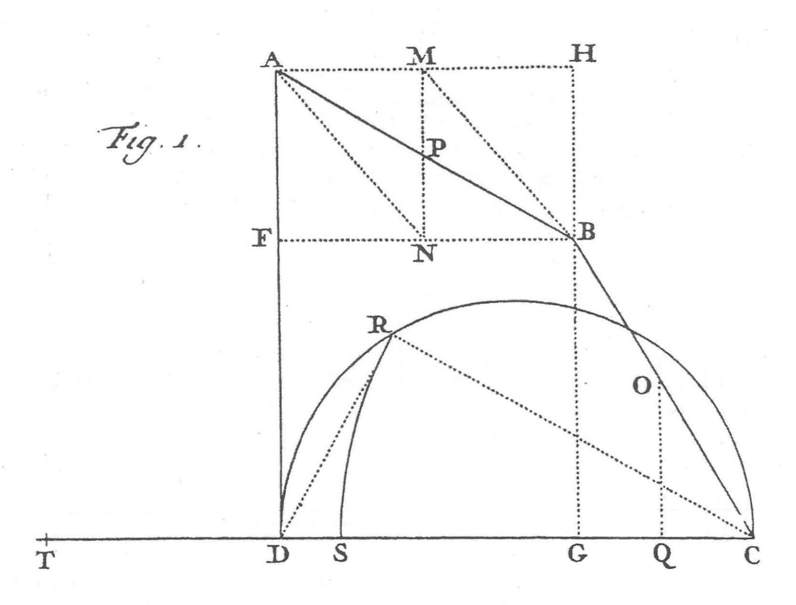


Figura 12.10
De Couplet (1731)

por lo que para prever esto, se utiliza a menudo una correa que soporta los pares en su mitad, y que discurre de hastial a hastial del edificio, o se tiende entre las armaduras principales. Sin embargo, estas correas llegan a su vez a curvarse permanentemente bajo las cargas, y la memoria de Couplet se ocupa de un remedio para este defecto.

Propone que en vez de tener pares rectos, la cubierta debería construirse en forma de mansarda; en la figura 12.10, que muestra media sección transversal de la cubierta, el par *ABC* une la hilera *A* con la solera *C*. Couplet limita su análisis al caso en que *AB=BC* (la discontinuidad del par en el punto medio entre hilera y solera es una reminiscencia del punto de articulación en los arcos también situado a la mitad entre la clave y el arranque). En el punto *B* sitúa una correa, y lo que Couplet busca es la posición de *B* (para dimensiones dadas *AD=a*, *DC=b*) tal que no actúe ninguna carga sobre la correa. De esta forma la armadura estará teóricamente en equilibrio incluso con articulaciones conectando las distintas partes en *A*, *B* y *C* (y también los puntos correspondientes en la otra mitad de la armadura); la función de la correa en B será entonces únicamente la de sostener los pares en su posición.

El problema es un ejercicio de estática elemental. Couplet supone un material de cubierta de peso uniforme por unidad de superficie y obtiene, tras una página o dos, el resultado correcto:

$$x = FB = \frac{(a^2 + 2b^2) - \sqrt{(a^4 + a^2b^2 + b^4)}}{2b}$$

Da dos ejemplos numéricos, para $a=b$ y para $a = (2/3)b$; también da una construcción gráfica para localizar *B* en el caso general. Hace también otros cálculos, incluyendo el del valor del empuje horizontal sobre la solera.

Finalmente, Couplet hace una breve discusión analítica sobre cubiertas de pares rectos, y concluye en su *Scholie* que una cubierta peraltada es mejor que una rebajada, no sólo por razones estructurales (el empuje horizontal es menor) sino también por razones prácticas (el agua de lluvia se evacúa más deprisa; el viento levanta las tejas con mayor dificultad).

François Mansard había inventado la cubierta que lleva su nombre menos de cien años antes de que Couplet escribiera su memoria, pero Couplet no da ninguna sugerencia sobre las razones de su invención, esto es, si fueron estructurales o «arquitectónicas». Ciertamente, la forma de mansarda permite la incorporación más sencilla de habitaciones de ático; por otra parte Gwilt,[25] al comienzo del presente siglo, comenta con claridad el equilibrio (aunque inestables) de los pares quebrados —precisamente el problema resuelto por Couplet. Por tanto, es difícil saber si Couplet apuntaba hacia una ventaja estructural (la correa sin carga) de una forma creada por otras razones, o si estaba llegando analíticamente a un resultado ya conocido en la práctica. En cualquier caso, Couplet demuestra de nuevo ser razonablemente experto en la resolución de problemas por medio de la estática; el problema en este caso no es excesivamente importante.

La memoria sobre la circulación del agua, 1732

La unidad de flujo de agua en la antigua Roma era la *quinaria*. Grimal[26] afirma que en unidades modernas la *quinaria* es aproximadamente 0,47 l/s ó 40 m^3/día; Herschel[27] da a la medida un valor de aproximadamente la mitad, es decir 25 pintas (inglesas)/min. La dificultad de precisar su valor recae en el hecho de que una *quinaria* no es una medida de volumen, sino el diámetro de un tubo que acometía al sistema público de agua a través del cual se realizaba el suministro. La *quinaria* es igual a cinco cuartos del dedo romano, siendo el dedo la dieciseisava parte del pie romano; por tanto la *quinaria* es aproximadamente, una pulgada (inglesa).

Las tarifas correspondían al número de *quinariae* que acometían a la red pública, y no a la cantidad de agua realmente gastada; pero no obstante, la medida no es tan tosca o arbitraria como a primera vista puede parecer. En primer lugar, era bien sabido que, a igualdad de otros factores, el gasto sería más o menos proporcional al área en vez de al diámetro del conducto; aunque la *quinaria* derivaba de una medida de longitud era en realidad, al menos en el época de Frontinus (97 d.C.), utilizada como medida de área. En segundo lugar, los romanos eran conscientes de que el caudal dependería del nivel preciso y de la forma en que fuera efectuada la acometida, por lo que no se permitía tomar agua desde los mismos conductos, sino sólamente desde depósitos de suministro al final de los acueductos. Finalmente, las acometidas estaban controladas estrictamente, y consistían en una corta boquilla de bronce de diámetro fijado, seguida de 50 pies de tubería de plomo también de diámetro fijado. (Se había comprobado que una simple acometida de plomo podría con toda probabilidad ser agrandada ilegalmente por el consumidor responsable de su pago; no hay, según Herschel, nada verdadero en la historia de que algunos usuarios especialmente refinados hubieran agrandado los extremos de sus acometidas de plomo convirtiéndolos en difusores para aumentar el gasto.) A pesar de estos controles, cuando Frontinus accedió al cargo de *curator aquarum* en el año 97 d.C., encontró que el sistema, era objeto de muchos abusos, y su *De Aquis* es entre otras cosas, una exposición de dichos abusos.

París tuvo su primer acueducto en la época de Juliano, unos 250 años después, y Coulomb en 1784, consiguió un cargo (*Intendant des eaux et fontaines du roi*) prácticamente igual al de Frontinus; los problemas de tasaciones, litigaciones, filtraciones, y construcción de nuevos suministros estaban presentes en el siglo XVIII al igual que en el siglo I. Más aún, en la época de Coulomb, y cincuenta años antes, en la de Couplet, la medida del caudal era la *pouce*, descendiente directa de la *quinaria*.

Mariotte[28] en 1686 había establecido un estándar para esta «pulgada»; era el caudal que pasa en un minuto a través de un orificio circular de 1 pulgada de diámetro en una placa delgada (1 *ligne* de espesor) cuyo eje central estaba situado 7 *lignes* por debajo de la superficie libre del agua. (La *ligne* era la duodécima parte de una pulgada, el centro del agujero estaba $^7/_{12}$ de pulgada bajo la superficie, y la parte superior del mismo estaba sumergido $^1/_{12}$ de pulgada.) En esta situación, Mariotte estimó que la *pouce* era igual a 13 $^3/_8$ de pinta (de París)/min. Después de alguna discusión, Couplet en su memoria sobre el flujo del agua concluye que 13 $^1/_3$ pintas (París)/min sería mejor valor para la *pouce d'eau*, conteniendo cada pinta 48 pulgadas cúbicas.

Tras fijar este patrón, Couplet construye tablas para ayudar a determinar experimentalmente la intensidad de un surtidor de agua dado. Propone el uso de un recipiente patrón de capacidad 12 pintas de Saint-Denis (=18 $^2/_3$ pintas de París); se anota el tiempo que se tarda en llenar este recipiente con un

péndulo de medio segundo, y el caudal correspondiente se obtiene de la tabla. (Hay una prolongada exposición sobre la diferencia de longitud entre un péndulo en París y en una región ecuatorial tal como Paraiba, y Couplet cita su propios hallazgos de hace treinta y cuatro años. Concluye que el error cometido al utilizar un péndulo de París en Paraiba, a saber 14 segundos en una hora (aproximadamente 0,4%), es despreciable. En realidad es mayor que la corrección de Couplet al valor de la *pouce* de Mariotte, o sea 2 pulgadas^3/min sobre 640 pulgadas^3 /min.)

La tabla de Couplet está construida para 1(1)94, 95(5)165 y 168 semisegundos, 1(1)20, 25(5)60 minutos, y 1(1)12 horas. Un tiempo de 12 horas para llenar el recipiente patrón corresponde a un caudal de un cuarto de *ligne*, o 37 pintas/día; un tiempo de 84 segundos corresponde a un caudal de 1 *pouce*. Como ejemplo de las diferentes unidades que Couplet juzga convenientes, si el tiempo que tarda en llenarse el recipiente fuera de 17 semisegundos, entonces el caudal puede ser leído como 9 *pouces* 127 *lignes*, o como 132 pintas de París/min, o como 27 *muids* 130 pintas/hora, o como 658 *muids* 237 pintas/hora. (El *muid* medía 288 pintas. Cada *pouce* estaba dividida en 144 *lignes* cuadradas.) Se construyó una segunda tabla más corta, para un recipiente estándar de 13 1/3 pintas de capacidad.

Dichas tablas, largas y detalladas eran, por supuesto, comunes en las actas de la Académie, y aliviaban a los usuarios de una gran cantidad de tediosos cálculos. Sin embargo, el principal propósito de Couplet al escribir su *Mémoire*, fue evidentemente, informar y comentar los resultados de cinco ensayos que había hecho sobre el flujo en tuberías en Versalles y sus alrededores. Con razón comenta que los experimentos anteriores se habían hecho sobre longitudes cortas, y que las leyes básicas del flujo, (p. ej. consumo proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua) no dan cuenta de los efectos del rozamiento en los tendidos largos de tuberías.

Algunas de las tuberías tendidas desde medio siglo antes en Versalles, estaban entonces en desuso; por ejemplo, el primer ensayo de Couplet fue realizado sobre el viejo conducto de hierro entre el Palacio Dauphine y las Petites Écuries. Esta tubería en particular, tenía 4 pulgadas de diámetro y aproximadamente 300 *toises* de largo (exactamente: 291 *toises* 5 *pieds* 9 *pouces*). El trazado fue levantado por el propio Couplet, que da un dibujo y una descripción detallados (lo que hizo también con los otros cuatro conductos). Realizó pruebas con tres diferentes alturas entre un extremo de la tubería y otro; dichas alturas fueron de 9, 21 y 31 pulgadas de agua. Para cada experimento registró el caudal de la tubería completa y llegó a dos conclusiones.

En primer lugar, los caudales no fueron proporcionales a la raíz cuadrada de las alturas correspondientes; éstas están en relación 1:1,53:1,86, mientras que los resultados medidos estaban en la proporción 1:1,64:2,22. En segundo lugar, Mariotte había demostrado experimentalmente que a través de un orificio de 3 *lignes* de diámetro a una altura de 13 pies bajo el nivel libre del agua, pasaría un caudal de 1 *pouce*, y Couplet utiliza esto para deducir que una tubería de 4 pulgadas de diámetro con una altura de agua de 9 pulgadas tendría un caudal de 61 11/25 *pouces*. En realidad, la medida obtenida por Couplet fue de 2 *pouces* 63 *lignes*; como hace notar, la diferencia es notable, y debe atribuirse a las pérdidas por rozamiento en la tubería.

Couplet hizo experimentos similares en los otros cuatro conductos, siendo el más largo de 1.800 *toises* y de 18 pulgadas de diámetro. En el conducto número cinco obtuvo un resultado calificado como «bizarre» en la *Histoire*. Tras someter uno de los extremos a una cierta columna de agua, Couplet tuvo que esperar diez días antes de que el agua comenzara a salir por el otro extremo. Para esto proporciona una explicación totalmente satisfactoria. Muestra que una bolsa de aire puede impedir la circulación del agua, y además comprende perfectamente las diferencias de presión estática. Resuelve el misterio de por qué comenzó a fluir el agua a los diez días haciendo referencia a fugas en las tuberías o en las juntas, lo que permitiría el purgado de las bolsas de aire.

La conclusión general de los experimentos de Couplet recogida en la *Histoire*, fue que el efecto de la rugosidad es mayor cuanto más larga y estrecha es la tubería, y crece con los cambios de dirección y codos, y con el aumento de la velocidad del agua; sin embargo, considera un problema de extrema dificultad la determinación numérica, por aproximada que sea, de los efectos de las causas anteriores. Ni el mismo Couplet intenta un análisis numérico para deducir las leyes de tales fenómenos; se conforma con anotar las características físicas de los conductos y los resultados de los experimentos. Ni siquiera comenta el hecho de que, si bien los caudales teórico y

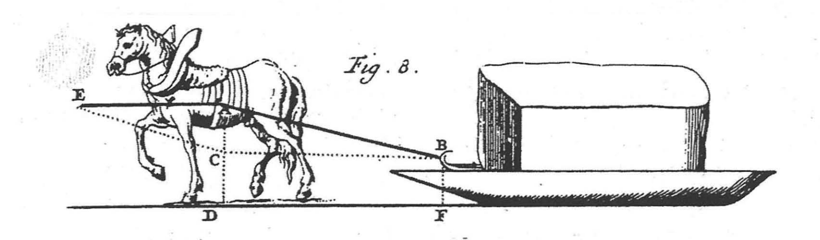


Figura 12.11
De Couplet (1733)

medido difieren en uno o dos órdenes de magnitud, las proporciones entre los caudales son razonablemente proporcionales a la raíz cuadrada de la altura, a pesar de que afirme lo contrario.

Los resultados experimentales presentados por Couplet son valiosos y podrían haberse empezado a establecer las leyes empíricas de las pérdidas de carga en tuberías. De hecho, estos resultados fueron utilizados por Dubuat,[29] casi quince años más tarde. Quizá hubiera sido demasiado esperar que Couplet diera este paso, teniendo en cuenta que la *Hydrodynamica* de Daniel Bernouilli no se publicará hasta 1738; no obstante, es decepcionante.

La memoria sobre el arrastre de carros y trineos, 1733

El interés de Couplet en el problema del arrastre parece haberse precipitado por dos circunstancias. En primer lugar, observó el paso a través de París de dos bloques de piedra tallada destinados a Saint-Sulpice, que fueron transportados sobre un trineo tirado por diez o doce caballos en línea; así mismo, llama la atención sobre algunos experimentos con modelos realizados ante la Académie por un tal M. Duquet sobre las ventajas y desventajas de carros y trineos. Duquet había «demostrado» aparentemente que un trineo podía arrastrarse pendiente arriba, con mucha más facilidad que un carro; Couplet combate la demostración en el campo de la técnica experimental. Los argumentos giran en torno a la cuestión de las fuerzas horizontal e inclinada, y Couplet muestra claramente un conocimiento completo de la fuerza como magnitud vectorial.

Más aún, las dos esculturas arrastradas sobre el trineo por las calles, probablemente habían llegado al estudio del escultor en dos carros tirados cada uno por tres caballos; de lo que Couplet deduce (después de haber sido eliminado el material sobrante de la talla de las piedras) que una carga que pueda arrastrarse por tres caballos tirando de un carro requeriría siete u ocho caballos con un trineo.

Couplet hace entonces algunos cálculos sobre la fuerza necesaria para tirar de un carro sobre un camino rugoso, y llega a una fórmula general. Para un carro cargado con 4.000 libras con ruedas de 3 pies de radio, circulando sobre piedras de hasta 6 pulgadas de alto, deduce una tracción de 2.600 libras correspondiente a tres o cuatro caballos.

Finalmente, Couplet hace notar que el último caballo del tiro de St. Sulpice estaba muy fatigado. En la figura 12.11, la tracción de los caballos delanteros es horizontal, pero la inclinación de la parte final AB del correaje (distribuyendo el esfuerzo total de hasta doce caballos) puede dar lugar a una fuerte carga vertical sobre el último caballo (y sólo en el último). Couplet da, como es habitual, un ejemplo numérico (para un tiro de diez caballos).

Hay un análisis bastante flojo sobre la rotura de las ruedas de los carros, y de hecho la *Mémoire* en su conjunto es insustancial. El cálculo de las fuerzas que actúan sobre el último caballo de un tiro es interesante, pero difícilmente justificaría una memoria; el estudio de Couplet sobre los carros *tirés par des chevaux* más bien parece *tiré par les cheveux.*

ESCOLIO

Gautier hizo en 1717 una lista de cinco problemas de ingeniería civil que precisaban de solución, a saber:

1. El espesor de los estribos para toda clase de puentes;
2. Las dimensiones de pilas interiores en proporción a la luz de los arcos;
3. El espesor de las dovelas entre intradós y trasdós en la proximidad de la clave;
4. La forma de los arcos;
5. Las dimensiones de los muros de contención.

Estos retos de Gautier atrajeron la atención de muchos artífices del siglo XVIII implicados en la construcción de puentes.

De manera más general también surgieron problemas de construcción de diques, puertos y muelles, canales y esclusas. Las memorias sobre el cálculo de la estimación del trabajo, tanto de hombres como de caballos, no fueron infrecuentes. En un nivel más fundamental y científico, la «resistencia de materiales» se estaba desarrollando, y se había estudiado la circulación del agua. En particular, la Académie estaba obsesionada con el concepto de rozamiento; la *Mémoire*[30] básica de Amontons de 1699 había «causado un cierto asombro» y, a lo largo del siglo siguiente, se publicaron trabajos tratando de dichos problemas, como por ejemplo, sobre el funcionamiento de distintas máquinas y sobre la acción de cuerdas y poleas.

Los cinco temas de Couplet encajan perfectamente en este escenario de la ingeniería civil. Sus primeras cinco *Mémoires*, tres sobre el empuje del suelo y dos sobre arcos, recogen el desafío de Gautier de forma directa y con éxito. La memoria sobre el arrastre es ligera pero central, combinando ideas de rozamiento y estimación de trabajo. La del flujo en tuberías proporciona el primer registro de ensayos en este campo, y discute más bien el rozamiento fluido que el sólido, aunque es decepcionante teóricamente. La memoria sobre las armaduras mansardas es bastante escasa, pero nuevamente parece ser el primer intento publicado de un análisis de las fuerzas sobre un entramado de madera.

Por tanto, en la elección de problemas Couplet se muestra a sí mismo como un ingeniero; desea registrar y explicar los fenómenos que ve, y desarrollar fórmulas para el proyecto, más que abrir campos científicos. Las herramientas que usa son las de un ingeniero; posee un firme dominio de las matemáticas elementales (p. ej. cálculo diferencial y descomposición de fuerzas en problemas de estática), y no intenta competir en este terreno con colegas más expertos. Sin embargo, a su propio nivel, su dominio del cálculo diferencial y de la estática, aproximadamente como el de acceso a una escuela de ingeniería de nuestros días, es en cierto sentido notable; el cálculo diferencial había sido inventado sólo medio siglo antes, y el problema de la descomposición de fuerzas fue clarificado casi al mismo tiempo. Como buen candidato académico, es hábil manipulador, aunque al mismo tiempo se echan en falta algunos aspectos más sutiles, y tiene algunas *idées fixes*, tales como el ángulo mágico de 45° para la pendiente natural de los suelos o el punto más débil de un arco.

Su fortaleza parece residir en su habilidad para aplicar su modesto bagaje teórico a problemas que, de una forma u otra, llamaron su atención. De forma explícita, vió cubiertas hundidas y caballos luchando por arrastrar trineos. Las tuberías de Versalles estaban en desuso y se podían realizar ensayos con ellas. Los problemas fundamentales del empuje de tierras y arcos estaban, según una elegante frase de un célebre premio Nobel,[31] *up for grabs* y Couplet sabía como utilizar los resultados de la observación práctica para dirigir su teoría hacia soluciones formales.

Por encima de todo, uno de los grandes móviles en la investigación del siglo XVIII fue la competición; el mismo hecho de que Gautier, por ejemplo, hubiera publicado un reto, o que Duquet hubiera hecho algunos experimentos dudosos, fue razón suficiente para que Couplet y otros se pusieran a trabajar. Por este motivo, las memorias de esta época suenan jactanciosas a los oídos modernos, y Couplet no es de ninguna manera el único en dar a entender a su lector que el autor está abriendo un nuevo campo. Para lo habitual en su época, Couplet más bien parece modesto, y quizá podría concluirse que carece de la seguridad, e incluso de la arrogancia, de un académico de primera fila. Hay un marcado declive después de las primeras cinco memorias, y las tres últimas fueron seguidas de un silencio de diez años hasta su muerte.

La vida de su padre al servicio del rey, profesor de matemáticas, tesorero de la Académie, residente en el Observatorio, está expuesta a la vista de todos en una inscripción sobre una lápida de mármol en el *Musée* de Versailles. La parte superior de la lápida

muestra un mapa de Francia y está fechada en 1648; lleva las siguientes palabras:

Presentée AU ROY
Par C. Couplet M(aitre) aux Math(ematiques)
des pages de sa g(ran)de Escurye
com(m)is en so(n) Accad.des Sci
logé en son observatoire
HAE TIBI ERUNT ARTES[32]

En cierto sentido, esta biografía es una descripción completa del padre. La misma biografía se aplica al hijo, pero no es en absoluto completa; el padre se conformó con ser un sirviente de la Academia creada en el siglo XVII, pero el hijo intentó algo más y tuvo, modestamente, algún éxito.

PUBLICACIONES DE COUPLET

1700 Extrait de quelques lettres écrites de Portugal & du Bresil, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, pág. 172.
1701 Observation de l'eclipse de Lune du 22 février 1701 à Collioure, par Mrs. Cassini, Maraldi, Chazelles, et Couplet, *ibid.*, pág. 63.
1726 De la poussée des terres contre leurs revestemens, et de la force des revestements qu'on leur opposer, *ibid.*, pág. 106.
1727 —, seconde partie, *ibid.*, pág. 139.
1728 —, troisième partie, *ibid.*, pág. 113.
1729 De la poussée des voûtes, *ibid.*, pág. 79.
1730 —, seconde partie, *ibid.*, pág. 117.
1731 Recherches sur la construction des combles de charpente, *ibid.*, pág. 69.
1732 Recherches sur le mouvemente des eaux, *ibid.*, pág. 113.
1733 Réflexions sur le tirage des charrettes & des traineaux, *ibid.*, pág. 49.

13

Fuerzas de inercia debidas al repique de las campanas

Cuando las campanas repican en un carillón inglés, el tañido de una sola nota por una campana implica que ésta gire algo más de 360°. La campana parte de la posición de reposo con la boca hacia arriba, desviada algunos grados de la posición de equilibrio inestable, figura 13.1, donde se la puede mantener mediante un freno con un pasador. Un tirón de la cuerda de la campana llevará entonces la campana tras una vuelta completa hasta la posición simétrica de equilibrio inestable boca arriba, habiéndose movido el pasador unos centímetros para permitir esos grados extra de giro. Un nuevo tirón de la cuerda producirá una vuelta completa en el sentido opuesto, volviendo la campana a su posición inicial, habiendo dado una nueva nota. (Puede encontrarse información sobre los armazones y la maquinaria de las campanas en un manual publicado recientemente.[1])

Durante una vuelta de la campana, se producen fuerzas considerables sobre el eje de giro, que son absorbidas en primer lugar por el armazón de la campana (tradicionalmente fabricado en madera maciza, y modernamente de hierro o acero), y posteriormente por el campanario en que ésta se encuentra. La torre puede agrietarse (se han dado casos) si el armazón está mal proyectado o, especialmente, si no está sujeto rígidamente a aquélla; pero la mayoría de las torres, especialmente las antiguas, son lo bastante robustas para soportar dichas fuerzas, si se encuentran en buen estado. Sin embargo, ya que mientras las campanas repican una gran masa se encuentra en equilibrio inestable, es deseable reducir al mínimo el balanceo de la torre.

Por ello, en el pasado, se han hecho intentos para evaluar la magnitud de las fuerzas producidas por el repique de las campanas. Con frecuencia, se considera que la fuerza vertical alcanza un máximo igual a cuatro veces el peso de la campana, y que la fuerza horizontal oscila entre más menos dos veces dicho peso (la fuerza horizontal es determinante en el cálculo). En realidad, las matemáticas que se aplican son elementales, residiendo la dificultad en la estimación de las constantes físicas para cada caso particular. Concretamente, se necesita el factor inercial de forma *c* (que representa la diferencia entre un péndulo simple y otro compuesto); los valores empíricos citados anteriormente no son concordantes, y corresponden a valores de *c* entre $^2/_3$ y $^3/_4$.

En este capítulo se muestra la forma en que dos experimentos sencillos, que pueden realizarse en pocos minutos, sirven para determinar completamente y con precisión la magnitud de las fuerzas de inercia generadas por cualquier campana. En el primero, que ya había sido propuesto anteriormente,[2] la campana se sitúa boca abajo en la posición de equilibrio estable, midiéndose el período τ_0 de las oscilaciones pequeñas. Para mayor precisión puede usarse un cronómetro para medir unas 50 oscilaciones completas. Si el rozamiento del sistema no permite dicho número de oscilaciones libres, pueden darse pequeños

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Inertia forces due to bell-ringing,» *International Journal of Mechanical Sciences* 18 (1976): 161-64. Traducción de Jorge Conde Conde.

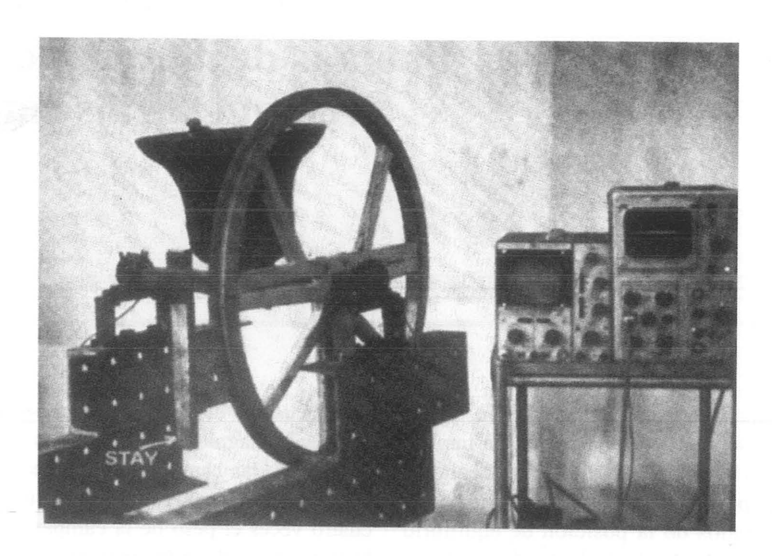


Figura 13.1
Campana a punto de tañer. En la instalación práctica, el freno se une a un pasador, permitiendo el equilibrio estable

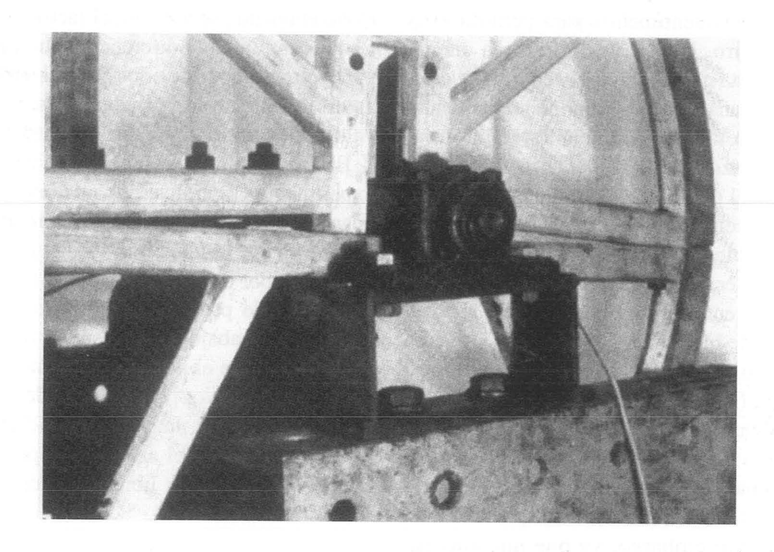


Figura 13.2
Campana con la embocadura hacia abajo. Las fuerzas horizontales en los soportes se midieron con la ayuda de un extensímetro de resistencia eléctrica

impulsos (por ejemplo, uno por ciclo) en el momento de máxima velocidad del sistema (punto medio de la oscilación); dichos impulsos no alterarán la frecuencia de oscilación (lo que harían si fuesen aplicados al final de ella), pudiendo aplicarse en la práctica mediante suaves golpecitos en un radio de la rueda de campana. Este ensayo dinámico sirve para medir la inercia del sistema.

En segundo lugar, puede realizarse un ensayo estático colgando una masa m de la cuerda de la campana, y midiendo el giro α correspondiente del sistema (resulta cómodo, por ejemplo, anotar el movimiento vertical de un radio de la rueda a una distancia determinada del centro). Se medirá también la distancia R de la cuerda de la campana al eje de giro (es decir, el brazo de palanca de la masa m.) La fuerza de inercia que aparece durante el repique de campanas es (véase el Apéndice):

$$\beta \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} \frac{mR}{\text{sen } \alpha} \qquad (1)$$

siendo β una expresión deducida analíticamente en función de la posición inicial de la campana y de la variable física que se busca. Por ejemplo, si se busca la componente horizontal de la fuerza de inercia durante el giro completo de campana, β sería $(2+3\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta$, siendo θ el desplazamiento desde la posición de equilibrio estable; el valor máximo de β (para un valor de θ de unos 56°) es de 3,05; de manera que

$$H_{max} = \frac{120{,}37}{\tau_0^2} \frac{mR}{\text{sen } \alpha} \qquad (2)$$

(Así, si m viene dado en kg, R en metros, y τ_0 en segundos, el valor de H_{max} vendrá dado en Newtons.)

A efectos prácticos, una masa m menor que el 10% de la masa del sistema giratorio de la campana proporciona resultados lo bastante precisos, e incluso para masas menores pueden obtenerse buenos resultados. De esta forma, todas las campanas excepto las más pesadas pueden estudiarse con una masa inferior a 100 kg; si los investigadores son dos, uno de ellos puede hacer un lazo en el extremo de la cuerda y emplear su propia masa para el ensayo estático m, (un cojín, o incluso un grueso libro de himnos proporcionarán comodidad suficiente al pie del investigador), mientras el otro mide el correspondiente desplazamiento angular α de la rueda (que no puede medirse al final de la cuerda porque se alarga bajo la acción de la carga).

La característica más notable de la ecuación (2) es, por supuesto, que la masa M del sistema de la campana, la distancia l del centro de gravedad del sistema de la campana al eje de giro y el momento de inercia $M(l^2+k^2)$ del sistema al eje de rotación no intervienen directamente, sino a través del período τ_0 y la masa añadida m. Es más, no hay forma alguna de encontrar la masa M del sistema sin desplazar de alguna forma el eje de giro; cualquier ensayo estático *in situ* determina tan sólo el producto Ml, pero no cada uno de sus valores. De igual modo, un ensayo dinámico implica al producto $M(l^2+k^2)$. Por tanto, hay tres incógnitas, M, l y k pero agrupadas de tal forma que tan sólo dos ensayos nos conducirán a las expresiones (1) y (2). El razonamiento matemático se explica en el Apéndice.

ENSAYOS EN LABORATORIO

Para la investigación en el laboratorio se dispuso de la pequeña campana de la figura 13.1, de peso aproximado un quintal inglés (56 kg), con rueda con cojinetes de bolas y soporte. Se ató a la rueda (de radio $R = 409$ mm) una cuerda de cuyo extremo se colgaron una serie de masas m. Para cada masa m se calculó el desplazamiento angular α midiendo el descenso h de un punto de la circunferencia de la rueda situado a 438 mm del eje del sistema. Por razones que después se explicarán, se anotaron los períodos de oscilación para cada masa; apenas había amortiguamiento, siendo posible medir 50 oscilaciones para obtener una estimación precisa del período. En la tabla 13.1 se dan las medidas y algunos resultados.

Puede verse que el valor de Ml ($= mR/\text{sen}\,\alpha$) se ha estimado con gran concordancia como 10,24 kgm (todos los resultados varían alrededor del $\pm 2^1/_2\%$ de este valor). Así H_{max} se calcula aplicando la ecuación (2) resultando

$$H_{max} = \frac{120{,}37}{(1{,}232)^2} \cdot (10{,}24) = 810 \text{ N} \qquad (3)$$

La medida del período de oscilación (τ_1) con la masa colgada m nos da otra forma menos precisa de calcular

Masa colgada m (kg)	h (mm)	sen $\alpha = h/438$	Período τ_1 (s)	mR/sen α (kg m)	$m/(\tau_1^2 \cos\alpha - \tau_0^2)$ (N/m)
0	0	0	τ_0 = 1,232		
1	17	0,0388	1,256	10,5	(17,1)
2	34	0,0766	1,290	10,5	14,2
3	54	0,1233	1,318	10,0	14,6
4	69	0,1575	1,344	10,4	15,0
5	89	0,2032	1,374	10,1	15,1
10	179	0,4087	1,563	10,0	14,1
15	263	0,6005	1,794	10,2	14,2
			Media:	10,24	14,53

Tabla 13.1

fuerzas dinámicas. Una fórmula alternativa a la expresión (1) es

$$\beta \frac{16\pi^4}{g} \frac{mR^2}{\tau_0^2(\tau_1^2 \cos\alpha - \tau_0^2)} \tag{4}$$

y el valor correspondiente de H_{max} (para $\beta = 3{,}05$ como antes), en Newtons, es

$$H_{max} = 484{,}38 \frac{mR^2}{\tau_0^2(\tau_1^2 \cos\alpha - \tau_0^2)} \tag{5}$$

La expresión es menos precisa a causa de la pequeña diferencia ($\tau_1^2 \cos\alpha - \tau_0^2$); sin embargo la última columna de la tabla da resultados concordantes (a excepción de para $m = 1$ kg que no se ha usado). H_{max} se calcula a partir de (5) y da

$$H_{max} = \frac{(484{,}38)(14{,}53)(0{,}409)^2}{(1{,}232)^2} = 780 \text{ N} \tag{6}$$

Los resultados de las ecuaciones (3) y (6) son muy parecidos, confirmándose el valor de 800 N con medidas directas. Las figuras 13.1 y 13.2 muestran ambas los soportes montados sobre armazones ligeramente flexibles. Se acopló un extensímetro de resistencia eléctrica a una barra vertical de cada bastidor, y se conectaron las salidas de ambos extensímetros a un osciloscopio de rayos catódicos. El sistema se calibró estáticamente, dando una escala con 50 divisiones, cuyo factor de calibración fue de 0,6 divisiones/kg. Una oscilación completa de la campana producía una deformación máxima repetible de 48 divisiones, correspondiente exactamente a una fuerza inercial de 800 N; el osciloscopio daba una precisión de 1 división, aproximadamente ±15 N.

La masa de la campana y sus piezas móviles era de 63,28 kg (dato que, desde luego, no puede obtenerse *in situ* en una torre de iglesia). La distancia del centro de gravedad del sistema al eje de giro se calculó como

$$l = \frac{mR}{M \operatorname{sen}\alpha} = \frac{10{,}24}{63{,}28} = 0{,}162 \text{ m} \tag{7}$$

Por lo que el factor inercial de forma c del sistema de la campana es

$$c = \frac{l^2}{l^2 + k^2} = \frac{l}{g} \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} = 0{,}43 \tag{8}$$

(Las fuerzas de inercia procedentes de la oscilación de esta campana tendrán valores aproximados al 43% de los de un péndulo simple de la misma masa, 63,28 kg, y longitud 0,162 m.) Este valor de c es quizá algo bajo, y en esta campana procede del uso de una pesada cabeza de acero, que reduce notablemente el valor de l. En verdad Müller[3] usa (para campanas alemanas) valores de $c \simeq 0{,}8$; cuando los valores empíricos citados al principio implican $c \simeq 0{,}7$. Sin embargo, valores de $c \simeq 0{,}5$ parecen adaptarse a las dos campanas objeto del ensayo de campo.

Ensayos de campo

Un primer ensayo se realizó en la campana tenor de St. Benet, Cambridge, cuya masa nominal es de unos 13 quintales (aproximadamente 750 kg con la rueda y los accesorios). Uno de los autores (BDT) se pesó una hora antes del ensayo, midiéndose una masa (vestido) de 74 kg. El ensayo estático dió sen α = 0,2178, encontrándose la cuerda de la campana a un radio aproximado de 1 m. Por lo que $Ml = mR/\text{sen}\,\alpha$ = 340 kgm.

Hubo algo de rozamiento en el soporte de la campana, que no permitía mantener más que unas diez oscilaciones libres. Se dieron entonces impulsos al sistema midiéndose 50 oscilaciones, para obtener τ_0 = 1,92 s. Así H_{max} en la ecuación (2) resultó ser 11,1 kN. Como comprobación se realizó un ensayo dinámico, y se obtuvo un nuevo período τ_1 = 2,17 s, para el que la ecuación (5) da un H_{max} = 10,7 kN.

Aceptando la estimación de 750 kg como masa del sistema, se calcula el factor inercial c = 0,50.

Un segundo ensayo similar se efectuó en la campana tenor de la Iglesia Católica de Nuestra Señora y de los Mártires Ingleses, en Cambridge; la masa nominal de la campana es de 31,5 quintales (1.600 kg). Se efectuaron dos ensayos estáticos. En el primero, uno de los autores se colgó de la cuerda, mientras el otro efectuaba las medidas. En el segundo, se colgaron de la cuerda seis pesos de 28 libras (i.e. 76,2 kg), permitiendo que hiciese las observaciones un solo investigador. Los resultados fueron concordantes (sen $\alpha \simeq 0{,}1$), determinándose un período τ_0 = 2,11 s (medido dos veces con 10 y 50 oscilaciones) con una estimación de H_{max} = 22,5 kN.

Conclusiones

Ambos ensayos, estático y dinámico, realizados con rapidez en una campana *in situ*, nos conducen a resultados precisos sobre las fuerzas dinámicas producidas por el repique de una campana. Los ensayos de laboratorio muestran que la teoría se corresponde bien con la práctica; un investigador puede realizar solo las medidas de campo necesarias.

La campana más grande existente en Cambridge es la de la Iglesia Católica de 1.600 kg; hay muy pocas campanas mayores que ésta, aunque la campana tenor de San Pablo en Londres pesa 3.150 kg, la de la catedral de Exeter 3.680 kg y la de la catedral anglicana de Liverpool 4.170 kg. Estas campanas tan grandes todavía se tocan a mano, y deben tener grandes ruedas y estar bien acopladas para evitar esfuerzos indebidamente grandes en las cuerdas. Por una parte, su período natural es grande, y por otra, el peso de un hombre producirá un giro angular estático facilmente observable.

Apéndice

La mecánica de la campana oscilante es sencilla y puede encontrarse en cualquier texto elemental; en particular, estudios alemanes de publicación reciente[4–7] (especializados en el cálculo de torres para soportar las fuerzas de las campanas) dan una exposición completa de todas las ecuaciones necesarias. La ecuación diferencial de segundo orden que rige el movimiento es

$$Mg\,l\,\text{sen}\,\theta + M(l^2 + k^2)\,\ddot{\theta} = 0 \qquad (9)$$

donde θ se mide desde la posición de equilibrio estable. Para oscilaciones pequeñas, la ecuación (9) se convierte en

$$g\,l\,\theta + (l^2 + k^2)\ddot{\theta} = 0 \qquad (10)$$

que conduce a un período

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + k^2}{lg}} \qquad (11)$$

Por lo que la ecuación (9) puede escribirse en la forma

$$\frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\,\text{sen}\,\theta + \ddot{\theta} = 0 \qquad (12)$$

La ecuación (12) tiene una integral inmediata, determinándose el valor de $\dot{\theta}^2$ para unas condiciones iniciales dadas. En particular, si $\dot{\theta} = 0$ para $\theta = \theta_0$, entonces

$$\dot{\theta}^2 = \frac{8\pi^2}{\tau_0^2}(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (13)$$

Las ecuaciones (12) y (13) sirven para calcular las fuerzas de inercia generadas durante la oscilación de

la campana. Por ejemplo, la componente horizontal de la fuerza en los soportes de la campana es

$$H = Ml(\dot{\theta}^2 \text{ sen } \theta - \ddot{\theta} \cos \theta)$$
$$= 4 \frac{\pi^2}{\tau_0^2} Ml[(\text{sen } \theta)(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)] \quad (14)$$

El producto Ml se determina por el ensayo estático; una masa m adosada a la rueda de la campana de radio R gira la campana un ángulo α, por lo que $Ml = mR/\text{sen } \alpha$. Generalmente todas las fuerzas de inercia pueden expresarse en la forma

$$\beta \frac{4\pi^2}{\tau_0^2} \frac{mR}{\text{sen } \alpha} \quad (15)$$

siendo β una función de θ y θ_0 (como en la ecuación (14)).

Las oscilaciones pequeñas de la campana con la masa adosada m vienen dadas por

$$Mlg\theta \cos \alpha + [M(l^2 + k^2) + mR^2]\, \ddot{\theta} = 0 \quad (16)$$

y el período aumentado τ_1 se relaciona con τ_0 mediante

$$Mgl[\tau_1^2 \cos \alpha - \tau_0^2] = 4\pi^2 mR^2 \quad (17)$$

siendo la expresión (4) idéntica a la (15) ó la (1).

14

La techumbre de madera del ábside de Westminster

Tan sólo recientemente se han realizado estudios detallados sobre las techumbres de madera en Inglaterra. En fecha tan tardía como 1924, por citar un ejemplo, la Comisión Real de Monumentos Históricos dedicó un volumen completo a la Abadía de Westminster,[1] figura 14.1, sin mencionar ni una sola vez las techumbres de madera, a pesar de que éstas fueron construidas al mismo tiempo que las bóvedas de piedra que cubren. Esta falta de interés contrasta con los activos estudios llevados a cabo en el continente europeo, especialmente en Francia, donde se han publicado historias descriptivas de *charpentes* durante más de 300 años.[2] Por eso, McDowall et al.,[3] que estudiaron las techumbres de la abadía de Westminster, tuvieron dificultades para relacionarlas con las de otras grandes iglesias, y para situarlas en la historia de la construcción inglesa de techumbres.

En el decenio 1960-1970, época en que se estaba llevando a cabo una importante restauración, las techumbres de la abadía de Westminster necesitaban urgentemente una reparación, estando cuajadas de cerchas y apuntalamientos auxiliares. Hoy las armaduras de la nave y del crucero se encuentran reconstruidas según el diseño original de par y nudillo con riostras en tijera. La techumbre sobre el ábside, del siglo XIII, también ha sido restaurada con gran cuidado, eliminando las adiciones posteriores. Tiene un gran interés para el historiador de la arquitectura, y también para el ingeniero o arquitecto, y por idéntico motivo: cubre un coro con un ábside. La abadía de Westminster es, por supuesto, una iglesia francesa, con girola en lugar del remate rectangular inglés. La techumbre de madera es la más antigua de las que quedan en Inglaterra con remate absidal;[4] esta *croupe* (remate) semicircular, o más bien poligonal, planteó problemas técnicos que, de hecho, no fueron resueltos por el proyectista, habiendo experimentado la techumbre deformaciones poco habituales además de las acostumbradas en estructuras de madera.

Las deformaciones que surgen en las armaduras de madera son una consecuencia natural de las fuerzas que deben soportar, y este ensayo trata de describir dichas fuerzas y su forma de actuación. A este fin, la mayor parte del trabajo analiza el problema general del proyecto de una armadura de madera; se extraen entonces algunas conclusiones detalladas para Westminster. En particular, puede adquirirse una mejor comprensión de la naturaleza de los esfuerzos estructurales en juego, que deben, necesariamente, regir cualquier proyecto de restauración de estructuras de este tipo.

FUNCIONAMIENTO ESTRUCTURAL

La madera es un material que puede resistir tanto tracciones como compresiones (al contrario que la piedra, poco resistente a tracción, que sólo debe em-

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «An apsidal timber roof at Westminster,» *Gesta* 15 (1976): 53-60. Traducción de Jorge Conde Conde.

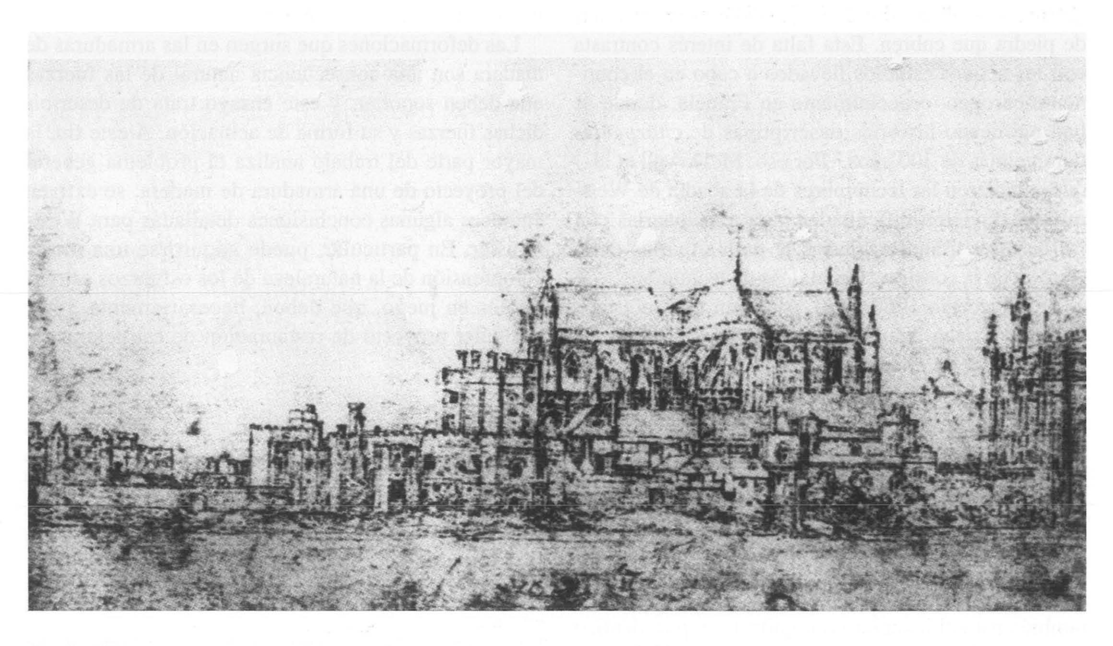


Figura 14.1
Vista desde el oeste de la Abadía, el Palacio y el Hall de Westminster (Wenceslaus Hollar, ca. 1630)

plearse en lo posible para resistir compresiones). Así, un madero escuadrado puede usarse eficazmente como soporte para compresión longitudinal; de igual modo, puede emplearse a flexión bajo carga transversal, en cuyo caso su cara inferior trabajará a tracción.

A compresión pura, como pie derecho, el acortamiento axial de la madera es muy pequeño. Un par de sección cuadrada de 200 mm de lado y 11 m de longitud, figura 14.2(a), se acortaría aproximadamente 0,25 mm bajo una carga axial de 9 kN. Sin embargo, el mismo par empleado como viga para salvar 11 m con una carga transversal repartida de 9 kN, figura 14.2(b), presentaría una flecha de unos 100 mm en el centro. Además, las tensiones producidas en la madera por ambos tipos de carga tienen valores muy distintos. En el primer caso, la tensión de compresión es de, aproximadamente, 0,22 N/mm^2 mientras la tensión por flexión para la viga cargada lateralmente es peligrosamente alta, del orden de 8 N/mm^2 (que representa una parte importante de la resistencia de rotura del roble).

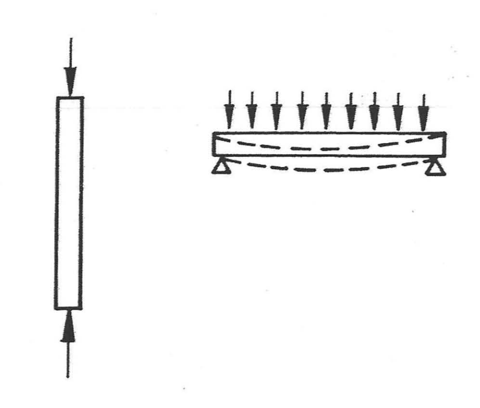


Figura 14.2

Por tanto, para buscar la eficacia estructural, los elementos de madera deben trabajar fundamentalmente a compresión (o, por supuesto, a tracción pura), debiendo evitarse la flexión. No sólo las deformaciones serán entonces mucho más pequeñas, de manera que la estructura en su conjunto será más rígida, además, las tensiones se reducirán notablemente, con lo que la estructura será más resistente. Si consideramos las armaduras de Westminster desde este punto de vista, la función de los distintos elementos es clara.

Consideremos en primer lugar la armadura simple de pares sin riostras, figura 14.3, y supongamos que éstos tienen una longitud de 11 m y una sección cuadrada de 200 mm de lado. Si estas armaduras se espacian entre 0,61 y 0,76 m, puede estimarse el peso total que deben soportar; la carga total que actúa sobre los pares, debida a la lámina de plomo, el entablado de madera, y el peso de los propios pares, será de unos 27 kN. Los pares apoyarán sobre soleras de madera que deben proporcionar una reacción vertical de 13,5 kN en el apoyo. Además, cada par produce un empuje horizontal hacia el exterior de unos 4 kN, que tiene que resistirse con la reacción horizontal de la solera y, finalmente, por los muros y estribos de fábrica.

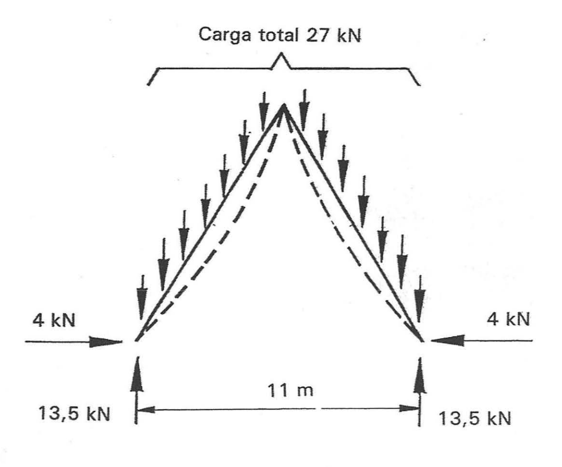


Figura 14.3

La flecha hacia la mitad de los pares es de unos 80 mm, con una tensión máxima por flexión de unos

7 N/mm². Ambas magnitudes se reducen considerablemente mediante la colocación de un puente o nudillo a media altura entre los pares, figura 14.4. La fuerza de compresión en el nudillo puede estimarse en 4 kN, para la misma carga total de 27 kN. El empuje horizontal en la base *aumenta* hasta unos 5,8 kN. La flecha máxima de los pares, entre el vértice y el nudillo (o entre el nudillo y el apoyo), se reduce a 6 mm, y la tensión máxima por flexión es de alrededor de 1,7 N/mm².

Ambas cifras pueden aceptarse como valores de trabajo, habiendo conducido la triangulación primaria a una estructura satisfactoria en lo que se refiere a la carga vertical. Sin embargo, la armadura es aún muy débil frente a la acción de viento, figura 14.5. El nudillo apenas rigidizará los pares bajo la acción del viento y cada par puede presentar nuevamente una flecha de unos 80 mm (al nivel del nudillo), bajo un viento fuerte. La razón de las riostras resulta ahora evidente; en Westminster éstas se prolongan en tijera, figura 14.6. Estos arriostramientos ayudan a la estructura a resistir la acción del viento, reduciendo aún más la flexión de los pares ante carga vertical.

Puede señalarse ahora que la colocación de un pendolón a la armadura de par y nudillo, figura 14.7, es simplemente una especie de triangulación secundaria. Puede resultar de ayuda en la construcción de la armadura, pero es incapaz de transmitir carga vertical alguna en la posición final. Ello se debe a que la base del pendolón descansa sobre el nudillo, que debe resistir por flexión cualquier carga transmitida por aquél. Por ser la madera tan poco rígida a flexión, el nudillo flectará inmediatamente, y el pendolón quedará liberado de la práctica totalidad de la carga.

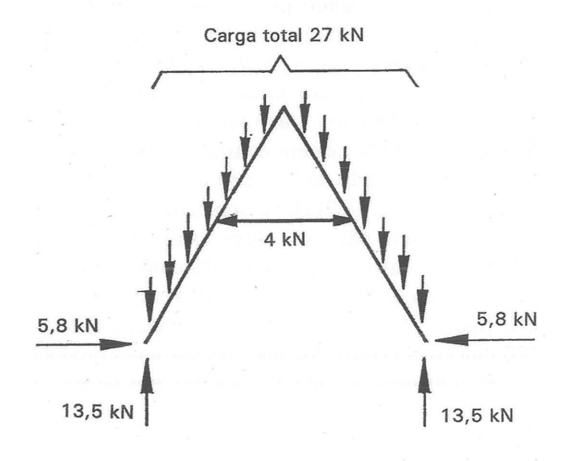


Figura 14.4

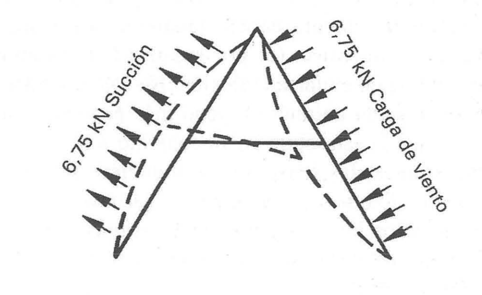


Figura 14.5

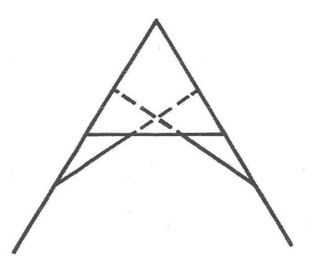


Figura 14.6

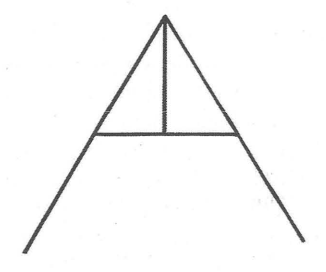


Figura 14.7

La conclusión obtenida de este caso particular del pendolón puede extenderse a sistemas de armaduras más complejos. En la práctica, una techumbre de madera es altamente hiperestática; es decir, hay múltiples combinaciones posibles de esfuerzos en los elementos para transmitir una carga dada. Mientras haya algún elemento trabajando axialmente y flexionando a la vez, siempre habrá lugar para la discusión sobre la forma exacta en que la armadura trabaja en su conjunto, incluso si la armadura está adecuadamente triangulada. Sin embargo, ya que los elementos son mucho menos rígidos a flexión que a compresión pura, tenderán a liberarse, si pueden, de la flexión, conduciéndose los esfuerzos axialmente.

Así pues, hay una cierta seguridad de que una armadura no deformada del tipo considerado, de par y nudillo, con o sin riostras en tijera, presentará básicamente esfuerzos estructurales actuando más o menos axialmente sobre los elementos. Todos ellos resistirán holgadamente la compresión, y sus tensiones correspondientes serán bajas. Las deformaciones serán también pequeñas.

Añadir nuevos elementos secundarios afectará poco al sistema principal de esfuerzos. Por ejemplo, los pilarejos laterales no reducirán mucho el empuje horizontal en la base de los pares; el empuje es una característica esencial del sistema de cubiertas, que acarrea serios problemas estructurales, figura 14.8. Un muro de fábrica sometido a un empuje constante de este tipo, se abrirá lentamente, a menos que se tomen medidas especiales. La armadura de la cubierta se adaptará a la nueva luz mediante la flexión de los pares pero ya que éstos son tan poco rígidos a flexión, habrá un movimiento lateral considerable antes de que el empuje disminuya lo suficiente. Para entonces los pares se habrán deformado enormemente.

Un tirante en la base de los pares produciría de inmediato un sistema de cubierta autoequilibrado, figura 14.9, donde los muros se verían libres de cualquier empuje horizontal. Es bastante sencillo colocar un ligero tirante metálico en la base de los pares, pero el diseño de un tirante de madera no es tan sencillo. Esto se debe casi enteramente a la dificultad de construir ensambles entre elementos de madera que puedan transmitir tracciones. Por ejemplo, una ensambladura a tope, quizá embarbillada, con o sin espiga, es perfectamente adecuada a compresión, pero débil ante esfuerzos de tracción.

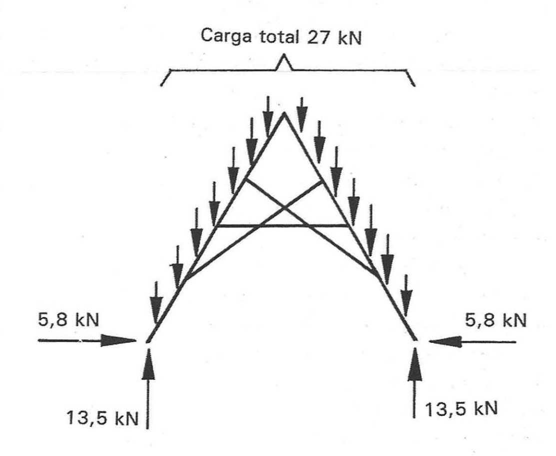


Figura 14.8

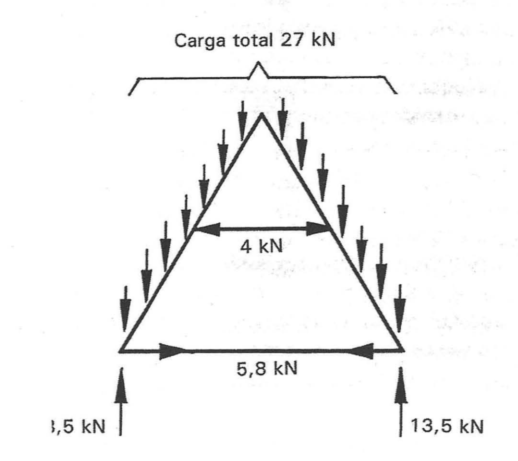


Figura 14.9

El problema es aún más complejo si los tirantes no aparecen en cada par, sino a intervalos. En esta forma de construcción, muy común, y que aparece en Westminster, se confía en que los esfuerzos se transmitirán a través de las soleras desde los pares aislados hasta los tirantes que aparecen espaciados unos de otros. Cualquier error de proyecto de los tirantes, o el deterioro de la madera, hará que los empujes horizontales se transmitan a los muros en lugar de ser absorbidos por dichos tirantes.

A lo largo de este análisis se ha considerado la techumbre como un sistema plano; se ha dado por sentado que todos los esfuerzos actúan en el plano de la armadura, es decir, en un plano perpendicular al eje de la nave o del crucero, según el caso. Esta hipótesis puede ser razonable; las fuerzas longitudinales serán efectivamente pequeñas, por ejemplo en una techumbre entre torres o hastiales. Sin embargo, incluso en la ausencia de fuerzas longitudinales, una techumbre bien proyectada debe estar arriostrada en la dirección longitudinal, para conseguir la estabilidad global. Este arriostramiento puede conseguirse de distintas formas, por ejemplo mediante hileras y correas, o con riostras diagonales en el plano de los pares. Como se verá, hay que tomar otras medidas para absorber las fuerzas longitudinales si la techumbre no termina en un hastial plano.

En resumen, la triangulación básica de una armadura debe ser tal que todas las piezas trabajen en lo posible a compresión pura, evitándose la flexión. Si el proyecto se realiza de esta manera las tensiones serán muy bajas, y las escuadrías de las piezas no serán importantes. Del mismo modo, no hay necesidad de saber con precisión las magnitudes de las cargas aplicadas. El problema principal es el de idear una geometría satisfactoria para la armadura.

La siguiente tarea es la de disponer ensambles adecuados entre las piezas, y en tercer lugar, las armaduras deben atarse de alguna forma, de modo que la techumbre en su conjunto tenga una cierta estabilidad longitudinal.

Por último, el proyecto completo debe descansar sobre el resto de la fábrica, prestando especial atención al apoyo de las armaduras sobre los muros de fábrica. Aquí el problema dominante es el de resistir satisfactoriamente el empuje horizontal de los pares.

LAS TECHUMBRES DEL SIGLO XIII EN WESTMINSTER

McDowall et al.[3] describen las armaduras de la abadía tal y como las encontraron en 1964. En esa época, se habían reconstruido las techumbres de la nave y del crucero sur, pero las techumbres del ábside y del crucero norte, aunque fuertemente restauradas 250 años atrás, eran en esencia las techumbres originales, de la Edad Media. Cada armadura, separada entre 0,61 y 0,76 m (2 pies y 2 pies y 6 pulgadas) de las colindantes, seguía un patrón aparentemente idéntico, consistente en una pareja de pares (de escuadría similar a la empleada en los cálculos anteriores), un nudillo principal y un nudillo superior, dos riostras en tijera y pilarejos laterales, figura 14.10. Originariamente se había colocado un tirante para cada siete u ocho armaduras, ensamblado a espiga con la solera en la parte interior del muro. Estos tirantes eran claramente inadecuados, puesto que en la mayoría de las armaduras la base se había abierto con el consiguiente combado de los pares.

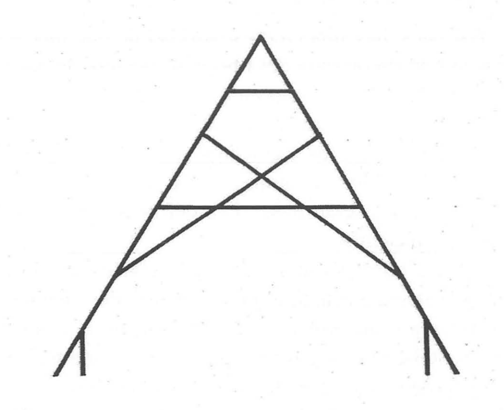


Figura 14.10

Las riostras de tijera se cruzan en una unión a media madera; también presentan uniones a media madera con el nudillo. Hay una curiosa y elaborada junta oblicua a caja y espiga entre la base de las riostras y el par.

No parece haber sido tomada medida alguna para la estabilidad global longitudinal de las techumbres, aunque alguna vez hubo unos cuadrales rudimentarios en sentido longitudinal en la armadura del crucero norte. Las techumbres de los dos cruceros y de la nave están rematadas por muros planos de fábrica, no existiendo esfuerzos longitudinales sin equilibrar que transmitir. Las armaduras se encontraban en realidad conectadas por las correas horizontales que soportan la cubrición; dichas correas no ofrecerían resistencia alguna a los movimientos longitudinales del conjunto de la techumbre, pero al menos garantizarían que todas las armaduras se inclinasen al mismo tiempo. Ya que las armaduras de extremo se encontraban

inmovilizadas por los hastiales planos, las tres techumbres tendrían en este sentido una cierta estabilidad.

La triangulación básica de las armaduras es buena, habiéndose resuelto el primer problema del proyecto, el de idear una geometría satisfactoria. La construcción, sin embargo, no resultaba tan buena. Por ejemplo, las uniones a media madera de las riostras en tijera no son sencillas de ejecutar, y reducen sustancialmente la sección de las piezas; aunque la resistencia no es un requisito fundamental en el proyecto de la estructura, cada unión a media madera es un punto potencialmente débil. De igual forma, las juntas oblicuas a caja y espiga en las bases de las riostras son de pobre diseño a la par que de difícil ejecución.

Pero es al considerar las techumbres como estructuras tridimensionales cuando comprendemos su auténtica debilidad. El error de no proveer rigidez longitudinal casi sugiere que un maestro carpintero intentó construir un sistema de cubierta completo partiendo del diseño de una sencilla armadura bidimensional. Este diseño determinaría la configuración general, pero no daría guía alguna para ejecutar los detalles de la techumbre tridimensional; tampoco indicaría cómo y dónde deberían situarse los tirantes en la base de los pares. (Que tales diseños se usaban como patrones se confirma en el álbum de Villard de Honnecourt,[5] ca. 1235. Villard, figura 14.11, muestra diversas armaduras de cubierta en las que se señala el embarbillado y las espigas, pero sin otros detalles sobre su construcción, y sin mostrar armazón longitudinal alguno. Quien usara sus dibujos tendría que confiar en su propia experiencia práctica para trasladar el diseño a la realidad construida.)

Estas observaciones tienen aún más validez cuando se aplican a la estructura de la techumbre del presbiterio, figura 14.12, donde las armaduras principales son del tipo ya descrito. Además del problema del arriostramiento de las armaduras, parecería que el remate absidal no se consideraba como un problema estructural distinto; el entramado de la *croupe* es idéntico al de otros lugares. En esencia, cada armadura de la *croupe* es una armadura «tipo» cortada por la mitad y orientada hacia el centro de la última armadura plana (la *ferme-maitresse*, armadura maestra, con el número 28 en el artículo de McDowall et al.[3]); ésta posee un pendolón para recibir los medios nudillos y las medias riostras. Por tanto, todo el remate aproximadamente circular de la cubierta se centra en el pendolón de la armadura número 28.

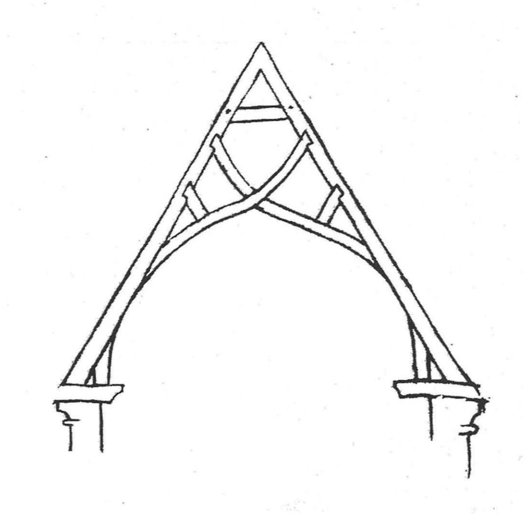


Figura 14.11

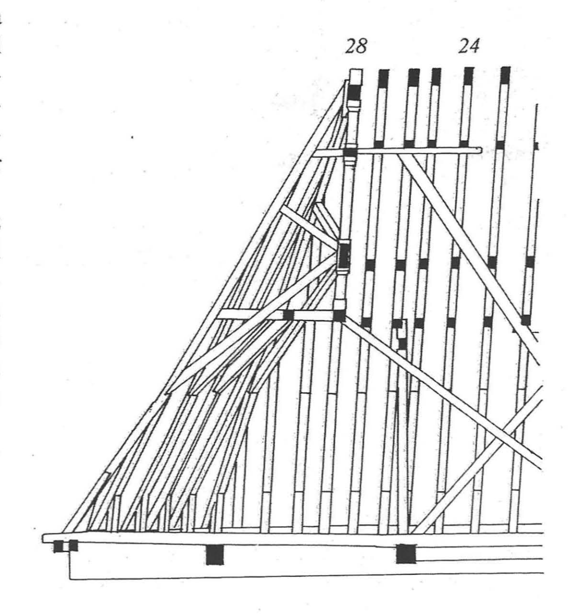


Figura 14.12

Por supuesto, las armaduras deben estar cortadas en dos para formar la *croupe*, figura 14.13, pero también tienen que estar horizontalmente estribadas en el caballete y en el nudillo para permanecer en su sitio. La carga vertical sobre una semiarmadura de Westminster es de unos 9 kN, que precisan un contrarresto horizontal en el nudillo de 2,7 kN, y la mitad de este valor en el caballete. El conjunto de las semiarmaduras, figura 14.14, empujará hacia el oeste con una fuerza de unos 36 kN a la altura del nudillo y la mitad de este valor en el caballete. En realidad, las semiarmaduras empujan todas contra la armadura número 28, figura 14.15, que debe ser sostenida de alguna manera por el resto de la techumbre del presbiterio.

En la estructura original, el empuje de 36 kN sólo podía resistirse mediante flexión lateral del nudillo de la armadura 28. Sin embargo, este nudillo sólo es adecuado para soportar esfuerzos axiales, no resultando sorprendente encontrar que estaba partido en la sección debilitada por la unión a media madera.

De igual forma, las riostras trabajarían bajo cargas de viento en cubierta. Estas riostras se apoyan en el pendolón, que en este caso es incapaz de resistir cargas verticales o laterales.

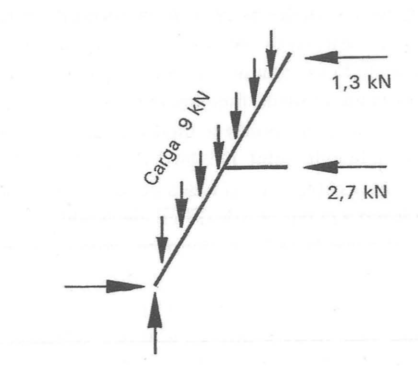


Figura 14.13

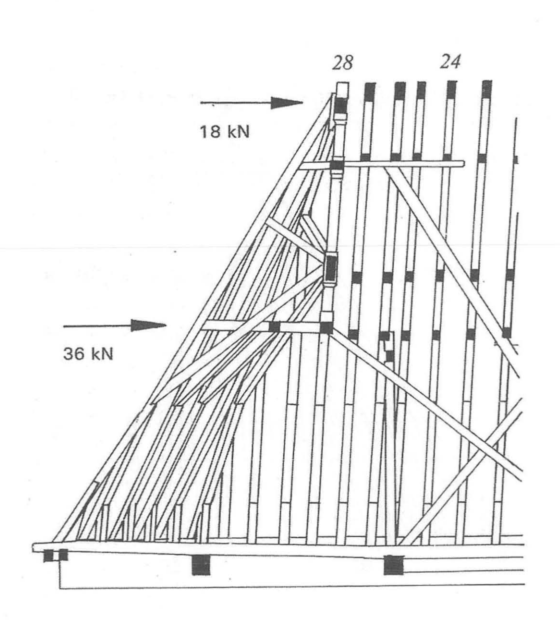


Figura 14.14

Figura 14.15

El conjunto de la estructura de cubierta del ábside es en esencia defectuoso. El pendolón, en particular, es un intento absurdo de resolver un problema estructural, cuya existencia seguramente no fue ni sospechada; puede que sea único entre las techumbres medievales inglesas pero (por emplear los términos usados por los expertos de Milán a finales del siglo XIV[6]) no es ni *bello* ni *lodevole*. Parece que en Westminster no hubo percepción alguna de que la estructura de la *croupe* produciría grandes esfuerzos longitudinales. Que esta ignorancia era local, lo demuestra la cubierta casi contemporánea de Notre-Dame, en París, donde se ejecutó un elaborado dispositivo para apuntalar la *ferme-maitresse* y distribuir los empujes desequilibrados.[7]

Los esfuerzos desequilibrados que rompieron el nudillo de la armadura 28 en Westminster no pudieron en consecuencia transmitirse en dirección oeste a través de dicho nudillo, y deben haberlo hecho de algún otro modo. El único medio posible son nuevamente las correas de cubierta, que entraron en funcionamiento por la tendencia de la cubierta del ábside a inclinarse hacia el oeste. Los medios nudillos de las armaduras del ábside habrían sido inoperantes, y la fuerza total de, digamos, 54 kN se habría transmitido de forma más o menos uniforme a través de las correas a la superficie de los pares de la armadura 28.

Como se ha advertido, las correas horizontales de la cubierta principal del ábside no ofrecerían resistencia alguna a este esfuerzo longitudinal. Ya que la cubierta del ábside se continúa en la de la nave, hubiera habido alguna posibilidad de que las armaduras se mantuvieran sensiblemente verticales. No existen hoy vestigios que indiquen la fecha en la que las armaduras se desplomaron 5° de la perpendicular (ladeándose unos 900 mm), pero parece haber sido en 1725, cuando la techumbre se seccionó para añadir la torre central.

Conclusiones

Las consecuencias de este sencillo estudio de la mecánica de las armaduras de madera son sobradamente conocidas y apreciadas, desde hace tiempo, por los arquitectos que se dedican a la restauración. Ciertamente Viollet-le-Duc tuvo una comprensión fundamental de estos problemas, y el trabajo de su contemporáneo G. G. Scott muestra el mismo control de los principios básicos. Ambos hubieran empleado con entusiasmo los métodos y materiales modernos, como también hubieran hecho los constructores originales.

Por ejemplo, hoy día las soleras de Westminster han sido sustituidas por vigas de hormigón armado atirantadas a intervalos con cables de acero. Éstas cumplen exactamente el objetivo concebido por los proyectistas medievales de liberar los muros de fábrica de los empujes de la techumbre (intención que ellos mismos fracasaron en llevar a cabo usando soleras de madera conectadas de forma inadecuada a tirantes también de madera).

Habiendo dotado así a las bases de los pares con apoyos absolutamente firmes, la triangulación básicamente correcta de las armaduras asegurará una estructura satisfactoria que, sin embargo, aún precisa arriostramiento longitudinal. El antiguo Conservador de la Fábrica, el Sr. S. E. Dykes Bower, ha ideado para la nave y cruceros un método económico e ingenioso. En lugar de fijar las correas horizontalmente, lo que mantiene las armaduras a distancias constantes pero les permite ladearse, las correas se han dispuesto en diagonal sobre las caras externas de los pares, produciendo una especie de triangulación continua en sentido longitudinal y haciendo el conjunto de la estructura extremadamente rígido. Estas correas diagonales, capaces de transmitir grandes esfuerzos, son sin embargo meros arriostramientos de las techumbres de la nave y los cruceros, y están en realidad descargadas.

Básicamente el mismo sistema de correas diagonales se ha utilizado en la techumbre del ábside para transmitir el empuje activo de la *croupe*. Como se ha dicho, esta techumbre se ha restaurado cuidadosamente en lugar de renovarse, y ha sido además devuelta a su estado original de estructura de pobre diseño estructural. Sin embargo, el empuje hacia el oeste se transmite ahora permanentemente por la superficie de los pares, es decir, por la piel exterior de cubierta, en lugar de por elementos internos conectados a la *ferme-maitresse*; se han añadido algunos otros cuadrales para ayudar a transmitir el empuje.

15

La estructura gótica

La característica más relevante de los edificios griegos, romanos, bizantinos, románicos y góticos es que alguno de ellos todavía existe. Por supuesto se han producido fallos menores y ha habido grandes catástrofes, pero la estructura de fábrica es, en esencia, extremadamente estable. Dos fuertes terremotos dañaron Santa Sofía sólo levemente; los bombardeos de la Segunda Guerra Mundial a menudo ocasionaron ligeros daños en las catedrales medievales, rodeadas por ciudades modernas completamente destruidas. A menor escala, las continuas alteraciones y asientos de las cimentaciones, experimentados a lo largo de los siglos por los edificios, parece que no han causado ningún peligro a la estructura de fábrica aunque, como se verá, puede existir un período inicial de alto riesgo de, aproximadamente, una generación.

El explicar esta extraordinaria estabilidad implicará analizar el verdadero comportamiento estructural de la fábrica y tendrá que abordar la historia del análisis estructural; quizá sea más interesante, se intentará aclarar lo que pensaban los arquitectos medievales sobre el proyecto de estructuras. Como se verá, los principios generales se pueden aplicar a cualquier tipo de construcción de fábrica, pero los ejemplos se extraerán fundamentalmente del gótico, del gótico clásico representado por las catedrales de Chartres, Reims, Amiens, Bourges y quizá Beauvais. Los problemas estructurales de las fábricas se manifiestan en este período en su forma más crítica; tan sólo la cúpula del período pregótico presenta algún problema estructural que no se encuentra en el gótico propiamente dicho. En realidad, el abandono de la estética gótica en la transición del gótico al Renacimiento se refleja en la absoluta falta de interés estructural de cualquier edificio renacentista. Solamente a finales del siglo XIX, la progresiva introducción del hierro y, posteriormente, el acero, seguido por el hormigón armado, pretensado y las estructuras laminares del siglo XX, han renovado el interés por el análisis estructural.

No obstante, la construcción de puentes ha sido siempre un arte especialmente difícil; gran parte de los avances en la técnica estructural han sido realizados por los ingenieros en su empeño por mejorar el cálculo de los puentes. Además, el arco de fábrica tiene una forma especialmente sencilla que se utilizará aquí para ilustrar el desarrollo de una teoría adecuada al análisis del gótico.

Dos casos históricos servirán para ilustrar los tipos de problemas a los que se enfrentan el ingeniero, el arquitecto y el historiador del arte, cuando tratan de extraer conclusiones a partir de lo que se sabe de los edificios antiguos. La catedral de Beauvais, por ejemplo, se ha incluido con ciertas dudas en la lista del gótico clásico. El edificio se comenzó en 1247, y el coro y el crucero se terminaron en 1272. Durante 12 años no prosiguieron las obras; en 1284, en una noche tranquila, sin tormentas ni terremotos, el coro

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The Gothic Structure,» *Interdisciplinary Science Reviews* 2 (1977): 151-64. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

se hundió. Aquí, lo misterioso no es el hundimiento en sí mismo; cualquier explicación debe tener en cuenta el hecho de que la catedral permaneció en pie durante doce años y se hundió después. El segundo caso está perfectamente documentado y se refiere a las pruebas periciales de Milán, más de 100 años después de la ruina de Beauvais.

El Duomo de Milán

El Duomo, figura 15.1, se había empezado a construir en 1386, pero las obras cesaron cinco años después a fin de establecer la escala vertical del edificio. Este era el famoso debate *ad quadratum/ad triangulum*. ¿Debía la altura total del edificio estar contenida en un cuadrado cuya base fuese la anchura de la nave, o en un triángulo? En el caso del triángulo, ¿debía ser equilátero, pitagórico (dos triángulos 3:4:5 opuestos) o de otra forma? Es importante señalar que se solicitó el consejo no de un arquitecto de una de las famosas logias de Europa, sino de un matemático, Stornaloco. Aquí no se planteaba un tema identificable con la moderna ingeniería estructural o la estética arquitectónica, el debate se centraba únicamente en la relación entre las medidas verticales y las horizontales. Las reglas que se necesitaban eran, al parecer, reglas numéricas de proporción.

El debate se resolvió a favor del triángulo (un triángulo bastante bajo) y las obras prosiguieron; sin embargo, tan sólo unos pocos años después se consideró necesario consultar de nuevo a los expertos, esta vez de fuera de Italia. Uno de éstos, Jean Mignot, al

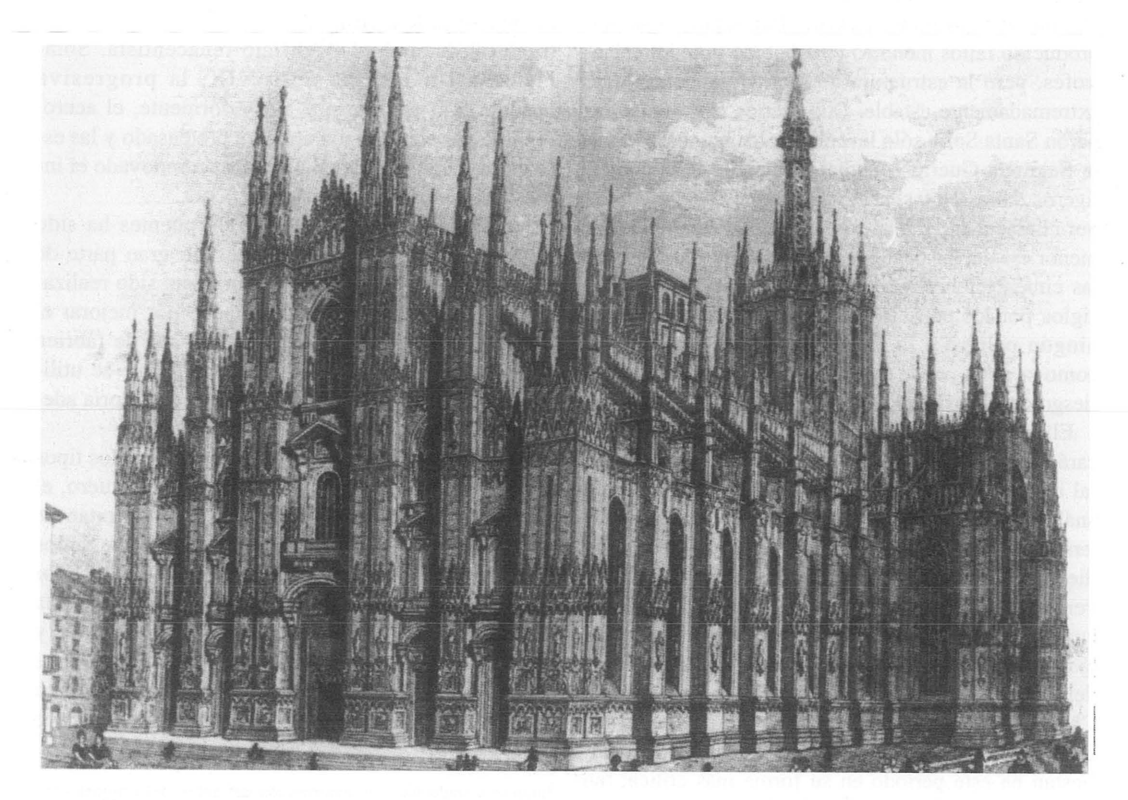


Figura 15.1
Milán: grabado del Duomo (ca. 1400) del siglo XIX

llegar de París, redactó una lista de 54 puntos con los defectos de la inacabada catedral. Algunas de estas críticas son curiosamente irrelevantes y pedantes; Paul Frankl considera a Mignot una especie de Beckmesser, una descripción bastante acertada. Entremezclados con lo que hoy día podríamos considerar críticas estructurales (p. ej. la insuficiencia de los estribos) se encuentran lo que se podrían calificar de comentarios estéticos (p. ej. la excesiva altura de los doseles sobre las estatuas); al parecer, ni los italianos ni Mignot podían distinguir claramente entre las funciones estructurales y las no estructurales de las diversas partes de la fábrica. En realidad, Mignot basaba su crítica en un conjunto de reglas que sabía que eran correctas; en determinado momento, solicitó que se llamase a otros expertos de Alemania, Francia e incluso de Inglaterra, sabiendo que cualquier otro arquitecto formado en una logia famosa le apoyaría. Y, por supuesto, Mignot triunfó; los italianos respondieron en base a una formación inferior o, aún peor, trataron de inventar respuestas racionales.

Como ejemplo se puede citar la afirmación italiana que irritó a Mignot de manera especial, ... *archi spiguti non dant impulzam contrafortibus*. Esto sucedió en un interesante ejemplo de defensa legal tripartita. A la crítica de Mignot de que los estribos no eran bastante resistentes, la respuesta fue: Primero, los estribos son suficientemente resistentes. Segundo, sin prejuicio de lo primero, si no son suficientemente resistentes, en cualquier caso son innecesarios, ya que los arcos apuntados no producen empujes (*archi spiguti* ... etc.). Tercero, sin prejuicio de las respuestas anteriores, si los arcos apuntados producen empujes, en cualquier caso se han colocado tirantes de hierro entre los arcos para absorber los empujes. (Hoy día aún se pueden ver los tirantes.)

Quizá existen razones para afirmar que el empuje de un arco apuntado es menor que el de un arco de medio punto de la misma luz, pero se puede disculpar a Mignot por haber saltado con su gran *ars sine scientia nihil est*, la práctica no es nada sin la teoría. Pero la victoria de Mignot y su consiguiente nombramiento como arquitecto de Milán, no significa que él mismo entendiese la teoría con la que trabajaba. Para Mignot la teoría era un conjunto de reglas, sancionadas por el tiempo y la práctica, y recogidas en un libro; el significado de las reglas, y las auténticas razones de su existencia, se fueron haciendo cada vez más confusas con el paso del tiempo.

La estructura gótica

Las reglas de 1399 con las que se comparó Milán eran las mismas que se emplearon para proyectar la catedral de Colonia más de un siglo antes, a finales del gótico clásico, y Colonia es una estructura más refinada que Milán. Los sencillos principios estructurales encerrados en las reglas habían existido durante 200 años y son evidentes a la mirada más indiferente. El dibujo de Viollet-le-Duc de una catedral (arquetípica), figura 15.2, muestra algo de la estructura.

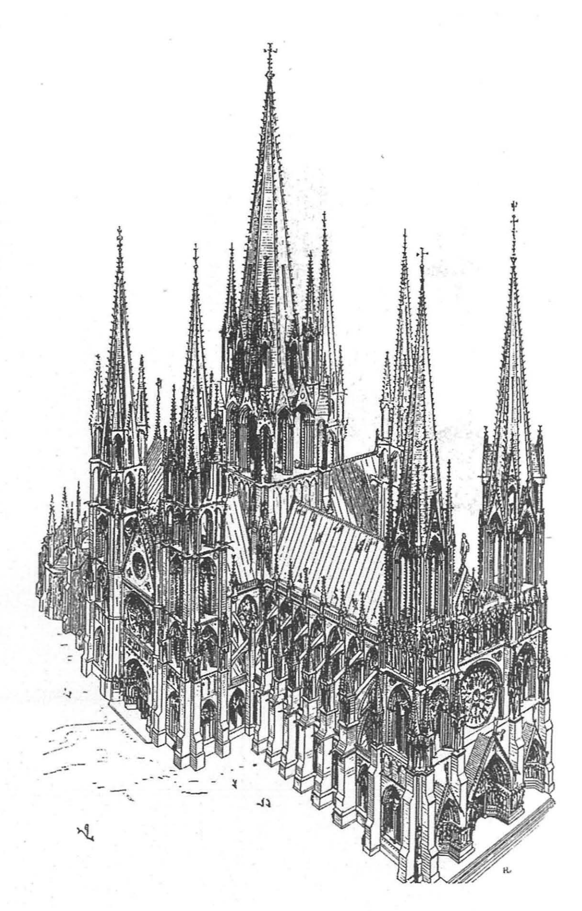


Figura 15.2
La catedral gótica, según Viollet-le-Duc

Siete agujas no se llegaron a construir nunca; los fondos de que disponían los constructores eran siempre insuficientes para llevar a cabo esos ambiciosos proyectos. Sin embargo, parece que, en cualquier caso, las agujas *no* son estructurales, en el sentido de que no contribuyen a la estabilidad de la catedral en su conjunto (aunque tienen sus propios problemas estructurales locales). Igualmente, los arbotantes *son* estructurales; es evidente que apuntalan el edificio.

Fue Guadet, a principios de siglo, quién denominó gótico al estilo de arquitectura apuntalada: «voyez Notre-Dame du côté du chevet: qui donc pourra dire que ce n'est pas là un monument étayé?». Efectivamente, hay razones especiales para los enormes arbotantes de Notre-Dame de París, figura 15.3, que salvan las dos naves laterales; el proyecto original del siglo XII tenía un pilar intermedio. Pero grandes o pequeños, los *étais permanents* tenían la misión de absorber directamente los empujes de la alta bóveda; a menor escala, este apuntalamiento se puede apreciar en un coro que se hundió parcialmente en Famagusta, figura 15.4. (Muchas de las iglesias góticas de los cruzados en Chipre presentan unas buenas secciones de la construcción en fábrica, que revelan gran parte de la técnica medieval.)

El arbotante es una de las esencias del gótico. La otra es la bóveda nervada, y Choisy, un ingeniero e historiador de la arquitectura, también a principios de este siglo, definió el gótico a partir de la bóveda nervada y el arbotante. No hizo ninguna referencia al arco apuntado, el discriminante visual inmediato entre el gótico y el románico. La configuración de

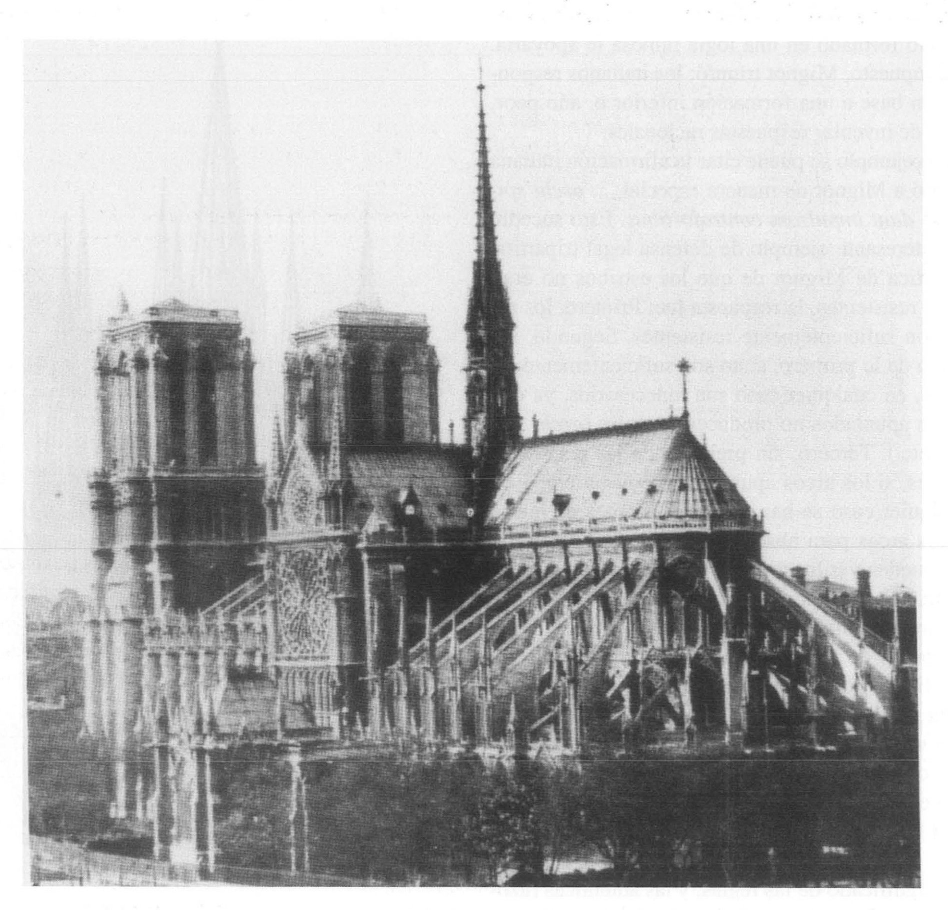


Figura 15.3
Notre-Dame, París. Los arbotantes se reconstruyeron a mediados del siglo XIII

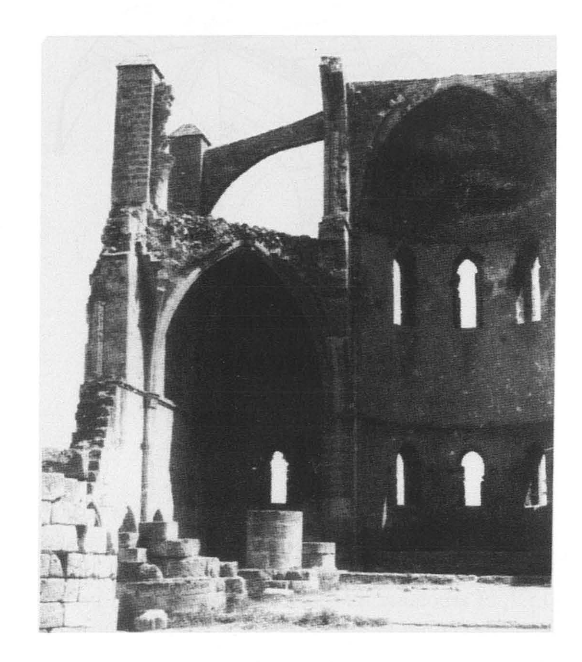


Figura 15.4
Famagusta. San Jorge de los Griegos (franco-bizantina, 1360)

nervios más sencilla es la de la bóveda cuatripartita, figura 15.5, en la que cada tramo de la nave (o del coro) se trata como una unidad, y los nervios diagonales dividen la bóveda en cuatro plementos. El esquema representado está constituido por cilindros que se interpenetran, superficies de curvatura simple, pero la estructura de cáscara que resulta tiene una estabilidad extraordinaria.

Tensiones en las bóvedas

Las tensiones en los plementos principales (paños) de una bóveda de piedra son del orden de $R\rho$, donde R es el radio de curvatura local (en general, en cada punto habrá dos valores de R) y ρ es el peso específico de la fábrica. El valor de R puede ser de hasta 15 m para la bóveda de una nave, y ρ puede valer, para una arenisca, 20 kN/m^3; el producto $R\rho$ es, por tanto 0,3 N/mm^2, a comparar con una resistencia de rotura a compresión de 40 N/mm^2 de una arenisca media. Los niveles tensionales en las bóvedas de fábrica son tan bajos que la resistencia de la fábrica parece irrelevante; esto resulta ser una de las claves para entender el comportamiento de las estructuras de piedra. Desde el punto de vista práctico, los plementos de la bóveda se construían con una piedra ligera (si podía encontrarse), y las bóvedas de mampuestos con gruesas juntas de mortero eran lo habitual. La escasa resistencia de la toba, como en Canterbury, o del mortero de las juntas, carece de importancia y el trasdós de una bóveda se puede pisar sin peligro.

Estas observaciones se aplican a cáscaras de curvatura continua. En las intersecciones de las cáscaras, en las aristas, habrá una gran concentración de tensiones y es prudente reforzarlas con nervios. Algunos nervios existentes parecen demasiado pequeños, y otros se han desprendido por completo, a pesar de que la bóveda sigue en pie. En el pasado, este tipo de observaciones ha llevado a la opinión de que los nervios eran dispositivos constructivos que posibilitaban tender la plementería fácilmente, reduciendo las cimbras, al tiempo que cubrían los mal aparejados encuentros de las superficies en las aristas. Además, se pensaba que el nervio era estéticamente satisfactorio, y se puede considerar que el cometido del nervio lo constituyen todas estas funciones.

No obstante, los cálculos de los órdenes de magnitud indican que el nervio tiene una finalidad estructural precisa. Si una bóveda se construye sin nervios, o con nervios que a continuación se arruinan, el nivel de tensiones de la cáscara de 0,3 N/mm^2 crecerá bruscamente en las proximidades de las aristas hasta alcanzar, digamos, unos 5 N/mm^2. Esta tensión considerable todavía es inferior a la resistencia de rotura a compresión del material y, probablemente, las aristas que formen las cáscaras sean lo bastante regulares, y el mortero suficientemente resistente, como para que no se produzca el hundimiento de la bóveda. En este caso la bóveda tendrá éxito, por así decirlo, al intentar construir sus propios nervios. El técnico en estructuras, al contemplar una bóveda sin nervios, siempre verá el esqueleto diagonal que definen las principales líneas de fuerza.

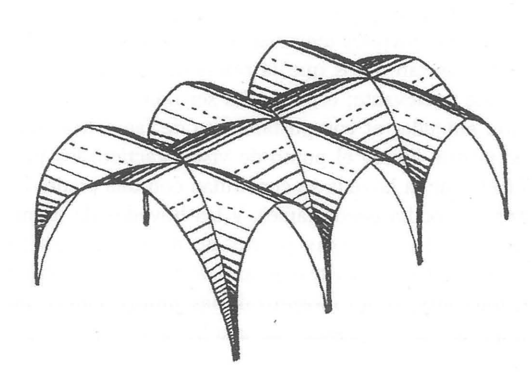


Figura 15.5
Esquema de una bóveda cuatripartita

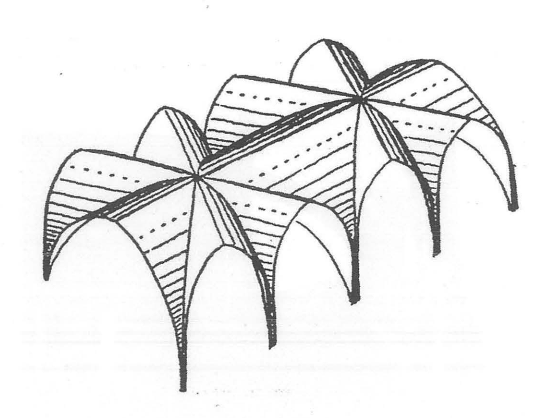


Figura 15.6
Esquema de una bóveda sexpartita

Así, el dibujo del esqueleto, aunque básicamente esquemático, denota una cierta función estructural. Se ha visto que en la bóveda cuatripartita puede considerarse cada tramo por separado; si los tramos se consideran dos a dos, es posible proyectar una bóveda sexpartita, figura 15.6. Una vez más, este esquema está constituido por la intersección de superficies cilíndricas. Esta es la disposición de las bóvedas de Notre-Dame, donde, no obstante, la bóveda es marcadamente cupuliforme, de manera que cada uno de los plementos es una superficie de doble curvatura. Tanto la bóveda cuatripartita como la sexpartita son estructuras muy sencillas, y la bóveda nervada llegó a evolucionar a formas muy complejas. En Inglaterra aparece, bastante pronto, la bóveda de ligaduras (*lierne vault*), mientras que en Europa central se desarrollaron las bóvedas estrelladas y reticuladas.

Sea cual fuere la forma de la bóveda, si los nervios se aplican a cáscaras de curvatura continua, serán fundamentalmente decorativos, mientras que si se sitúan en los pliegues de encuentro entre dos superficies, soportarán una carga importante. Una vez más, cualquiera que sea su forma, la bóveda, considerada en su conjunto, soporta su propio peso vertical y necesitará un contrarresto horizontal. Las dos esencias del gótico, la bóveda nervada y el arbotante están relacionadas íntimamente desde el punto de vista estructural; la bóveda produce empujes hacia abajo y hacia afuera que deben resistirse mediante arbotantes.

En el dibujo de Amiens de Viollet-le-Duc, figura 15.7, el arbotante inferior está colocado casi perfectamente, no en el arranque de la bóveda sino en el *tas-de-charge*, en las jarjas, para recoger los empujes y transmitirlos por encima de la nave lateral a los estribos exteriores o botareles. La bóveda de piedra requiere, para su estabilidad, un arbotante (aunque existen excepciones como por ejemplo en Worcester); y viceversa, la presencia de arbotantes exteriores confirma la existencia de una bóveda de piedra en el interior de la iglesia.

En el dibujo de Amiens se ponen de manifiesto otras muchas características estructurales; una de las más patentes es el segundo arbotante superior, que tiene una función diferente a las comentadas. La imagen que surge es la de una estructura constituida por un conjunto de piedras, en equilibrio bajo la fuerza de la gravedad; los empujes y contrarrestos se equilibran. El triunfo del gótico clásico consiste en que este equilibrio se consigue con una estructura de gran sutileza; en el románico las pesadas masas de material reflejan la gran cautela de los arquitectos.

Sin embargo, existen fuerzas tanto activas como pasivas. De manera notable, el viento producirá un fuerte empuje lateral sobre la alta techumbre de madera encima de la bóveda de fábrica, y este empuje

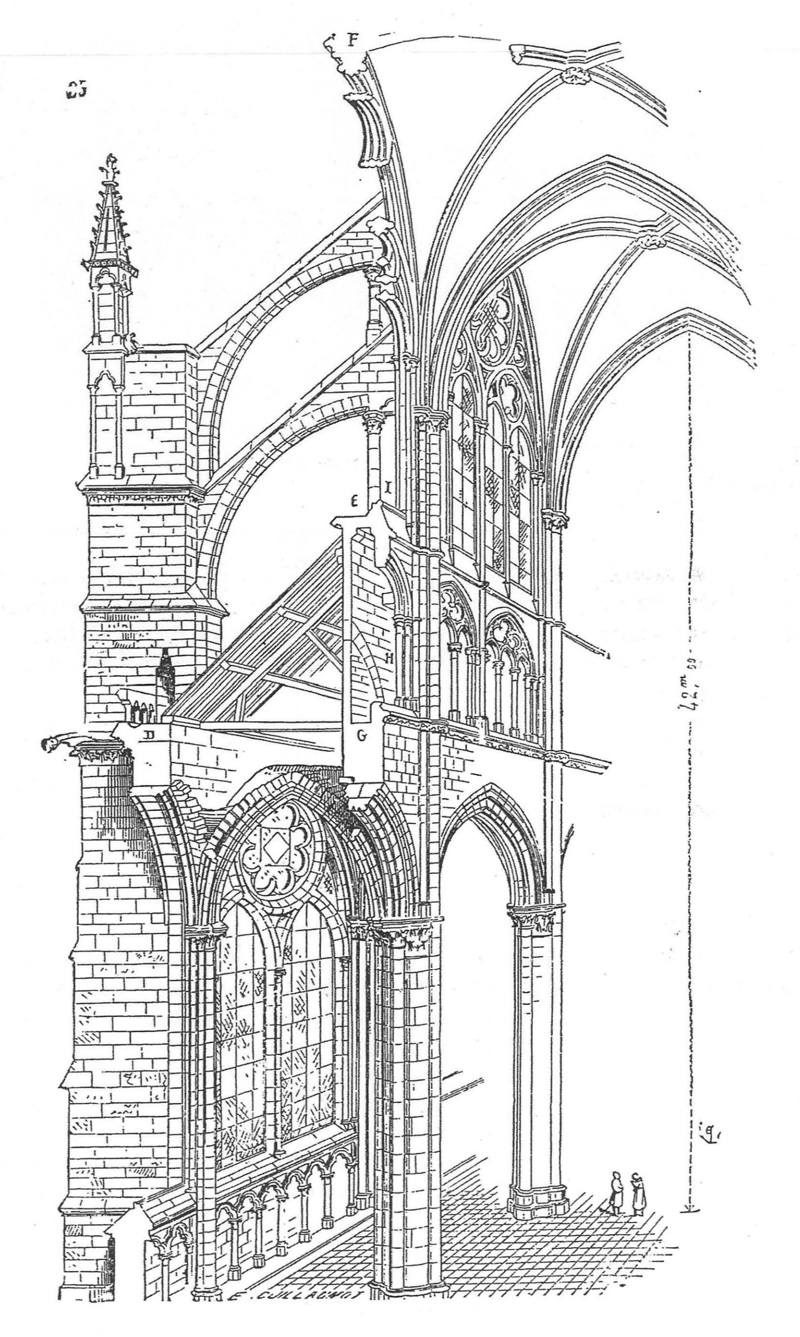


Figura 15.7
Amiens, según Viollet-le-Duc

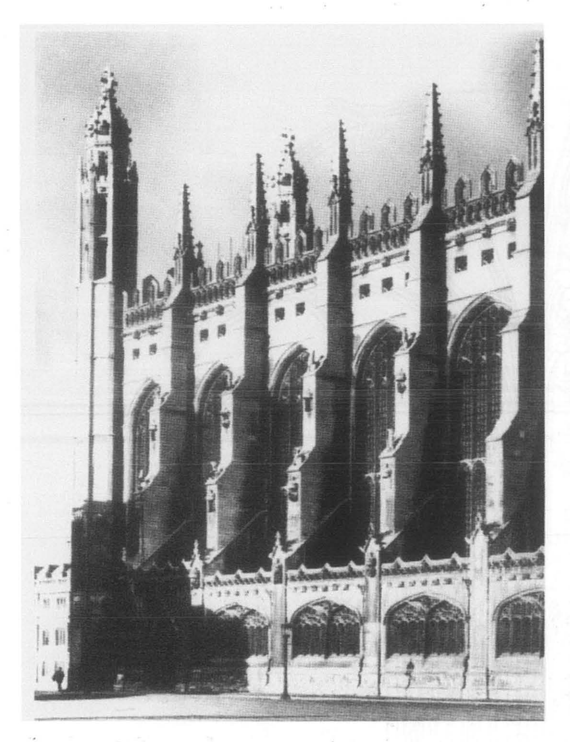


Figura 15.8
Capilla del King's College, Cambridge, 1446-1515 (vista desde el exterior)

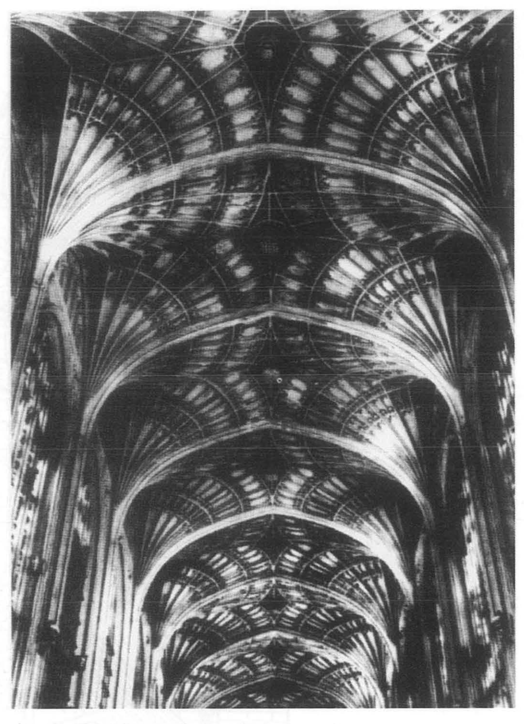


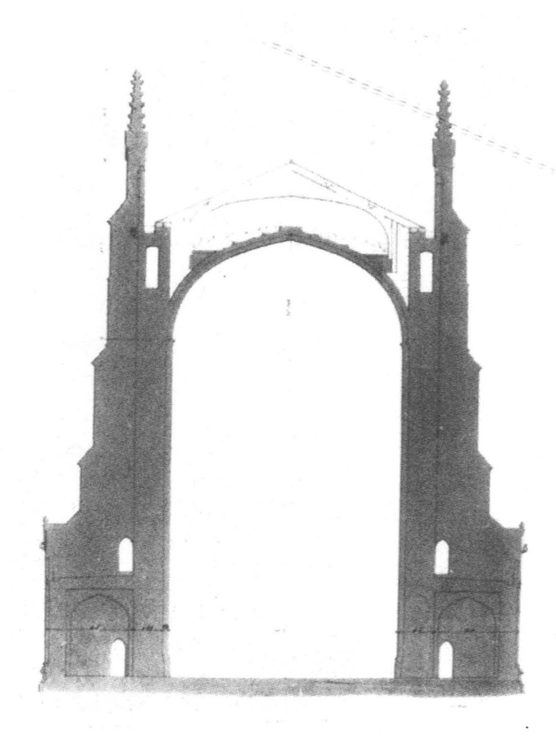
Figura 15.9
Capilla del King's College. Bóveda de abanico de John Wastell, 1512. Los potentes arcos transversales son una reminiscencia de la intención inicial de realizar una bóveda nervada

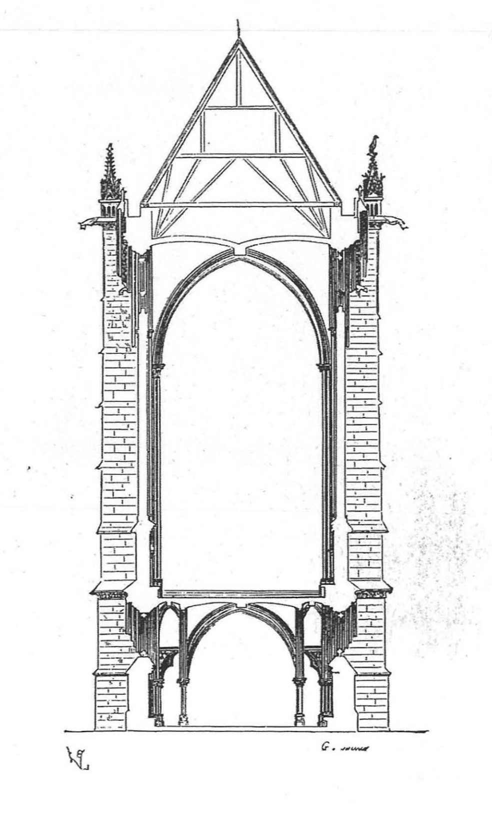
actúa horizontalmente sobre el muro superior de la fábrica. Debe ser resistido, y el arbotante superior realiza esta función. Éste también cumple otra función: estabilizar la propia cubierta. Es extraordinariamente difícil construir juntas entre los elementos de madera capaces de resistir tracciones; en consecuencia, las cubiertas de madera se abren e imponen un empuje horizontal creciente sobre la fábrica.

Empujes y contrarrestos

Desde el punto de vista estructural, lo que define el gótico es el empuje y el contrarresto, y no la bóveda nervada y el arbotante como tales. Es perfectamente posible que un edificio no tenga ninguno de estos elementos y sea indudablemente gótico. La Capilla del King's College en Cambridge, por ejemplo, no tiene naves laterales, de manera que los estribos pueden soportar la capilla sin el concurso de arbotantes, figura 15.8; en el interior, la cubierta se cierra con la última expresión de la bóveda nervada, la bóveda de abanico, figura 15.9. La capilla, cuando se comenzó en 1446, estaba proyectada para tener nervios; la forma exacta de la bóveda nervada se conoce a través de las dos capillas laterales que se terminaron en la primera fase de construcción. La terminación de la capilla se retrasó casi un siglo y la bóveda de abanico definitiva se construyó en 1512.

La forma exacta de la bóveda nervada está también implícita en una de las primeras piedras que se colocaron en el edificio. Los estribos entre las grandes vidrieras surgen del suelo de la capilla; en este





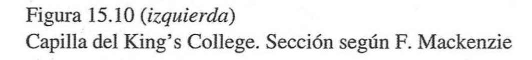
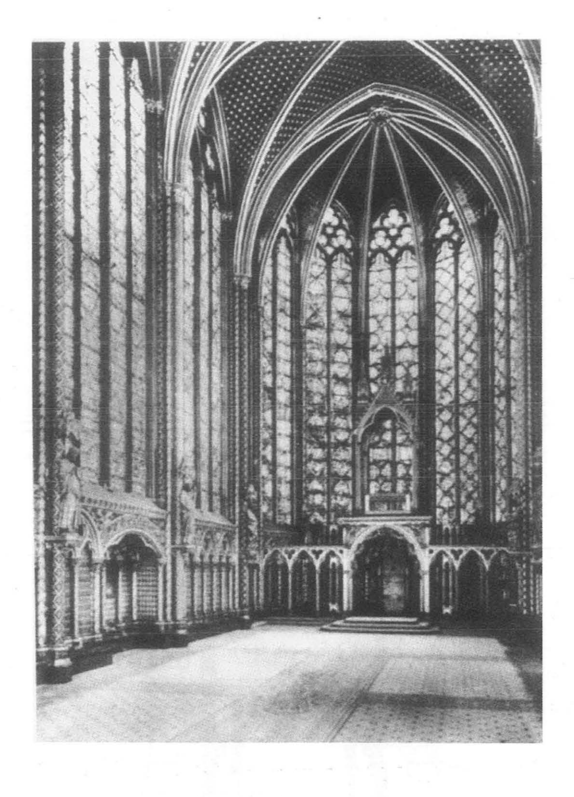

Figura 15.10 (*izquierda*)
Capilla del King's College. Sección según F. Mackenzie

Figura 15.11 (*derecha*)
París, Sainte Chapelle, 1244-1247, según Viollet-le-Duc

edificio no hay capiteles que interrumpan el suave fluir de la fábrica. Las molduras de las bases de los pilares se elevan, y estaban pensadas para que se ramificasen en los nervios de la bóveda. Por lo tanto, el cambio de forma de la bóveda definitiva llevó al diseñador John Wastell a un problema difícil que resolvió en gran parte satisfactoriamente. Los nervios radiales de la bóveda de abanico se reúnen en las molduras del pilar principal de forma convincente. Sin embargo, Wastell fue incapaz de eliminar el nervio perpiaño de la bóveda nervada inicial, de modo que la Capilla del King's College está dividida visualmente en tramos. En Peterborough se demuestra que los arcos perpiaños no son necesarios. Los suaves abanicos del trascoro fueron construidos unos dos años después que los de la bóveda del King's College, probablemente por el mismo arquitecto.

La sección transversal, figura 15.10, muestra los masivos estribos. El proyecto parece tímido, y los huecos entre las 18 capillas laterales (nueve al norte y nueve al sur) podrían haber sido mucho mayores. En París se había construido una capilla del mismo tamaño 200 años antes, la Sainte Chapelle, figura 15.11. Aquí tampoco hay naves laterales y los estribos soportan la obra sin arbotantes. La comparación entre las dos secciones transversales muestra que el proyecto francés, anterior, era mucho menos conservador que el del King's College; quizá, durante los 200 años entre los dos proyectos, se había perdido parte de la maestría gótica. (Se puede observar que la



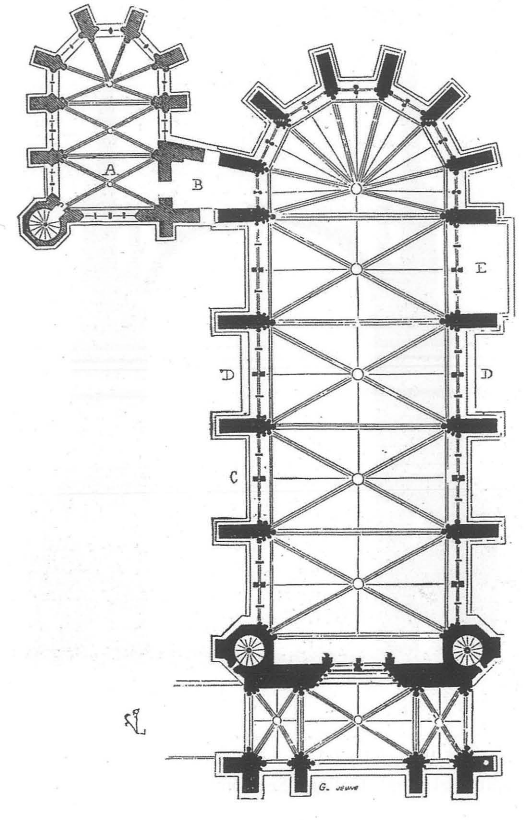


Figura 15.12
Sainte Chapelle, la capilla

Figura 15.13
Sainte Chapelle. Planta de la capilla, según Viollet-le-Duc

alta armadura de madera de la Sainte Chapelle se apoya directamente sobre los estribos.)

La Sainte Chapelle tiene dos pisos, y desde la calle se entra a la cripta. Aquí, la bóveda es cuatripartita y no abarca toda la anchura de la capilla. En cambio, se apoya verticalmente en dos filas de columnas interiores, y el empuje lateral se transmite a través de pequeñísimos arbotantes (una vez más perfectamente colocados) a los estribos. Al subir a la capilla propiamente dicha, figura 15.12, es cuando se aprecian con claridad las intenciones del arquitecto. Esas intenciones son, en realidad, las del gótico: sustituir la pesada fábrica por incorpóreas paredes de vidrio, la disolución visual de la estructura, al menos cuando se observa desde el interior. El precio que hay que pagar (si Guadet tiene razón al pensar que hay un precio) es que la estructura portante del edificio se manifieste en el exterior. La planta de la capilla, figura 15.13, muestra la sorprendentemente escasa cantidad de fábrica y las consiguientemente extensas superficies de vidrio. Estas paredes de vidrio se pueden ver en cualquier iglesia del gótico clásico, por ejemplo en Beauvais, figura 15.14.

TEORÍA DE LAS ESTRUCTURAS DE FÁBRICA

Estos pocos ejemplos nos han ayudado a definir el gótico y a proponer lo que se podría denominar una descripción *Beaux-Arts* de la fábrica. La descripción

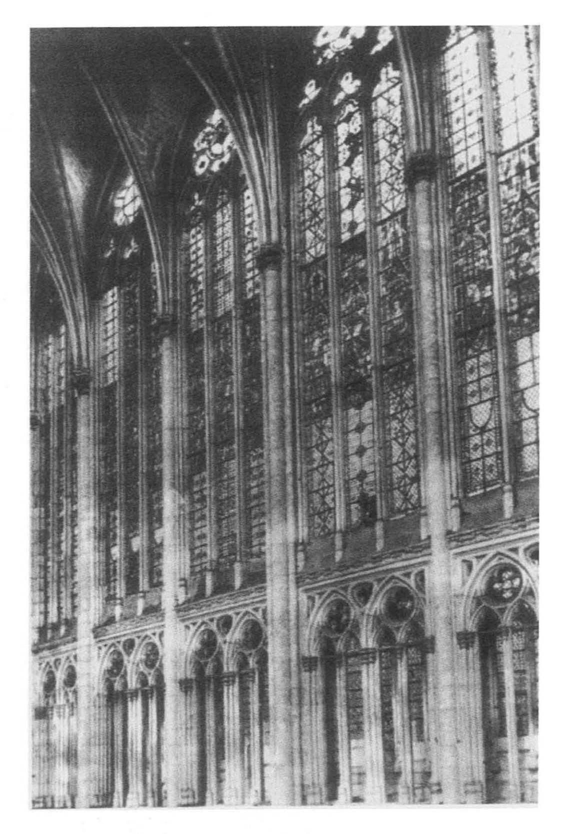


Figura 15.14
Beauvais 1247-1272, reconstruida en el siglo XIII. Vidrieras del coro

no ha sido totalmente visual, ya que ha presentado la función estructural de los elementos. Sin embargo el análisis ha sido de carácter cualitativo; para entender mejor los principios estructurales del gótico, es preciso un análisis cuantitativo, aunque sólo sea de los órdenes de magnitud (análogamente a los cálculos anteriores para la cáscara de fábrica).

Puesto que la estructura portante se ha reducido de una manera tan sustancial, como en Beauvais o en la Sainte Chapelle, parece pertinente averiguar la magnitud de las cargas que soporta la fábrica restante, por ejemplo, los pilares entre las vidrieras; entonces, se podrían calcular las tensiones en la fábrica. Es conveniente recordar que los ingenieros del siglo XIX expresaron la resistencia de la piedra, no desde el punto de vista de las tensiones sino de otro parámetro igualmente válido, la altura que alcanzaría una columna prismática antes de fallar por aplastamiento en su base debido a su propio peso. La arenisca de resistencia media, citada en el ejemplo de la bóveda, tenía un peso específico de 20 kN/m^3 y una resistencia de rotura a compresión de 40 N/mm^2; una columna de este material puede alcanzar una altura de 2.000 m antes de fallar en la base. Quizá no sorprenda que el orden de magnitud sea el de la altura de una montaña pequeña.

Los pilares de Beauvais tienen menos de 50 m de altura, pero soportan más que su propio peso. Soportan los arcos sobre las vidrieras, la bóveda principal, los muros superiores y la gran cubierta de madera. Estas cargas adicionales no aumentan las tensiones debido al peso propio en un factor de más de tres o cuatro. En realidad, Benouville, que llevó a cabo un detallado estudio sobre Beauvais hace 100 años, no pudo encontrar tensiones debidas al peso propio superiores a 13 kg/cm^2 (1,3 N/mm^2). El valor parece ligeramente bajo, pero es cierto que, en general, el elemento más cargado de cualquier estructura de fábrica no tendrá una tensión media superior a la décima parte de la resistencia a rotura del material. Por ejemplo, los cuatro pilares principales de Ely, que soportan toda la carga de la masiva torre occidental, están sometidos a una tensión de compresión de unos 3 N/mm^2. Los muros principales y otras partes del edificio que, fundamentalmente, sólo soportan su propio peso, tendrán unas tensiones del orden de la centésima parte de la resistencia de rotura a compresión del material.

A la luz de estas cifras, podría parecer que cualquier intento de análisis estructural basado en el concepto de tensión de trabajo sería erróneo. Además, existe un margen considerable para el deterioro del material antes de que la estructura en su conjunto peligre. No vamos a considerar aquí los problemas de la restauración de edificios antiguos, pero es evidente que, en este último caso, habría que tomar medidas para consolidar el material. La conclusión negativa de que el cálculo de las tensiones carece de importancia es, al menos, históricamente correcta; los arquitectos medievales desconocían el concepto de tensión o incluso de la mecánica. Sean cuales fueren las reglas que utilizaban (y Mignot indudablemente utilizaba reglas), éstas no se basaban en nada parecido a la moderna teoría estructural.

Teoría de arcos

Para comprender el comportamiento de las fábricas es más útil el estudio de la literatura científica de los siglos XVIII y XIX. La teoría del arco adovelado, por ejemplo, ha sido descubierta y redescubierta constantemente durante un período de 250 años, por los sucesivos investigadores que, en parte ignorantes de los escritos de sus predecesores, han desarrollado sus propias teorías. Una de estas contribuciones la realizó Coulomb, quién, por circunstancias geográficas, trabajó casi con toda seguridad de manera aislada. Es el mismo Coulomb que da nombre a la unidad de carga eléctrica y que en el mundo de la ciencia se le recuerda como físico. En realidad, era un oficial del ejército con formación de ingeniero civil. Después de su graduación en la escuela de Mézières, su primer destino fue la isla de la Martinica; era el encargado de las obras del Fuerte Bourbon, construido para proteger la colonia contra los ingleses. Como recién graduado en ingeniería civil, encontró que lo que le habían enseñado en la escuela no era estrictamente importante para la tarea de calcular arcos y muros de contención. Sin embargo, desarrolló sus propias teorías y, a su vuelta a París después de ocho años fuera, presentó una memoria a la Académie en 1773. Esta memoria aborda cuatro de los principales problemas de ingeniería de la época, incluyendo la rotura de columnas y la flexión de vigas. La memoria es más famosa por la parte en la que sienta las bases de la teoría de la mecánica del suelo. La última parte trata el empuje de los arcos y resulta que, ideas muy sencillas sobre el comportamiento de los arcos, proporcionan la clave para entender la estructura gótica más compleja.

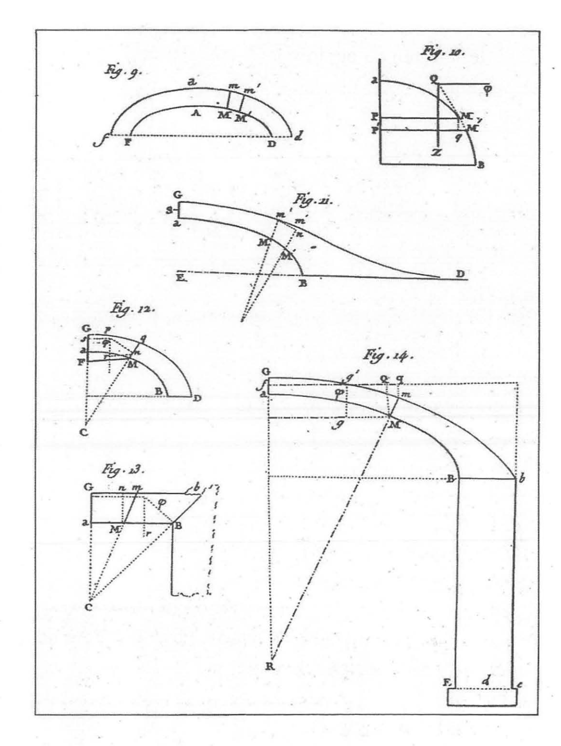


Figura 15.15
Ilustraciones de la *Memoria sobre algunos problemas de estática* de 1773, de Coulomb

El semiarco que muestra la figura 14 de Coulomb (figura 15.15) evidentemente se mantiene en equilibrio por medio de un empuje horizontal en la clave. El arco está constituido por dovelas aparejadas sin mortero, en seco, y el arco completo se sostiene en virtud de las fuerzas que se transmiten entre las dovelas. La naturaleza de estas fuerzas se puede entender siguiendo las explicaciones de Coulomb. Se supone que la rotura del arco se produce en alguna sección del mismo, por ejemplo en la junta Mm entre dos dovelas; la posición de esta junta no se sabe *a priori*. ¿Cómo se puede producir el fallo en esta junta? Existe la posibilidad, dice Coulomb, de que toda la parte superior GamM deslice sobre la parte inferior del arco. Sin embargo, señala inmediatamente que los materiales empleados en la construcción de arcos son de tal naturaleza que el rozamiento evitará cualquier deslizamiento, y excluye éste como forma de rotura.

De hecho, en la práctica rara vez se produce el fallo por deslizamiento, aunque se deben tomar unas mínimas precauciones para prevenir que ocurra. A modo de ejemplo, los pináculos colocados generalmente sobre los botareles no están ahí para prevenir el vuelco; su peso es pequeño y, a menudo, como en Amiens, están colocados en la parte externa del estribo. Sin embargo, proporcionan una precompresión a la fábrica del botarel; sin el peso del pináculo, podría no haber suficiente rozamiento para impedir que la parte superior se separe debido a la acción del

empuje inclinado del arbotante. Para este fin, la posición de la línea de acción del peso del pináculo es indiferente y podría estar perfectamente en el exterior, como en Amiens.

Si se excluye el deslizamiento, ¿de qué otra manera se podría producir el fallo en la junta Mm? Si el empuje horizontal en la clave fuese menor que un valor determinado, podría formarse una articulación en M, en el intradós del arco, y el bloque GamM rotaría alrededor de M. Análogamente, si el empuje horizontal en la clave fuese muy grande, se produciría la rotación alrededor de m en el trasdós del arco. En este análisis de Coulomb hay dos ideas importantes. La primera es la de articulación; éste no era un concepto nuevo, pero Coulomb fue el primero que lo explotó al máximo. La segunda es que Coulomb estableció que el empuje horizontal en la clave debe estar comprendido entre ciertos límites para que el arco esté en equilibrio; estos límites se calculan fácilmente para cualquier junta de rotura Mm. Queda por determinar la junta más crítica, la Mm; Coulomb demuestra que *une application des règles de Maximis & Minimis* al valor del empuje horizontal resuelve el problema.

Teniendo presente el concepto de articulación, se puede desarrollar la teoría de arcos sobre una base firme. A la hipótesis de que la rotura por deslizamiento no se produce hay que añadir dos hipótesis más sobre el comportamiento del material. En primer lugar, hay que considerar que la piedra no es capaz de soportar tracciones o, más bien, que la construcción de fábrica no puede soportar tracciones; el mortero entre las piedras es tan débil que no se pueden transmitir tracciones dentro de la estructura. En segundo lugar, se supondrá que las tensiones que se encuentran en la fábrica son tan pequeñas que, efectivamente, la piedra tiene una resistencia a compresión infinita; por tanto, no hay posibilidad de rotura por aplastamiento de la fábrica.

Formación de articulaciones

En estas condiciones, se formará una articulación cuando el empuje en la fábrica se aproxime a la superficie. En cualquier sección transversal, el estado de esa sección se puede caracterizar por los valores del empuje N y del momento M, donde el momento es el empuje N multiplicado por su excentricidad con respecto a la directriz, figura 15.16. Se formará una articulación cuando la excentricidad alcance el valor h, positivo o negativo; si la excentricidad es menor que h, el empuje puede pasar de una dovela a la siguiente, estando éstas perfectamente en contacto. Así, la línea OA representa una articulación que se ha formado en la superficie superior de la fábrica, y es simplemente la línea $M = hN$. Análogamente, la línea OB representa una articulación en la superficie inferior. Cualquier punto en el plano M-N representa un cierto estado de una junta entre dovelas; si el punto (correspondiente a ciertos valores de M y N) se encuentra dentro del triángulo abierto AOB, la junta permanecerá cerrada; si el punto se encuentra en OA u OB, se forma una articulación; es imposible que el punto esté fuera del triángulo AOB, ello implicaría tracciones en la junta.

Si en el análisis se considera la verdadera resistencia de rotura a compresión del material, las líneas rectas OA y OB se sustituyen por arcos parabólicos. Sin embargo, aún cuando las tensiones fuesen tan altas como un décimo de la resistencia a rotura, la parte del diagrama que importa es la OCE, donde las parábolas y las líneas rectas difieren muy poco. Si se considera necesario se puede tener en cuenta el efecto de la resistencia.

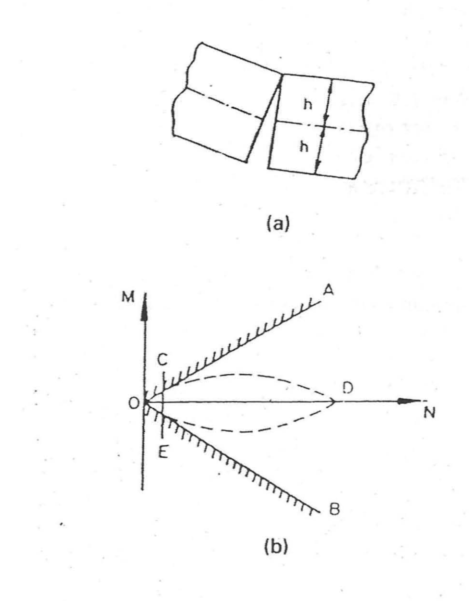


Figura 15.16
(a) Articulación entre dovelas. (b) Superficie de estado límite para la formación de una articulación en un arco

La teoría plástica

A un técnico versado en la teoría plástica de las estructuras de acero esta digresión le resultará familiar. Se da la circunstancia de que esta teoría relativamente nueva sobre el comportamiento estructural, desarrollada para el acero dúctil, se puede aplicar prácticamente sin cambios al análisis de las fábricas, y que los teoremas fundamentales conducen directamente a ideas convincentes sobre la estabilidad de las estructuras de fábrica. Por ejemplo, para que una estructura llegue a ser inestable es preciso que se formen un cierto número, calculable, de articulaciones; el arco simple adovelado requiere cuatro rótulas, figura 15.17. Para demostrar que una estructura está a punto de hundirse es necesario encontrar este sistema de articulaciones; para algunas estructuras, puede ser imposible encontrarlo, en cuyo caso, dentro del marco de las hipótesis (sobre la resistencia del material) el colapso no se producirá nunca. Más adelante se da un ejemplo de este tipo de estructura.

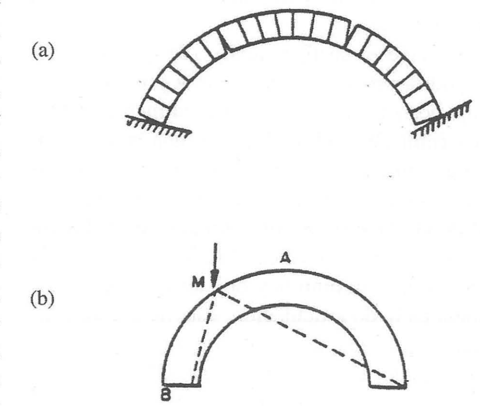


Figura 15.17
(a) Colapso de un arco de dovelas mediante la formación de cuatro articulaciones. (b) Carga puntual sobre un arco

Otro de los teoremas permite realizar afirmaciones sobre la estabilidad, más que sobre la inestabilidad, de la estructura. Para demostrar que una estructura es estable, lo único que se necesita es encontrar un estado de equilibrio posible; con tal que exista un sistema de fuerzas satisfactorio la estructura es estable. La potencia de esta afirmación reside en el hecho de que no es necesario calcular el estado real de la estructura. Así el arco semicircular, figura 15.17, se ha proporcionado para que sea estable sometido a una carga vertical de cualquier magnitud aplicada en la clave A; desde la clave hasta los arranques, se pueden trazar líneas de empujes rectas. La carga vertical se puede transmitir con fuerzas que se encuentran dentro de la fábrica, y esto es prueba suficiente de que el arco es estable sometido a esa carga. Por el contrario, una carga puntual aplicada en M no se puede equilibrar mediante líneas de empujes dentro de la fábrica, y se producirá un colapso mediante un mecanismo de cuatro articulaciones.

Estas ideas derivadas de la teoría plástica se pueden emplear para analizar elementos concretos de una estructura de fábrica; así mismo, pueden llevar a conclusiones de carácter general. La «regla de los cinco minutos» se puede considerar el primero de tres ejemplos de estas proposiciones generales. El propio hecho de que estemos contemplando una determinada estructura de fábrica (por ejemplo un arbotante) es prueba de que ésta se encuentra en un equilibrio satisfactorio. Cuando el arbotante se construyó, y se retiraron las cimbras sobre las que se había construido sin que se produjera su hundimiento, esto fue una prueba inmediata de que se había establecido un sistema de fuerzas satisfactorio. Si el arbotante se sostiene durante cinco minutos, es prueba de que se sostendrá para siempre; o quizá para ser más realistas, y admitiendo el deterioro del material, durante 500 años.

El segundo ejemplo está relacionado con los asientos diferenciales. Un pilar de crucero, por ejemplo, puede asentar debido al peso de una torre, pudiendo aparecer serias perturbaciones en la fábrica, acompañadas de grietas y deformaciones locales. Sin embargo, siempre que los asientos no sean lo suficientemente grandes como para que cambie la geometría general de la estructura, estas perturbaciones locales no afectarán a la estabilidad global de la estructura. El hecho de que el edificio sea satisfactorio antes de que se produzca el asentamiento significa que existían líneas de empuje adecuadas. Si el conjunto de la geometría de la estructura permanece virtualmente inalterado, estas líneas de empuje serán satisfactorias para la estructura agrietada y deformada y, la conclusión que se deduce de la teoría plástica, es que no se producirá el colapso.

Aquí es preciso señalar que, hasta ahora, para establecer los principios de su comportamiento sólo se ha tenido en cuenta la fábrica en sí misma. El ejemplo considerado indica que la investigación puede ampliarse; los asientos debidos a la consolidación del terreno debajo de la cimentación pueden ser tan grandes que *cambie* la geometría global de la estructura. En una catedral importante, la parte del edificio con mayores riesgos es la torre, donde las tensiones de apoyo sobre el terreno son altas. La escala de tiempo de la mecánica del suelo para la consolidación del terreno en un crucero de dimensiones normales, es decir, el tiempo que se requiere para alcanzar un equilibrio efectivo, es una generación, no cinco minutos. Si los asientos durante este período no son uniformes o conducen a grandes alteraciones en la geometría de la torre, es posible que se caiga. Por otra parte, una vez que ha pasado este período de riesgo, y siempre que no se produzcan cambios en las condiciones generales del terreno, como las que causarían las alteraciones en el nivel freático, se puede considerar que la torre está a salvo.

Esta «regla de la generación» comprende un gran número de hundimientos, por ejemplo los de Winchester, Gloucester, Worcester y Beauvais, que se produjeron, todos ellos, un corto periodo de tiempo después de haber finalizado la obra. Existen uno o dos ejemplos de supervivencia durante períodos más largos; la torre medieval de Chichester se hundió en 1861 y la del crucero de Ely se mantuvo en pie durante dos siglos antes de su colapso en 1322. En Ely, quizá se pueda encontrar una explicación en los efectos de una capa freática variable, mientras que en Chichester la causa más probable es la degradación del material.

Se habrá observado que los conceptos de tensión y resistencia han desaparecido hace tiempo de este análisis, aunque la compactación del terreno es por supuesto una cuestión de tensiones, y el deterioro del material del edificio implica un límite de la resistencia última. No obstante, se han utilizado con más frecuencia conceptos geométricos; el mecanismo de colapso y la idea de línea de empujes dentro de la fábrica son conceptos puramente geométricos. Como un ejemplo final de la aplicación de los teoremas plásticos, se puede demostrar la validez del empleo de modelos a escala para verificar la estabilidad de una estructura. Lo importante es la forma de la estructura y no las magnitudes de las fuerzas y las tensiones. Si el modelo a escala de una catedral se sostiene es prueba inequívoca de que la estructura real se puede construir con toda confianza. Todo esto ya lo apreciaban los constructores medievales, aunque sólo empíricamente, y utilizaron modelos a escala; un ejemplo notable fue el de Bolonia, donde se construyó un modelo de ladrillo a un sexto del tamaño real. Fue esta tradición medieval la que rompió Galileo cuando creó la *Resistencia de materiales* como una de sus *Dos nuevas ciencias*; cuando hay que considerar la resistencia última del material, los ensayos con modelos *no son independientes* del tamaño. Los modelos de catedrales funcionaban porque las tensiones eran muy bajas.

Deformaciones

La existencia de articulaciones entre las dovelas se puede confirmar fácilmente; las recientes obras de mantenimiento en el Clare College, Cambridge, pusieron de manifiesto un buen ejemplo en el puente sobre el río, figura 15.18. En el arco existen otras articulaciones, y el estado actual del puente revela que el estribo a la izquierda del río se movió durante la construcción hace 350 años. La calzada del vano central ya no es horizontal, figura 15.19, pero el puente ha resultado satisfactorio en su estado deformado durante toda su vida.

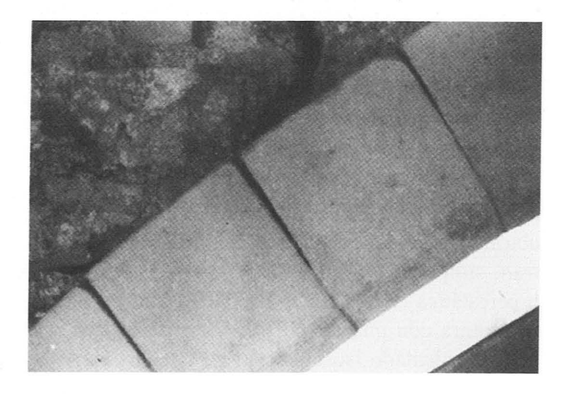


Figura 15.18
Puente en el Clare College, Cambridge (Grumbold 1638-1640). Articulaciones entre las dovelas

Figura 15.19
Puente del Clare College. Descenso en el centro del vano

La manera en que se producen estas deformaciones se puede ver a partir del estudio de un arco ideal, que se supone perfectamente encajado entre los estribos, figura 15.20. Con el paso del tiempo, los estribos se separarán, casi con seguridad, debido a la fuerza constante del empuje del arco; el arco tiene que deformarse para adaptarse a la nueva luz y estas deformaciones implicarán, inevitablemente, la formación de articulaciones. En la práctica, estas articulaciones se manifestarán como grietas de la estructura; pero éstas, por sí mismas, no serán motivo de alarma. En realidad, las articulaciones que se muestran, simplemente han transformado una estructura hiperestática (como se conoce técnicamente) en una estructura con una configuración muy conocida, el arco triarticulado isostático. Este es realmente el estado natural del arco; ninguna estructura se puede construir perfectamente y la presencia de grietas es inevitable. Es precisamente esta extraordinaria flexibilidad de las fábricas, conferida por la acción de las

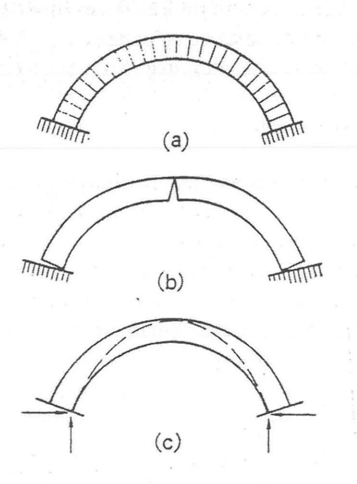


Figura 15.20
Agrietamiento de un arco adovelado debido a la separación de los estribos

articulaciones, lo que hace que estas estructuras sean tan satisfactorias.

Con anterioridad, ya existía la confirmación experimental de la rotura de los arcos mediante la formación de articulaciones; los ensayos que ilustra la figura 15.21 se llevaron a cabo 50 años antes que los escritos de Coulomb. El arco adintelado es de particular importancia (240 de la figura 15.21); en él, el mecanismo se forma solamente debido a que los estribos se han separado; si los estribos fuesen firmes, en el propio arco adintelado no habría una disposición posible de las articulaciones que condujese a un mecanismo de colapso. La conclusión es que un arco adintelado es indestructible, aunque unas cargas suficientemente altas romperán el material por aplastamiento. En el Coliseo de Roma se ha conservado un arco adintelado, aunque tosco (y destinado a no ser visto), sin síntomas de deterioro, figura 15.22.

Existen ejemplos aún más antiguos de arcos adintelados. El Templo de Zeus en Atenas, figura 15.23, tiene la forma habitual de la construcción griega, columnas verticales y dinteles horizontales. No obstante, si se examina con detenimiento el arquitrabe de esquina, se ve que se ha partido en el centro; lejos de funcionar como una viga, el arquitrabe es un arco adintelado de dos dovelas. El concepto griego de que la estabilidad de sus estructuras estaba asegurada mediante el empleo de elementos masivos era erróneo; el que muchos templos griegos se hayan conservado se debe al hecho de que sus elementos masivos se pueden romper con seguridad en piezas del tamaño de las de los edificios góticos.

Comportamiento estructural

El gótico se puede definir, por tanto, no desde el punto de vista de sus elementos estructurales, como la bóveda nervada o el arbotante, sino en función del tipo de comportamiento estructural que revela este estudio. El gótico es el logro decisivo, pasando por los estilos griego, romano y románico, del arte de

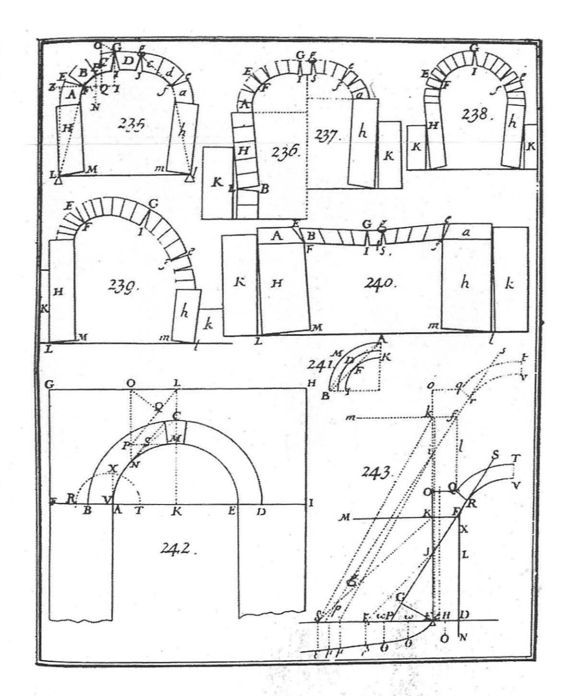


Figura 15.21 (*arriba*)
Ensayos sobre modelos de arcos con dovelas de escayola. Danyzy 1732

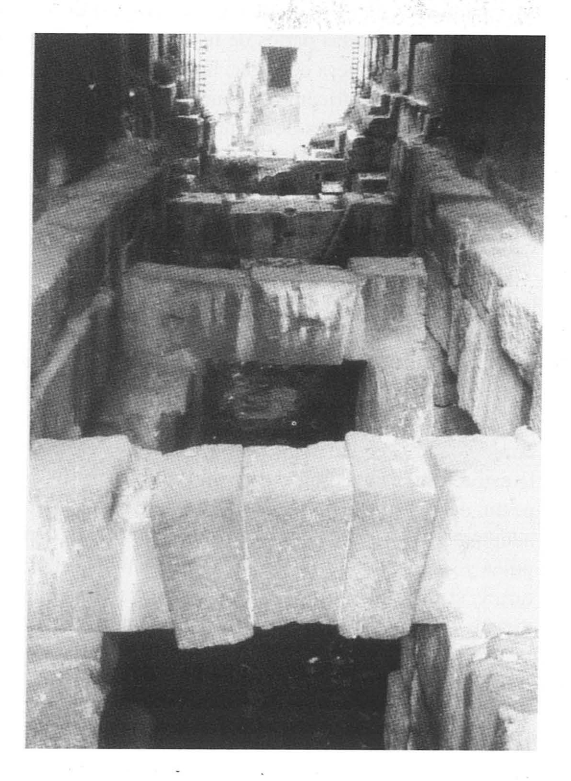


Figura 15.22 (*abajo*)
Arcos adintelados del Coliseo de Roma, siglo I d.C.

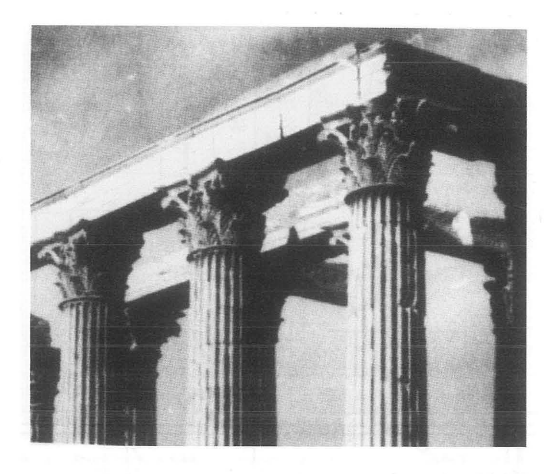


Figura 15.23
Atenas. Templo de Zeus, 174 a.C.

Con estas reglas se proyectó Beauvais. El hundimiento de 1284, después de un período de estabilidad de 12 años, entra dentro del período de una generación y, con toda probabilidad, se debió a problemas de cimentación; pero el segundo hundimiento, 1573, se produjo como consecuencia de intentar construir una estructura gótica fuera del período gótico, cuando el sentido de las reglas se había perdido. En 1569, se terminó en Beauvais una enorme torre de fábrica, figura 15.24; se elevaba 153 m sobre el suelo, y fue constante causa de alarma hasta que se derrumbó cuatro años más tarde.

Indudablemente Mignot, como maestro arquitecto de Milán, en 1400, ya no podía valorar la cualidad de las reglas que tenía. Su exclamación *Ars sine scientia nihil est* parece anunciar el nacimiento de una nueva era de la arquitectura, pero para Mignot significaba que las cosas no se hacían de acuerdo con su libro de

construir grandes estructuras apilando, uno sobre otro, pequeños bloques de piedra. El estilo, o los detalles de determinadas partes de la estructura, o el tamaño, están aquí fuera de lugar; las pequeñas piedras se disponen geométricamente para que sean estables sometidas a las fuerzas de compresión debidas a su propio peso, puedan adaptarse a las inevitables deformaciones provocadas por los movimientos de las cimentaciones, y puedan resistir las cargas de viento y los terremotos.

Con intención de aclarar las ideas, se ha expuesto la teoría en relación con el comportamiento del arco adovelado, pero las conclusiones definitivas se aplican a cualquier tipo de fábrica. Los conceptos esenciales que se derivan de los teoremas plásticos son, por una parte, los de empuje y, por otra, los de agrietamiento. Si se pueden encontrar empujes dentro de la estructura, ésta es segura, en un sentido positivo, a pesar de que se haya agrietado y deformado para adaptarse a las condiciones exteriores. A su vez, empujes y grietas dependen de la geometría de la estructura y, si se analizan los secretos de los canteros medievales, se encuentra que son, precisamente, reglas geométricas. Se trataba, en efecto, del tipo correcto de reglas a las que se llega empíricamente como resultado de la experiencia, y que fueron recogidas por escrito durante los siglos XII y XIII.

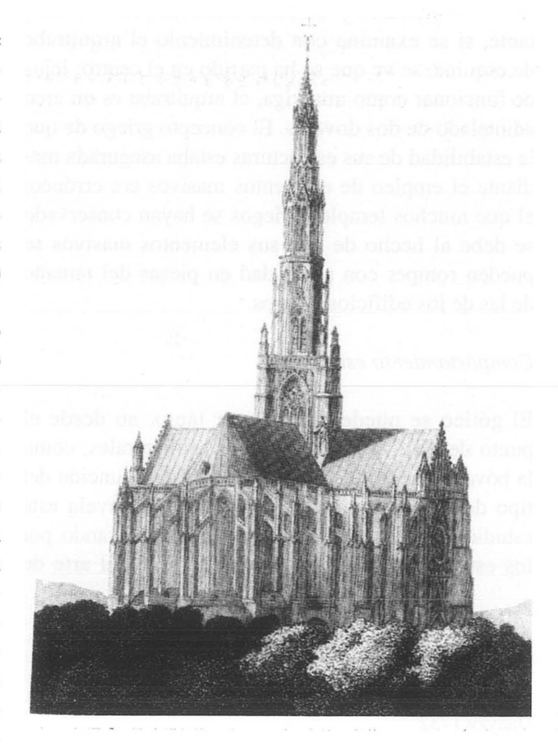


Figura 15.24
Catedral de Beauvais tal y como se terminó en 1569

reglas. La «normativa de edificación» es peligrosa; una vez que se han escrito las reglas, y se han olvidado las razones que las motivaron, el proyectista corre el peligro de intentar construir estructuras que, de hecho, no son capaces de sostenerse; los hundimientos de fábricas medievales se pueden equiparar a los de estructuras de acero y hormigón del siglo XX. En el mejor de los casos, las recetas empíricas serán relegadas por cualquier teoría nueva preparada para analizar, de forma continua, sus propios fundamentos. El primer hundimiento de Beauvais en 1284, en una época en la que el gótico clásico había sido perfeccionado y codificado, puede señalar oportunamente el amanecer del Renacimiento.

Lecturas recomendadas

Existe un gran número de tratados generales sobre el gótico. A continuación se citan algunas obras a las que, o bien se ha hecho referencia en el texto, o bien pueden considerarse de interés.

L. Benouville, «Etude sur la Cathédrale de Beauvais». *Encyclopédie d'Architecture,* 4th series, vol. 4 (Paris: 1891,1892): 52-54, 60-62,68-70.

A. Choisy, *Histoire de l'Architecture*, 2 vols. (Paris: 1899).

C.A. Coulomb, «Essai sur une application des règles de *maximis & minimis* à quelques problèmes de statique, relatifs à l'Architecture», *Mémoires de Mathématique & de Physique, présentés à l'Academie Royale des Sciences par divers Savans* 7 (1773), 343-382.

J. Fitchen, *The Construction of Gothic Cathedrals* (Oxford: 1961).

P. Frankl, *The Gothic, Literary Sources and Interpretations Through Eight Centuries* (Princeton: 1960).

Galileo, *Discorsi...intorno à due nuove scienze...*, (Leida: 1638), traducido al inglés por H. Crew y A. de Salvio (New York: 1952).

J. Guadet, *Eléments et Théorie de l'Architecture*, 4 vols (Paris).

E. E. Viollet-le-Duc, *Dictionnaire raisonné de l'Architecture française du XI^e^ au XVI^e^ siécle*, 10 vols. (Paris: 1858-1868).

Una bibliografía completa para el arco de fábrica se da en J. Heyman, *Coulomb's Memoir on Statics* (Cambridge: 1972).

Un análisis de los problemas de la restauración se efectúa en J. Heyman, «The strengthening of the West Tower of Ely Cathedral,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 60 (1976), 123-147.

16

La restauración de las fábricas: principios estructurales

Las grandes estructuras de fábrica precisan vigilancia y mantenimiento más o menos continuos, no para verificar su estabilidad (puesto que son extremadamente estables), sino para asegurarse de que la piedra no esté excesivamente alterada por la acción de la intemperie, de que el agua no penetre, de que las grietas no continúen abriéndose, etc... Los pequeños defectos «cosméticos» se remedian habitualmente de inmediato, pero alguna que otra vez (y esto parece producirse con un intervalo de cien años) se emprenden restauraciones estructurales más considerables. En Inglaterra, por ejemplo, muchas iglesias importantes fueron reparadas durante la segunda mitad del siglo XIX por George Gilbert Scott; fue más o menos en esta época cuando Viollet-le-Duc trabajaba en Francia. El final del siglo XX es testigo asimismo de numerosas restauraciones.

Ni Viollet-le-Duc ni Scott se contentaron con reemplazar la fábrica en mal estado. Ambos emprendieron amplios trabajos de construcción, y Viollet-le-Duc dejó constancia de su experiencia y comprensión del comportamiento estructural de los edificios en muchos de los artículos de los diez volúmenes de su *Dictionnaire raissoné*. En cierto sentido, el comportamiento estructural de la fábrica es muy simple; por otro lado, el arquitecto o ingeniero que se enfrenta a la restauración de una gran catedral puede llegar a desear que las soluciones que le sugiere su sentido común se apoyen sobre una base más científica. El presente artículo no aporta nuevas conclusiones, y desde luego ninguna que hubiera preocupado a Scott o Viollet-le-Duc, sino que trata de analizar la posible forma de construir dicha base científica.

ANÁLISIS DE EDIFICIOS DE FÁBRICA

Es a la vez prudente y práctico considerar un edificio de fábrica como un conjunto de simples piedras a hueso, algunas labradas y otras no, colocadas unas encima de otras formando una estructura estable. El mortero pudo usarse para llenar los intersticios, pero si inicialmente era débil, con el tiempo se habrá deteriorado, y no puede suponerse que contribuya a aumentar la resistencia de la construcción. La estabilidad del conjunto queda, de hecho, asegurada por la compactación de los diversos elementos bajo la acción de la gravedad; existirá un estado general de compresiones, que sólo admitirá, sin embargo, tracciones débiles.

En particular, la forma de la construcción se mantendrá por el aparejo entre los elementos; en el caso de piedras escuadradas, si existiera cualquier tendencia al deslizamiento las fuerzas de rozamiento actuarían en dichas caras. Por tanto, las fuerzas verticales de compresión actúan como una especie de «pretensado» de la fábrica, manteniendo la estabilidad general, y permitiendo que los esfuerzos oblicuos internos se transmitan sin causar tracciones ni deslizamientos.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The restoration of masonry: structural principles,» *Architectural Science Review* 20 (1977): 35-37. Traducción de Jorge Conde Conde.

Es bastante fácil estimar el orden de magnitud de los esfuerzos de compresión procedentes del peso propio del material. La tensión en la base de un muro simple de espesor constante debida al peso propio es *ph*, siendo *p* el peso específico del material y *h* la altura del muro. Resulta interesante comparar esta tensión debida al peso propio con la resistencia de rotura a compresión de la piedra. En un cálculo aproximado (que, como veremos, es más que suficiente) una piedra de calidad media puede presentar una resistencia de rotura a compresión de unos 40.000 kN/m^2, mientras que su peso específico ronda los 20 kN/m^3. La altura *h* para la que el muro rompe por aplastamiento en la base es de 2.000 m. Si las tres cuartas partes de la base estuvieran huecas por ventanas, arcadas, etc., la porción restante de muro aún podría soportar una altura de 500 m, un orden de magnitud muy superior al habitual en construcción.

Si se comparan estos cálculos con la resistencia de rotura a compresión de la piedra se verá que las cifras implican un coeficiente de seguridad muy elevado. En efecto, en los elementos más cargados de los antiguos edificios de fábrica, la tensión media no supera 1/10 de la resistencia a rotura y, de hecho, la mayor parte de la estructura portante está trabajando a menos de 1/100 de dicha resistencia. Las plementerías y los elementos secundarios estarán trabajando con un nivel de tensiones de alrededor de 1/1000 de la resistencia a rotura. Benouville,[1] en su análisis de la catedral de Beauvais, quedó asombrado al comprobar que ninguna tensión de las calculadas superaba los 13 kg/cm^2 (unos 1.300 kN/m^2).

Aunque los cálculos realizados nos dan únicamente un orden de magnitud, se pueden extraer de ellos algunas conclusiones significativas. Un primer punto de menor importancia se refiere al nivel de las tensiones «de fondo». Aparentemente, un pequeño pretensado a compresión es suficiente para descartar el riesgo de deslizamiento y pérdida de cohesión de la fábrica. Si el ingeniero o arquitecto desea consolidar artificialmente la estructura, por ejemplo mediante el postesado de cables horizontales, le resultará útil tener un nivel de referencia con el que comparar su tensado.

Una conclusión más importante se deriva de los cálculos del orden de magnitud. Si estos cálculos señalan bajos niveles *medios* de las tensiones entonces la teoría estructural de las fábricas entra a formar parte de la teoría más amplia del análisis plástico.[2] Las hipótesis del cálculo plástico son bien conocidas, y no precisan ser expuestas aquí en detalle: en lo que nos concierne, la exigencia de pequeñas deformaciones implica la ausencia en la estructura de elementos esbeltos (como columnas o muros delgados), que puedan llegar a pandear. En estas condiciones, es aplicable el primer teorema del análisis límite, el potente «teorema de la seguridad». En términos sencillos este teorema dice que si es posible encontrar un sistema interno de tensiones en equilibrio con la cargas exteriores, y este sistema es satisfactorio en el sentido de que no hay peligro de fallo por aplastamiento del material, entonces, existe la completa seguridad de la estructura en su conjunto es segura. El análisis estructural de la fábrica así considerado se aleja notablemente del análisis elástico convencional. En particular se elimina el cálculo de variables «hiperestáticas» a través de ecuaciones de compatibilidad: por ejemplo, no hay que dilucidar condiciones exactas de cimentación para extraer desplazamientos que posteriormente emplear en los cálculos. El ingeniero o arquitecto no intenta hallar el estado «real» de la estructura. Necesita tan sólo examinar un estado de equilibrio, estando autorizado, e incluso siendo animado, a buscar un estado favorable de equilibrio — por ejemplo, uno en el cual las tensiones se distribuyan homogéneamente en la fábrica, en lugar de ser altas en unas zonas y bajas en otras. (Sin embargo, no habría necesidad de comprobar que las tensiones «reales» están distribuidas uniformemente.)

LA TEORÍA PLÁSTICA DE LAS FÁBRICAS

Surge así uno de los principios básicos de la restauración de las fábricas: asegurarse de que tanto la estructura en su conjunto como cada una de sus partes presentan un estado coherente con las hipótesis de la teoría plástica de las fábricas. Esta aparente inversión del proceso científico (en el cual habitualmente la teoría explica la práctica, y no como aquí, donde es la práctica la que debe adaptarse a la teoría) no es en realidad mas que buen sentido constructivo. De manera análoga, en la construcción metálica se especificarían unas mínimas características de resistencia y ductilidad para el material. Una analogía más exacta se daría en el caso de las estructuras de hormigón armado, en las que se especifica con precisión la composición del material.

Como ejemplo de aplicación de este principio, consideremos un sencillo muro medieval de fábrica. Dicho muro, de 1 a 2 m de espesor y aparentemente macizo, se compone habitualmente de dos hojas exteriores o paramentos (de hasta 200 mm) de sillería de buena calidad, con un relleno de cascote y mortero. En la restauración de un muro de este tipo, hay que asegurarse de consolidar convenientemente el relleno, si es necesario, para que soporte con holgura las tensiones de equilibrio calculadas. Si este es el caso, las tensiones reales en el relleno carecen de importancia; el técnico que analiza las tensiones no está obligado a distribuirlas de acuerdo con una noción hipotética de rigidez relativa de las caras superficiales y el relleno.

Habiéndose asegurado que el material estructural se ajusta a las hipótesis del cálculo plástico, el proyectista puede ya examinar otras consecuencias derivadas de dicha teoría. Estará trabajando enteramente con sistemas de fuerzas dentro de la fábrica, sin preocuparse en general de la magnitud real de las tensiones (por supuesto, hay ciertos elementos de una estructura donde las tensiones deben ser calculadas: los pilares principales del crucero de una catedral, por ejemplo). Pero la verdadera preocupación está en encontrar sistemas de fuerzas que estén contenidos en el interior de la fábrica. Si las fuerzas se vieran obligados a abandonar los límites de la fábrica (por ejemplo, una línea de empujes puede verse obligada a salir de un arbotante mal proyectado), esto implicaría la aparición de tracciones en la piedra, y como ya se ha señalado, es una hipótesis realista suponer que las fábricas son incapaces de resistir esfuerzos de tracción.

Por tanto, el ingeniero o arquitecto buscará sistemas de fuerzas de compresión en equilibrio con las cargas exteriores, y estas fuerzas, por definición deben encontrarse en el interior de la fábrica. Lo importante no es el cálculo del nivel de tensiones, sino que la fábrica posea la *forma* correcta. El problema, de hecho, se convierte en una cuestión de geometría. (Como ejemplo sencillo, se habrá observado que las tensiones debidas al peso propio en un muro uniforme no dependen del espesor del muro. Si un muro esbelto vuelca ante la acción del viento es porque en la base no puede encontrarse ningún campo de tensiones de compresión que equilibre la acción de la gravedad y la del viento, ni siquiera una carga lineal a lo largo del borde del muro con las correspondientes tensiones infinitas.) De acuerdo con la teoría plástica, el proyecto y análisis de las estructuras de fábrica es más un problema de geometría que de resistencia.

El segundo principio de la restauración de las fábricas se refiere, pues, a la geometría. Por el teorema de la seguridad, si un edificio se ha mantenido en pie durante un tiempo ello es garantía suficiente de que su geometría es satisfactoria. Se debe proceder con cuidado asegurándose de que no hay indicios de progresión en la deformación; la geometría de la estructura tiene que ser estable.

Los dos principios enunciados como derivados de la teoría plástica simple, es decir, que en una estructura con relleno deficiente éste ha de ser consolidado, y que la geometría debe ser estable, pueden resultar tan evidentes que hagan parecer absurda la aplicación de una teoría de altos vuelos. Sin embargo, algunas de las conclusiones que pueden deducirse de la teoría plástica no son quizá tan obvias. Ya se ha hecho alusión a una de ellas: que la mera existencia de una estructura de fábrica es prueba suficiente de que dicha estructura es totalmente segura. El período mínimo durante el cual una estructura debe permanecer en pie es de unos minutos, o quizá siendo más realistas, para permitir la compactación de un mortero de fraguado lento, pongamos un año. Si una estructura existente muestra signos de distorsiones y agrietamientos, pero no de deformaciones en curso, esta estructura deformada es totalmente segura. La mera presencia de antiguas grietas no es, en sí misma, alarmante; es más, como ya hemos afirmado en otra parte,[3] es lógico esperar que se produzcan ciertos agrietamientos cuando una estructura de fábrica se ha adaptado a su entorno. Un estudio de dicha adaptación suele proporcionar indicaciones precisas sobre las razones de la presencia de grietas.

El problema del asentamiento

Si consideramos una escala de tiempo de generaciones más que de años, en el terreno que soporta la estructura se produce un cambio de las condiciones de contorno. Hasta el momento nuestras conclusiones se han basado únicamente en la consideración de la fábrica; sin embargo, asientos debidos por ejemplo a la consolidación del suelo bajo la cimentación, pueden tener consecuencias en la fábrica. Se trata aquí de conocer el significado de lo que en el análisis

convencional de estructuras se conoce como «pequeñas deformaciones». La hipótesis habitual en la teoría de estructuras es que las deformaciones son lo bastante pequeñas como para no afectar significativamente a las ecuaciones de equilibrio y, por consiguiente, los cambios de la geometría global pueden ignorarse. Como se ha visto, es precisamente el problema de la geometría global el que tiene una importancia básica en la estabilidad de la fábrica.

El tipo de cambios en la geometría que provoca un asentamiento puede verse examinando el comportamiento de las grandes torres sobre cruceros. La inspección de las hiladas de fábrica originariamente horizontales en la nave colindante, el coro y los cruceros pondrá de manifiesto distorsiones más o menos amplias, que indican asentamientos de la torre de hasta 300 mm. Es tan elemental como evidente: los cuatro pilares que soportan la torre, sometidos a fuertes tensiones, producirán también tensiones elevadas en el terreno que los soporta. Es bastante corriente que la totalidad de la superficie en planta de la torre precise una tensión media de 1.000 kN/m^2; dicha tensión es lo bastante alta como para producir inevitablemente consolidación y asentamiento, pero no tan alta como para afectar a una arcilla dura.

Puede entonces esperarse que una torre asiente en relación con las partes colindantes de la estructura; en mecánica del suelo, la escala de tiempo para la consolidación, es decir, para alcanzar un equilibrio efectivo, es más bien de una generación, que de un año. Si los asientos son irregulares, o conducen a cambios notables en la geometría de la torre, puede ocurrir que ésta se hunda. Por otra parte, pasado este período de peligro y si no se producen cambios en las condiciones generales del suelo, como por ejemplo los que produciría una alteración del nivel freático, la torre puede considerarse segura desde el punto de vista estructural.

RESTAURACIÓN DE LA CATEDRAL DE ELY

Esta «regla de la generación» abarca un amplio número de hundimientos tanto en Inglaterra como en otros países. Por ejemplo, los grandes derrumbamientos ocurridos en Winchester, Gloucester, Worcester y Beauvais (en dos ocasiones), todos ellos al poco tiempo de haberse finalizado los trabajos. Hay uno o dos ejemplos de supervivencia durante períodos más largos; la torre medieval de Chichester, pongamos por caso, no se hundió hasta 1861, y la torre del crucero de Ely se mantuvo en pie durante dos siglos antes de derrumbarse en 1322. El caso de Ely puede explicarse quizá por los efectos del cambiante nivel freático de los *fens* (marjales pantanosos), existiendo pruebas del inicio de trabajos de drenaje en el siglo pasado. Desde luego, un derrumbamiento inexplicado de menor importancia en Ely (parte del crucero norte en 1699) se produjo medio siglo después del drenaje principal de los *fens*.

Por regla general las torres de crucero que aún permanecen en pie, aunque pueden mostrar asentamientos grandes y relativamente irregulares, no dan señales de que se haya producido movimiento alguno en los últimos siglos. En estos casos, la estrategia sugerida al restaurador por la teoría plástica es dejarlas como están. Hay numerosos ejemplos concretos de aplicación con éxito de este principio de «no intervención»; los responsables pueden haberse preocupado, pero al menos no despreciaron su intuición emprendiendo inútiles labores de refuerzo. Dos de estas estructuras, (sobre las que hay información disponible[4]) son los puentes del Clare College, Cambridge, y el de Telford en Over; ambos continúan soportando las cargas para las que fueron concebidos (y aún mayores) hasta la fecha.

En resumen, la restauración de las estructuras de fábrica se rige por los siguientes principios, que se han usado como guía en los recientes trabajos de restauración en la catedral de Ely[5] (figuras 16.1, 16.2 y 16.3):

1. Las fábricas sueltas y los rellenos de cascote o mampostería tienen que ser consolidados hasta alcanzar una resistencia suficiente. No es necesario alcanzar la resistencia de la fábrica mejor aparejada, pero sí una lo bastante alta como para que las tensiones medias de la estructura sean en comparación pequeñas.
2. Si hay evidencia de movimientos continuos de la estructura, o se sabe que existen acciones permanentes capaces de provocar dichos movimientos en el futuro (como los empujes de las armaduras de cubierta), entonces es preciso tomar medidas para estabilizar la geometría del conjunto.
3. Si no hay evidencia de dichos movimientos, aunque pueda existir una deformación permanente por causas desaparecidas hace tiempo (por ejemplo, asientos de la cimentación), no es necesario emprender ningún trabajo de restauración.

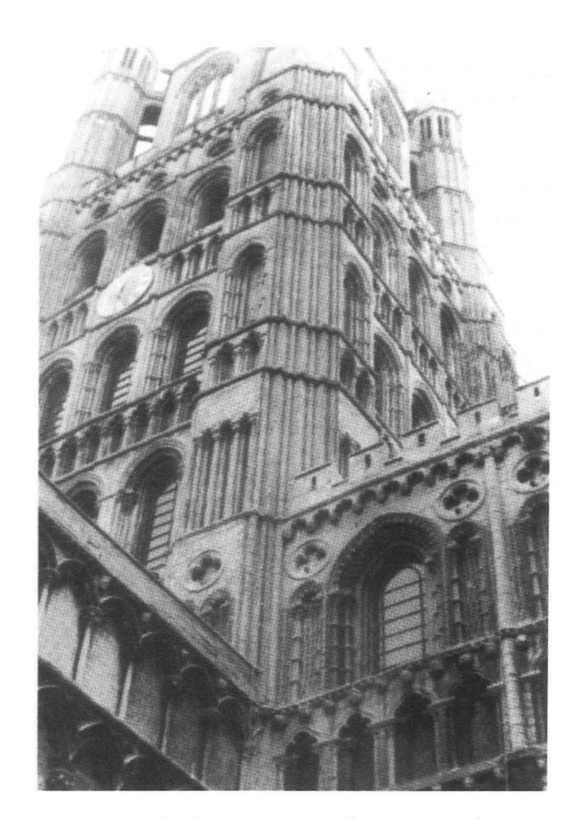




Figura 16.3
Cosido en la catedral de Ely. Inserción de una barra de acero inoxidable. El zunchado del siglo XIX, situado inmediatamente debajo (que se encontraba en estado avanzado de corrosión), ha sido retirado

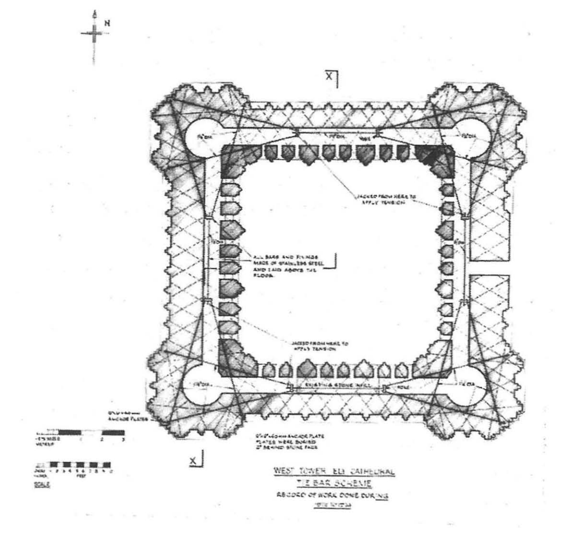


Figura 16.1 (*arriba izquierda*)
La torre oeste de la catedral de Ely, recientemente consolidada

Figura 16.2 (*izquierda*)
Planta seccionada de la torre oeste de la catedral de Ely. Las medidas de consolidación incluyeron: (1) el cosido con gran número de barras de acero inoxidable en diagonal, y (2) la instalación de anclajes postesados masivos de acero inoxidable

17

La rehabilitación del puente de Teston

El puente de Teston se sitúa en la B2163, sobre el río Medway a unos cinco kilómetros aguas arriba de Maidstone, y a ocho del trecho de máxima crecida. Posee seis arcos, tres de los cuales salvan el cauce habitual del río; los otros tres se sitúan sobre el terreno de aluvión del río, dos en la orilla oeste y uno más pequeño en la este (figura 17.1). Los tres arcos sobre el río se construyeron en el siglo XIII, mientras que los otros datan del siglo XIX. El puente está calificado como monumento histórico de grado I.

En 1973 el Departamento de Carreteras y Transportes de la Junta del Distrito de Kent realizó una inspección exhaustiva del puente, según la Instrucción Técnica BE 3/73 del Ministerio de Transportes,[1] cuya génesis ha sido discutida en otro lugar.[2] La estimación provisional de carga a partir del nomograma de la BE 3/73 fue de 57 t para las dimensiones del arco mayor, que teniendo en cuenta diversos factores (material, juntas, condiciones) quedó reducida a una carga axial de unas 10 t.

Más tarde, ese mismo año el río experimentó una crecida que sumergió los arcos completamente, como es habitual. Una nueva inspección realizada a comienzos de 1974 puso de manifiesto nuevos daños en el puente. Teniendo en cuenta todos los factores, la carga axial final se redujo a 6 t. (El reciente hundimiento en Tours es un ejemplo de puente debilitado por saturación con agua de las crecidas.)

Investigación geotécnica

En 1976 el puente de Teston se cerró al tráfico, y la B2163 se desvió por el puente de Bailey situado aguas arriba. En mayo de 1976 se realizaron siete calas a través de las pilas y estribos para obtener información sobre el subsuelo, y sobre el relleno y su estado; más tarde se realizaron nueve perforaciones para examinar el trasdosado de los arcos de fábrica y determinar su espesor en diversos puntos.

Los ensayos indicaron un firme de arcilla dura como base de un estrato variable de grava mixta. Las pilas del puente (excepto el estribo este) parecen estar cimentadas sobre esta grava. En la orilla este la grava se halla cubierta por arcillas de aluvión.

El coeficiente de seguridad respecto a la carga última de las pilas sobre el firme de arcilla Weald se estimó igual o superior a 2,5, con la excepción del arco más oriental, donde se estimó sólo de 1,85 para cargas permanentes, reducido a 1,6 con la sobrecarga. Además, el coeficiente de seguridad del estribo del arco este sería cercano a 1 si estuviese cimentado sobre arcilla de aluvión.

Impreso y traducido, con autorización de los autores, del original «The rehabilitation of Teston Bridge,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 68 (1980): 489-97. Traducción de Jorge Conde Conde.

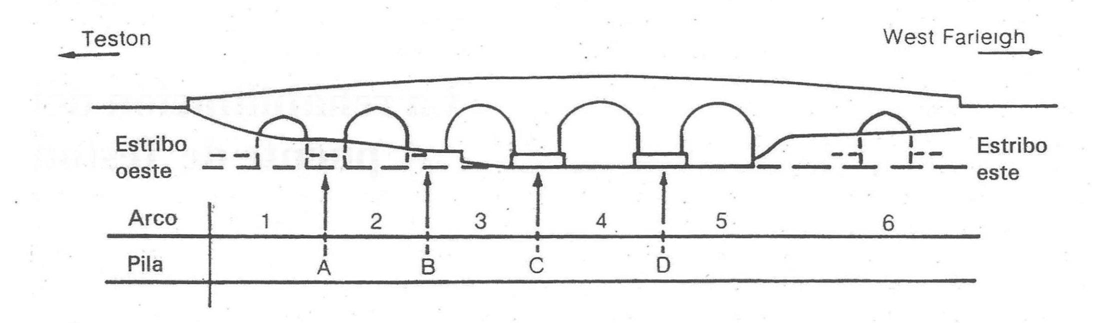


Figura 17.1

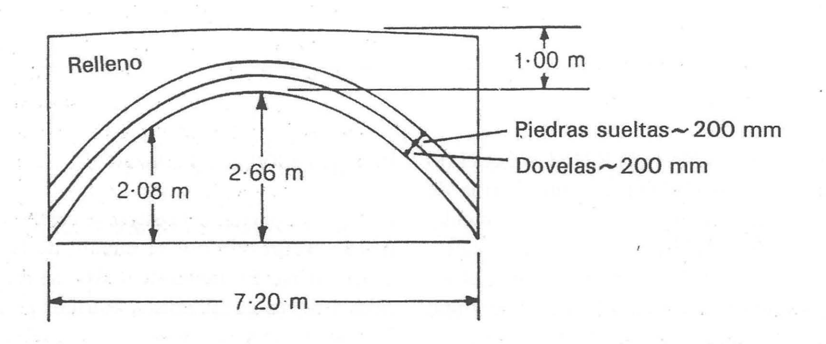


Figura 17.2

Teniendo en cuenta la edad del puente es razonable suponer que la consolidación de la arcilla Weald es total. La sobrecarga de cálculo (véase más adelante) es relativamente pequeña, comparada con el peso del puente (menos del 10 % en las pilas), por lo que las cargas adicionales debidas al tráfico actual no deberían haber causado nuevos asientos por consolidación.

La relación entre sobrecarga y carga permanente es mayor en los extremos, pero incluso en la orilla este, donde se encontró una zona de aluvión blando, el asiento máximo debido a la sobrecarga se estimó inferior a 25 mm. Sin embargo, los comparativamente bajos coeficientes de seguridad de las cimentaciones en esta zona aconsejaron que la sobrecarga al este del arco 5 fuera soportada por una losa de hormigón armado sobre pilotes.

No se propuso ninguna intervención al oeste de este punto, ya que los coeficientes de seguridad se consideraron adecuados. Sin embargo, se hizo necesario recrecer la rosca de los arcos de fábrica para soportar la sobrecarga impuesta.

CÁLCULOS RELATIVOS A LOS ARCOS

Las calas indicaron que los cañones de los arcos principales estaban formados por dovelas de 200 a 250 mm de espesor, trasdosadas con una capa de igual espesor de piedras sueltas o ligeramente unidas por un mortero. Como suele ser habitual, los arcos visibles en los alzados no son una guía para conocer el espesor real de las bóvedas. Por regla general el relleno sobre los arcos consistía en una mezcla de arcilla arenosa con una pequeña cantidad de grava, y en ocasiones mampuestos de piedra caliza. La figura 17.2 da las dimensiones básicas del arco principal, para el que se han realizado los cálculos.

La Junta del Distrito de Kent especificó cuatro hipótesis de carga, satisfechas las cuales el puente podría abrirse al tráfico sin restricciones. De estas cuatro hipótesis, la más crítica resultó ser una carga axial de 11 t. A efectos del análisis se supone a continuación que dicha carga axial actúa como una línea de carga a todo lo ancho del puente. De acuerdo con el método ya explicado en otro lugar,[2] esta carga lineal se supone actuando en el trasdós del arco, sin que exista dispersión alguna a través del relleno.

Si consideramos que el ancho total del puente es de unos 3,5 m, entonces una carga lineal de unos 110 kN, más un 25% para tener en cuenta el impacto, equivale a una carga repartida de unos 40 kN/m. A efectos de una valoración rápida[2] las dimensiones del arco central son (figura 17.2):

$$L = 7.200 \text{ mm}$$
$$h_c = 2.660 \text{ mm}$$
$$h_q = 2.080 \text{ mm}$$
$$h_0 = 1.000 \text{ mm}$$

de donde

$$\alpha = 0{,}78 \qquad (1)$$
$$\beta = 0{,}376$$

El peso específico del material del puente (arco más relleno) se consideró como 16,7 kN/m^3, de modo que $(1/6)\gamma L h_c = 53{,}3$ kN/m y $p = 40/5{,}3{,}3 = 0{,}75$. Así, de la tabla 18.1 de Heyman[2] (véase pág.263 más adelante) el valor de ϵ necesario para la estabilidad matemática del arco central es 0,122. El espesor vertical t del arco a un cuarto de la luz debería ser como mínimo $0{,}122 \times 2.660 = 325$ mm, que corresponde a un espesor radial de unos 280 mm.

Para las dimensiones observadas, el espesor total antes de la restauración, dovelas más trasdosado de piedras sueltas, podría ser de unos 400 mm. El factor geométrico de seguridad para una carga lineal de 40 kN/m sería entonces de $400/280 = 1{,}43$. Alternativamente, el valor de ϵ para un espesor de arco de 400 mm (equivalente a un espesor vertical de 465 mm a un cuarto de la luz) es de 0,175, y la tabla 18.1 de Heyman[2] da para los valores de α y β en las ecuaciones (1), un valor de $p = 1{,}35$, de donde $P = 1{,}35 \times 53{,}3 = 72$ kN/m.

El factor geométrico de seguridad de 1,43 parece bajo, lo que viene confirmado por el valor de $P = 72$ kN/m; aparentemente una carga axial de unas 20 t hubiera producido el hundimiento del arco central. Sin embargo, los resultados obtenidos hasta ahora contienen las aproximaciones inherentes al «método rápido», por lo que se realizó un análisis más preciso del comportamiento del arco central.

A este fin la luz del arco (7,20 m) se dividió en doce rebanadas de 0,6 m cada una; el arco es levemente asimétrico, usándose dimensiones medias para calcular los pesos que se muestran en la figura 17.3. Las cargas se calcularon para un metro de ancho de puente, con un peso específico constante para todo el material de 16,7 kN/m^3. La tabla 17.1 contiene las cargas y sus momentos correspondientes.

Tabla 17.1

Punto	Carga, kN	Σ cargas, kN	Distancia, m	Producto, kNm	Σ productos, kNm
O′		0	0,6	0	0
A′	25,3	25,3	0,6	15,18	0
B′	19,3	44,6	0,6	26,76	15,18
C′	15,2	59,8	0,6	35,88	41,94
D′	12,5	72,3	0,6	43,38	77,82
E′	10,8	83,1	0,6	49,86	121,20
F	10,0	93,1	0,6	55,86	171,06
E	10,8	103,9	0,6	62,34	226,92
D	12,5	116,4	0,6	69,84	289,26
C	15,2	131,6	0,6	78,96	359,10
B	19,3	150,9	0,6	90,54	438,06
A	25,3	176,2	0,6	105,72	528,60
O					634,32

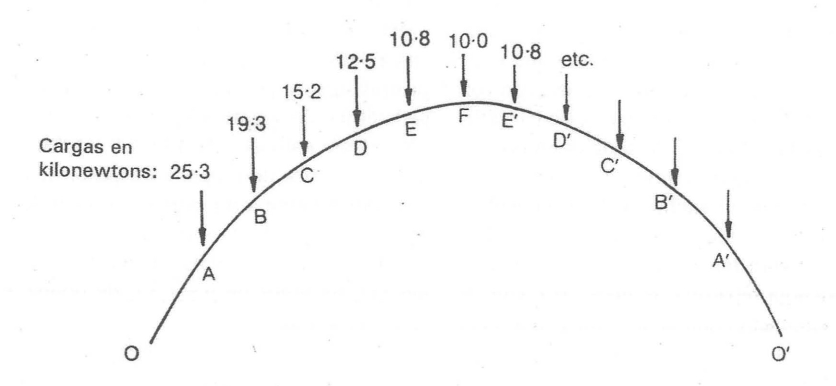


Figura 17.3

Punto	O	A	B	C	D	E	F
Perfil del intradós, m	0	1,03	1,65	2,08	2,37	2,56	2,66
$(1/d) \times$ espesor vertical de la rosca	2,638	1,618	1,313	1,161	1,077	1,028	1,004

Tabla 17.2

La tabla 17.2 da el perfil del intradós del arco, y el espesor vertical de la rosca del arco como fracción del espesor radial constante d. Se trata de encontrar un espesor d que permita al arco soportar justo una carga puntual P, además del peso propio del puente.

El análisis exacto del arco se efectúa de la siguiente manera. La figura 17.4 muestra una carga puntual P actuando sobre la sección D del arco (no a un cuarto de la luz; la sección más crítica en este arco resultó ser D, y no C, lo que se comprobó mediante tanteos en los tres puntos, C, D, y E). El arco de la figura 17.4 tiene un espesor mínimo d de manera que se encuenta en una situación límite, a punto de colapsar por formación de rótulas en A, D, F y O´. La localización de estas cuatro secciones es nuevamente fruto de un proceso de tanteos, que no resulta en absoluto largo; las secciones D, F y O´ se localizan inmediatamente, y encontrar la posición de A es casi igualmente rápido. Como se verá más adelante, la validez del mecanismo de la figura 17.4 se confirma dibujando con precisión la línea de empujes (línea de trazos en la figura 17.4).

La línea de empujes sale del arco en O´ hacia el estribo, y las dos componentes del empuje en este punto se denominan V y H en la figura 17.4. El análisis consiste simplemente en tomar momentos sucesivamente en las articulaciones F, D y A de todas las cargas situadas a la derecha del punto considerado. Se utilizan las tablas 17.1 y 17.2 para llegar a las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} &\text{F: } 3{,}6V-(2{,}66-2{,}638d)H &&= 171{,}06 \\ &\text{D: } 4{,}8V-(2{,}37+1{,}077d-2{,}638d)H &&= 289{,}26 \qquad (2) \\ &\text{A: } 6{,}6V-(1{,}03-2{,}638d)H-1{,}8P &&= 528{,}60 \end{aligned}$$

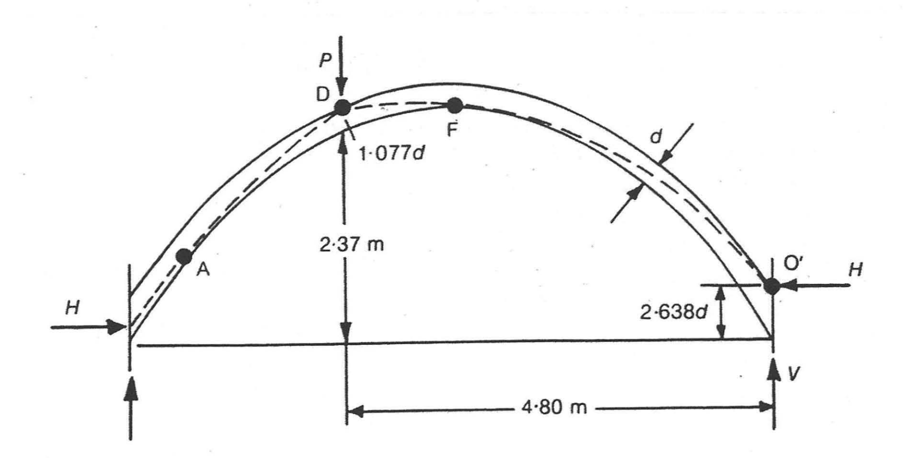


Figura 17.4

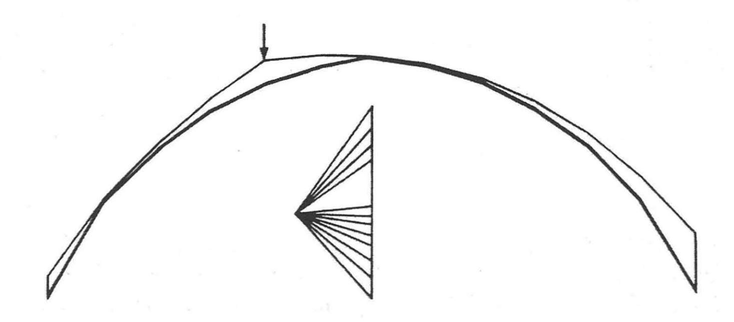


Figura 17.5

(Los datos de la tabla 17.2 se han incorporado a la figura 17.4 para poder tomar momentos respecto al punto D.) Las incógnitas V y H pueden despejarse de las ecuaciones (2) quedando

$$d(0{,}1112P+9{,}032)=0{,}0668P+0{,}556 \qquad (3)$$

Y para $P=40$ kN se obtiene un valor d de 0,239 m.

La corrección de este valor debe comprobarse dibujando la línea de empujes, para confirmar que en todo punto se encuentra situada dentro de la fábrica (esto es, que las cuatro articulaciones supuestas A, D, F y O′ son correctas). Para $P=40$ kN y $d=0{,}239$ m, las ecuaciones (2) nos dan $H=86{,}4$ kN y $V=96{,}2$ kN. Se han utilizado estos valores para construir con precisión la línea de empujes en la figura 17.5 (sólo se muestra el intradós del arco), confirmándose que un arco de espesor radial constante 0,239 m será justo estable bajo la acción de una carga lineal de 40 kN/m actuando en D.

Así, el espesor inicialmente estimado de 280 mm por el «método rápido» se ha visto reducido a 240 mm merced a un análisis preciso. La propuesta final para la restauración del puente se basó en un coeficiente geométrico de seguridad de 2; es decir, el espesor mínimo de 240 mm nos lleva a un espesor real de arco de 480 mm.

Los valores de V y H hallados indican que el empuje (inclinado) en el estribo tiene un valor de unos 150 kN/m; considerando un espesor de 500 mm, este empuje nos conduce a una tensión media de 300 kN/m^2. Como suele ocurrir en estructuras de este tamaño, las tensiones son bajas, en este caso alrededor de la cuarta parte del valor admisible de Pippard[2] de 13 t/pie^2 (1.395 kN/m^2).

La segunda más crítica de las hipótesis de carga especificadas por la Junta del Distrito de Kent correspondía a un vehículo de cuatro ejes de 30 t de peso total y de unos 5 m de longitud. Esta carga se investigó mediante la misma combinación de métodos gráficos y analíticos usada anteriormente. En ecuaciones equivalentes a la (2), por ejemplo, en lugar del término $1{,}8P$ existiría una contribución de los cuatro ejes, y entonces la construcción gráfica se realiza como se muestra en la figura 17.5. Debido a la longitud del vehículo, 5 m, en comparación con la luz de 7,2 m, esta sobrecarga está más «equilibrada» que la carga puntual, y la posición más crítica exigiría un espesor radial mínimo de 190 mm, a comparar con el de 240 mm antes calculado.

TRABAJOS DE RESTAURACIÓN

Las principales reparaciones estructurales llevadas a cabo incluyeron la estabilización del estribo este, la consolidación y estabilización de las pilas, y el refuerzo y reposición de los arcos. Además, los trabajos superficiales incluyeron la restauración y renovación de la fábrica, la reparación de los petos, la impermeabilización del relleno y la disposición de una nueva calzada.

El estribo este

La calzada reconstruida entre el arco 5 y el muro este del arco 6 (figura 17.1) se apoyó sobre pilotes. Como era previsible encontrar obstáculos en el interior de los estribos, el sistema de cimentación Fondedile Pali-Radice a base de micropilotes de 220 mm de diámetro se consideró el más adecuado.

El arco 6 fue apeado sobre cimbras durante las perforaciones, pero no así el arco 5. Cada pila fue barrenada hasta una profundidad de 15 m pasando a través del relleno y las capas de aluvión y arcilla hasta alcanzar la arcilla Weald.

Refuerzo de las pilas

El trabajo en las pilas se encaminó por una parte a consolidar su construcción, y por otra a proporcionar masas estabilizadoras con vistas a la excavación y reparación de los arcos. Las restricciones impuestas por las autoridades fluviales marcaron el orden y extensión de cada operación en esta parte de la obra. Las primeras pilas en ser tratadas fueron C y D (figura 17.1), a ambos lados del arco principal 4. El relleno de las pilas se excavó unos 3,5 m hasta la línea de los arranques. Una vez terminada la excavación se vertió una capa de hormigón estructural de 350 mm de espesor entre los salmeres, como refuerzo permanente.

Las pilas fueron entonces «cosidas» antes de pasar a la siguiente operación. Se realizaron taladros verticales que perforaban la capa de hormigón y el relleno de la pila, hasta alcanzar la base. Estos orificios se inyectaron (usando un cemento sulfato-resistente), con intención de llenar en lo posible todos los huecos de las pilas.

El relleno de la excavación se realizó hasta alcanzar el nivel de las superficies existentes usando un hormigón aligerado para no aumentar la carga permanente de las cimentaciones. Después, se estabilizaron los tajamares mediante un cosido horizontal en diagonal, utilizando barras galvanizadas de 30 mm de diámetro, e inyectado en orificios de 75 mm de diámetro.

Las pilas sobre el terreno (A y B) se encontraban en mejores condiciones que las del río. No obstante, se consolidaron también por cosido.

Restauración de los arcos

Una vez consolidadas las pilas y vertido el hormigón en masa, se excavó el relleno de cada arco por turno. El trasdós del arco se limpió, inspeccionándose cada una de las piedras. Aquéllas con más

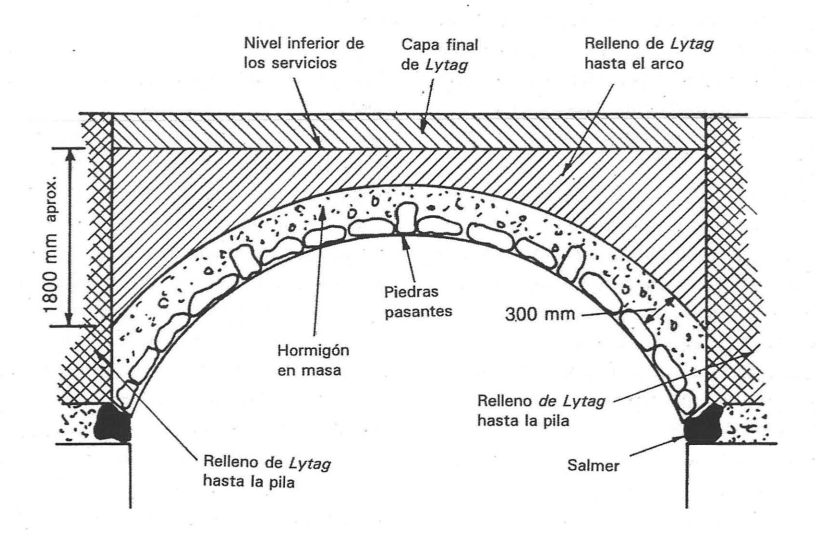


Figura 17.6

Figura 17.7

de una grieta se reeemplazaron usando piedras nuevas de Portland. Las piedras con una sola grieta pequeña o mediana se inyectaron con resina epoxy de baja viscosidad. Las piedras con una grieta grande se inyectaron con una mezcla de lechada de cemento.

Se descubrió que la rosca de los arcos tenía, por regla general, un espesor de 300 mm, aunque algunas piedras pasantes alcanzaban los 500 mm. Se recreció el arco hasta un espesor total de 600 mm, trasdosando una capa de hormigón estructural 30/20 (figura 17.6). Tras un curado de tres días, cada arco fue trasdosado con relleno de hormigón aligerado hasta el nivel de servicio. Se realizaron entonces las labores habituales de construcción de carreteras.

Conclusión

El puente de Teston ha sido restaurado con una alteración practicamente nula de su aspecto exterior, hasta alcanzar un estado en el que puede soportar cargas de pleno uso (figura 17.7). El control directo de los trabajos por la Sección de Construcción de Puentes del Condado se tradujo en una solución práctica y económica, dentro de los límites del presupuesto original, cuyo éxito se debe en gran parte al Director de Proyectos del Condado, Sr. L. Jeffery, y a su secretario de obras, Sr. J. Littlewood.

El estudio geotécnico fue realizado por Soil Mechanics Ltd., quienes asumieron también la responsabilidad de la asesoría de ingeniería. El Profesor Heyman dio consejo especializado sobre arcos de fábrica.

18

Estimación de la resistencia de los arcos de fábrica

En trabajos previos[1-3] se ha examinado el comportamiento de los arcos de dovelas, tanto en general como en su aplicación a ejemplos particulares. Este ensayo da los resultados de un método aproximado de cálculo, que permite hacer una valoración rápida de la resistencia de un arco de fábrica determinado. Como siempre, se supone que los elementos críticos del puente son los propios arcos; se supondrá que estribos y pilas son suficientemente robustos para resistir sin problemas las cargas y sobrecargas sobre el puente. (El fallo de un puente puede ser iniciado por una cimentación débil o también, como en el caso de Tours,[4] por causa de avenidas que puedan destruir la integridad de una de las pilas.)

Los problemas son determinar la seguridad de un arco de fábrica y, en particular, establecer valores seguros de la sobrecarga para un puente existente determinado. Es el problema último al que se enfrenta en definitiva el ingeniero local de puentes. Para auxiliarles en esta labor, el Ministerio de Transportes publicó en 1967 un memorándum técnico.[5] (Este memorándum difiere ligeramente del publicado en 1973[6]). Los orígenes de la citada obra se pueden referir a los trabajos realizados por Pippard.[7]

Pippard[8] señaló que una ligerísima separación entre los estribos de un arco de dovelas produciría «bisagras» o articulaciones entre algunas de las dovelas, y que la forma básica del arco, con tres vínculos estructurales hiperestáticos, se puede analizar con la hipótesis de que los extremos están articulados sobre los estribos. Esta simplificación es la primera de una serie hecha por Pippard para poder obtener valores razonables a partir de las variables estructurales; las hipótesis no siempre quedan explícitas, pero el cálculo abreviado que figura en la referencia 7 se puede reconstruir a partir de la referencia 9.

EL MÉTODO «ELÁSTICO» DE PIPPARD

El puente que se intenta calcular tiene una luz l y una flecha a (figura 18.1). La rosca del arco tiene un espesor d, y la superficie del relleno (de profundidad mínima h) es horizontal. A efectos de cálculo se sustituye el puente por la directriz del arco biarticulado de la figura 18.2, y se adopta la forma parabólica (Pippard no trabajó con otro tipo de perfil, y sus cálculos se reducen al caso $r_q/r_c = 3/4$ en la figura 18.1).

Pippard colocaba una carga concentrada W en la clave del arco. El momento flector M_x en una sección transversal se puede escribir en función del empuje H sobre los estribos, de valor desconocido; la energía de deformación U se puede expresar como

$$U = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_x^2}{2EI}\,ds \qquad (1)$$

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The estimation of the strength of masonry arches.» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 69 (1980): 921-37. Traducción de Fernando Inglés Musoles.

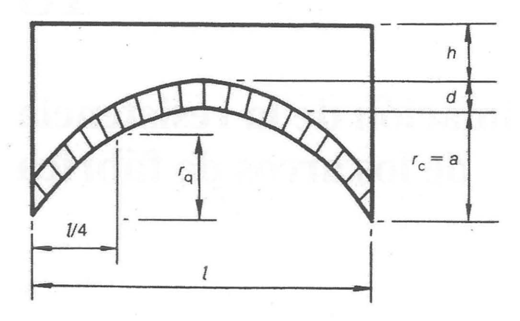


Figura 18.1

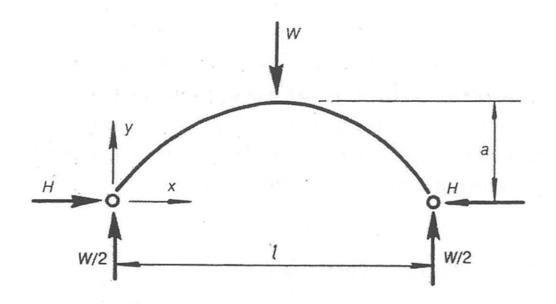


Figura 18.2

donde ds es un elemento diferencial de longitud del arco. De ese modo, el valor H viene dado por la solución de

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_x}{EI} \frac{\partial M_x}{\partial H}\,\mathrm{d}s = 0 \qquad (2)$$

Para simplificar la integral, Pippard supuso que la sección del arco varía de forma que

$$I = I_0 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{dx}} \qquad (3)$$

de modo que la ecuación (2) se convierte en

$$\int_0^{\frac{l}{2}} M_x \frac{\partial M_x}{\partial H}\,\mathrm{dx} = 0 \qquad (4)$$

La ecuación (3) implica que la sección del arco va aumentando desde la clave hasta los estribos.

De la solución de la ecuación (4) para el caso de carga de la figura 18.2 se deduce:

$$H_L = \frac{25}{128}\left(\frac{l}{a}\right)W \qquad (5)$$

y en consecuencia, el valor del momento flector en la clave del arco viene dado por

$$M_L = -\frac{7}{128}\,Wl \qquad (6)$$

El signo negativo indica que la línea de empujes está situada por encima del arco (momento flector que produce deformación hacia abajo). Las ecuaciones (5) y (6) son los resultados básicos utilizados por Pippard para determinar el valor seguro de la sobrecarga en un arco de fábrica; han sido obtenidas para un supuesto arco parabólico biarticulado, con sección transversal variable de acuerdo con la ecuación (3) y sometido a una sobrecarga puntual W en la clave.

Pippard señala que, en teoría, un arco es más débil cuando una carga puntual actúa en el cuarto de la luz que en la clave. No obstante, defiende como más adecuado el uso de los resultados basados en la carga central, sobre la base de la distribución de la carga desde la calzada hasta el propio arco a través del relleno. Si se adopta un ángulo convencional de 90° para la cuña de dispersión de la carga, el ancho efectivo del arco cuando la carga actúa en la clave será de $2h$; si la carga está situada a un cuarto de la luz, el ancho disponible de arco para transladarla será mayor.

En las ecuaciones (5) y (6) se deben combinar los empujes y momento flector resultantes del peso propio del arco y del relleno. Pippard supuso además que el ancho de puente a considerar es $2h$, (es decir, calcula el «nervio» contenido dentro del puente implicado, al menos en la clave, en la transmisión de la sobrecarga), que el relleno no tiene resistencia estructural, de modo que sólo transmite cargas verticales al arco, y que tiene el mismo peso específico γ que el material de la rosca del arco. Un posterior cálculo de la energía de deformación da entonces los valores del empuje y del momento flector en la clave como

$$H_\mathrm{D} = \frac{\gamma l^2 h}{a}\left(\frac{a}{21} + \frac{h+d}{4}\right) \qquad (7)$$

$$M_\mathrm{D} = \frac{\gamma l^2 a h}{168} \qquad (8)$$

Así, el efecto combinado de la sobrecarga puntual en la clave y el peso propio del arco (de ancho $2h$) más el relleno, es un empuje y un momento flector central de valores:

$$H = \frac{l}{a}\left\{\gamma lh\left(\frac{a}{21}+\frac{h+d}{4}\right)+\frac{25}{128}W\right\} \qquad (9)$$

$$M_c = \frac{l}{4}\left\{\frac{\gamma lah}{42}-\frac{7}{32}W\right\} \qquad (10)$$

En las ecuaciones (9) y (10) Pippard supone que el valor de γ es 22,7 kN/m³ y toma para l/a un valor de 4. Para $l = 7{,}30$ m y $h = d = 450$ mm (estos datos corresponden aproximadamente al arco central del puente de Teston[10]), las ecuaciones (9) y (10) se convierten en:

$$H = 4\left\{23{,}2+\frac{25}{128}W\right\}\text{kN} \qquad (11)$$

$$M_c = 1{,}83\left\{3{,}25-\frac{7}{32}W\right\}\text{kNm} \qquad (12)$$

Para un valor de W de 100 kN, el empuje horizontal H recibe aproximadamente la misma contribución de la sobrecarga y del peso propio. Este resultado es algo sorprendente; surge a partir de la idea de un nervio de ancho $2h$ contenido dentro del arco real que soporta la sobrecarga. En realidad, cabe esperar que la sobrecarga se transmita a través de un ancho mayor y que la mayor parte del empuje sobre los estribos sea debida al peso propio.

No obstante, la forma parabólica sigue siendo una forma razonablemente buena para arcos que soporten carga repartida (no uniforme); la ecuación (12) indica que, a igualdad de otros factores, la contribución del peso propio al momento flector en la clave es quizá de un orden de magnitud menor que la contribución de la sobrecarga. De ese modo, a medida que crece la sobrecarga W cabe esperar que la línea de empujes resultante se separe cada vez más de la directriz del arco, con la consecuencia del posible desarrollo de tensiones de tracción.

En ese sentido, un primer criterio aplicado por Pippard se deriva de la regla del tercio central. Pippard arguye que un criterio menos restrictivo podría basarse en una regla de la mitad central, en cuyo caso el valor límite de W vendría dado por la solución de

$$\frac{M_c}{H} = -\frac{d}{4} \qquad (13)$$

que lleva a

$$W_1 = \frac{32\gamma lh[2a^2+4ad+21d(h+d)]}{21(28a-25d)} \qquad (14)$$

Esta es la expresión general a partir de las ecuaciones (9) y (10); para el ejemplo numérico que llevaba a las expresiones (11) y (12),

$$W_1 = 53\text{ kN} \qquad (15)$$

Sin embargo, puede suceder que la tensión de compresión alcance el máximo valor permitido en la fábrica antes de que la línea de empujes se salga de la mitad central de la sección. Pippard utilizó un segundo criterio basado en una tensión límite de compresión σ. Como el arco tiene un espesor d y una anchura efectiva $2h$, se alcanzará el límite cuando

$$\sigma = \frac{H}{2hd}-\frac{3M_c}{hd^2} \qquad (16)$$

y las ecuaciones (9) y (10) dan

$$W_2 = \frac{\dfrac{256\sigma hd}{l}+128\gamma lh\left(\dfrac{a}{28d}-\dfrac{1}{21}-\dfrac{h+d}{4a}\right)}{\dfrac{25}{a}+\dfrac{42}{d}} \qquad (17)$$

Para el mismo ejemplo numérico, las ecuaciones (11) y (12) llevan a tensiones de compresión de $(229{,}14+1{,}93\,W)$ kN/m² y $(-195{,}8+13{,}17\,W)$ kN/m² respectivamente (W en kN); para $\sigma = 1.395$ kN/m² (valor adoptado por Pippard), el valor límite de W es

$$W_2 = 90{,}23\text{ kN} \qquad (18)$$

Pippard analizó las expresiones (14) y (17), que dan los valores límite de W en las hipótesis alternativas de una tensión límite de tracción y una tensión límite de compresión, a la luz de los resultados de los ensayos a escala real hechos por la Building Research Station (Chettoe y Henderson[11] informaron posteriormente de otros ensayos). Como consecuencia de todo ello, consideró seguro descartar la ecuación (14) y obtener un valor admisible de W a partir de la ecuación (17), menos restrictiva (cf. las ecuaciones (15) y (18)).

En arcos pequeños, el recubrimiento h suele ser menor de 0,6 m, de forma que puede suceder que el nervio efectivo de arco no tenga más de 1,2 m de anchura; se puede suponer que dentro del arco real existen varios arcos independientes. En tal caso, se puede adoptar como carga segura por eje de un vehículo de ancho normal entre ruedas la siguiente

$$W_A = 2\ W_2 \qquad (19)$$

A partir de las ecuaciones (17) y (19), Pippard elaboró tablas en las que se puede obtener el valor de W_A para distintos valores de la luz l, el espesor de rosca d y la altura del recubrimiento h en la clave, todos ellos para su arco estándar de perfil parabólico con proporción de altura a luz $l/a = 4$ y para un peso específico $\gamma = 22{,}7$ kN/m^3, con una tensión límite de 1.395 kN/m^2.

El método de peritación del MEXE/MOT

Durante los primeros años del decenio 1950-60 se introdujo una clasificación militar de cargas y posteriormente, el *Military Engineering Experimental Establishment* (MEXE) se encargó de convertir las tablas de Pippard al sistema de la OTAN. Se ideó un ingenioso nomograma que relaciona las cargas admisibles con las dimensiones del puente, elaborándose el consiguiente informe.[12] Este informe sirve de base al memorándum[5] del Ministerio de Transportes.

Se cuantificó la ecuación de Pippard (17) para valores determinados de σ y γ, para un gran número de valores de l, d y h, y para el caso estándar $a = l/4$. Se descubrió entonces que las tablas resultantes de la carga axial admisible W_A, ecuación (19), se ajustaban bastante bien a un nomograma en el que sólo figura la luz del arco l y la profundidad total $(h+d)$ en la clave (figura 18.3).

Para un arco de dimensiones dadas, la carga axial provisional W_A de la figura 18.3 se ve afectada por una serie de coeficientes de ponderación. En primer lugar, se hace un ajuste para permitir una relación luz/altura del arco distinta del caso estándar de valor 4; cuando $l/r_c > 4$ (es decir, en el caso de arcos rebajados), el coeficiente se reduce progresivamente desde el valor unidad (hasta 0,6 por ejemplo, para $l/r_c = 8$).

En segundo lugar, se hace un ajuste para admitir perfiles distintos del parabólico estándar, $r_q/r_c = {}^3/_4$ (figura 18.1), donde r_q es la altura del arco en la cuarta parte de la luz; para $r_q/r_c > 0{,}75$ el coeficiente es menor de la unidad.

En tercer lugar, el producto de otros dos coeficientes representa la estimación de la calidad del material de la rosca del arco y del relleno; este coeficiente del material puede ser mayor o menor de la unidad, pero probablemente estará entre 0,6 y 1,2.

En cuarto lugar, se estima un coeficiente de junta (de valor entre ${}^1/_2$ y 1) en función del ancho, espesor y estado del mortero.

Estos cuatro factores se aplican al valor provisional de la carga axial, y sus efectos pueden ser significativos: cuatro factores de valor 0,7 cada uno reducirán la carga permitida a una cuarta parte del valor provisional. Más aún, hay que aplicar un quinto y último coeficiente: el coeficiente de estado. Se pide al ingeniero que especifique un coeficiente entre 0 y 1 en función de su impresión general sobre el estado del puente. (Si el coeficiente de estado se estima en menos de 0,4 se debería considerar inmediatamente la reparación o reconstrucción del puente.)

En el ejemplo numérico citado, que llevaba a un valor $W_A = 2W_2 = 180$ kN, ecuación (18), el nomograma de la figura 18.3 da un valor provisional de W_A de unos 450 kN. Los valores habituales y razonables de los primeros cuatro coeficientes de ponderación

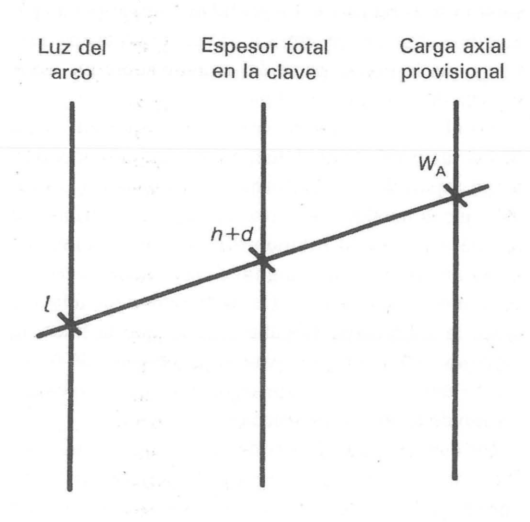


Figura 18.3

bien pueden reducir este valor a la mitad, unos 225 kN, y por último, el factor de estado reducirá todavía más el valor de esta carga axial. (Un cálculo preliminar[10] del puente de Teston daba en 1973 un valor de W_A, previo a la aplicación del factor de estado, de unos 260 kN. Se estimó un coeficiente de estado de 0,4 que permitía obtener una carga axial admisible de 100 kN.)

Los rasgos esenciales del método MEXE/MOT para el cálculo aproximado de arcos de fábrica son los siguientes:

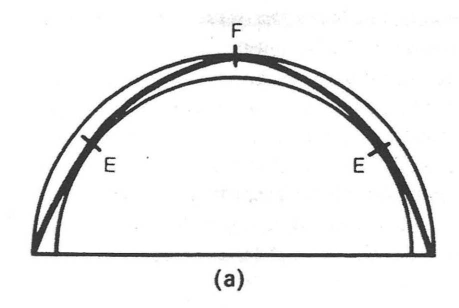
a) se hace un énfasis considerable en las características geométricas del puente; en el nomograma final, la luz del arco y la altura total de la clave sirven para definir un valor provisional de la carga axial, mientras que la forma real del arco se introduce después por la vía de los coeficientes de ponderación.
b) el arco es considerado, al modo del siglo XIX, como una estructura elástica hiperestática; para la carga dada, su estado se cuantifica empleando técnicas establecidas.
c) finalmente, se utiliza un valor límite de la resistencia a compresión como criterio último de la resistencia del arco.

UN MÉTODO «PLÁSTICO» DE ANÁLISIS

Existe una tradición anterior de análisis de puentes que se remonta hasta el siglo XVIII[1,13] (por lo tanto anterior a la formulación de los métodos elásticos) que puede utilizarse como alternativa para estimar la resistencia de un arco determinado. Este método aplica nociones derivadas de las características geométricas del arco y del equilibrio, pero no hace uso de otra propiedad del material que no sea su peso propio; así pues, el cálculo no es elástico ni está basado en un valor límite de las tensiones. En su lugar, se determina la resistencia del arco en función de su margen de seguridad frente a la rotura por formación de articulaciones entre dovelas.

Ha quedado de manifiesto[1,13] en qué medida tal enfoque se orienta en la misma línea que los teoremas plásticos, de los cuales el teorema de la seguridad (o del límite inferior) es de importancia primordial para el análisis de arcos. Barlow[14] explicó claramente este principio.

La figura 18.4(a), por ejemplo, muestra uno de los esquemas de Barlow sobre un modelo de arco de medio punto cuyo espesor de rosca es justo el mínimo necesario para que sea estable bajo la acción de su peso propio. La línea gruesa de la figura 18.4(a) representa la línea de empujes en el arco debida al peso propio, y tiene aproximadamente el trazado de una catenaria (para arcos de pequeño espesor). Si el arco fuera más grueso (figura 18.5), la línea de empujes quedaría contenida con holgura dentro de la fábrica; en el caso límite de la figura 18.4(a), la línea de empujes es tangente al intradós en dos puntos E, es tangente al trasdós en la clave F y lo corta en los apoyos. Si el arco estuviera hecho de dovelas aparejadas sin mortero (o con un mortero tan débil que su resistencia a tracción fuera despreciable) se formarían articulaciones incipientes en los arranques y en los puntos E y F, y el arco estaría a punto de colapsar por el mecanismo expuesto en la figura 18.4(b).



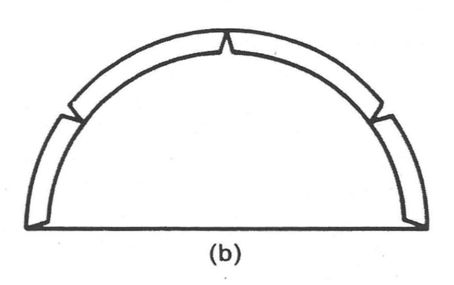


Figura 18.4

El problema representado en la figura 18.4 fue resuelto un siglo antes por Couplet[15,16] (con una simplificación elemental); todavía antes Gregory[17] había dado la analogía matemática entre la forma de una cadena colgante y la correspondiente forma de un arco de fábrica, idea que fue planteada explícitamente por Hooke.[18] Gregory afirmó: «En un plano vertical pero en situación invertida, la cadena mantendrá su forma sin caerse y constituirá en consecuencia un arco muy fino... Y cuando un arco de cualquier otra forma se sostiene en pie, es porque dentro de su espesor está contenido algún tipo de catenaria».[19] Este último enunciado es muy potente; Gregory afirma que si es posible encontrar una línea de empujes dentro de la fábrica, el arco se mantendrá en pie. Dicho de esta forma, el enunciado se puede reconocer como parte de la teoría plástica; no es más que el teorema del límite inferior aplicado a fábricas.

La validez de este enfoque de equilibrio para el cálculo de arcos depende de que el material del arco obedezca a ciertas hipótesis.[1] De ellas, las dos más importantes son la de que no habrá deslizamiento entre dovelas y que los niveles generales de tensión son tan bajos que, de hecho, el fallo del material resulta imposible. No se trata de hipótesis poco razonables y ya fueron hechas por Couplet y por Coulomb;[13] fuerzan a que el fallo local se produzca en un punto del arco por formación de una articulación entre dovelas adyacentes, ya sea en el intradós o en el trasdós. El fallo del conjunto del arco se producirá cuando se forme el número de articulaciones suficiente para convertir el arco en un mecanismo, como en la figura 18.4(b).

En estas condiciones, la posibilidad de establecer una línea adecuada de empujes que equilibre la carga y esté contenida enteramente dentro de la fábrica garantizará la estabilidad del arco bajo dicha carga. La cuestión práctica que hay que responder entonces se refiere al margen de seguridad de dicho arco.

El arco que se muestra en la figura 18.4 no tiene margen de seguridad. En caso de cualquier pequeña imperfección geométrica del arco, la línea de empujes no podrá quedar contenida dentro de la fábrica. Una pequeña asimetría en la carga (o una pequeña sobrecarga añadida al peso propio) producirá el hundimiento inmediato del arco. Por contraste, el arco dibujado en la figura 18.5 da la impresión de ser capaz de acomodarse tanto a una imperfección geométrica como de carga.

Las líneas de empuje de las figuras 18.4 y 18.5 no dan ninguna información sobre la magnitud de la carga; por ejemplo, se podrían duplicar las cargas, y las figuras 18.4 y 18.5 permanecerían inalteradas. Así, a primera vista (y en el marco de las hipótesis descritas anteriormente), el margen de seguridad de un arco de fábrica queda mejor expresado geométricamente que a través de un coeficiente de carga.

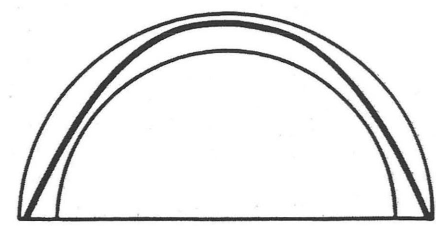
La comparación de las figuras 18.4(a) y 18.5 da una idea de cómo podría especificarse un coeficiente geométrico de seguridad; el espesor del arco de la figura 18.5 es el doble del de la figura 18.4(a). Si se adelgaza la rosca del arco de la figura 18.5 de forma continua y uniforme justo hasta que la línea de empujes quede contenida exactamente dentro de la fábrica, el límite del proceso será el arco de la figura 18.4(a). El factor final de reducción puede identificarse con el coeficiente geométrico de seguridad buscado, y en este ejemplo tiene el valor de 2.

La línea de empujes indicada en la figura 18.5 no es única, sino tan sólo un ejemplo de una línea que satisface el enunciado de Gregory. Se pueden identificar dos límites para las posibles posiciones de las líneas de empuje. En la figura 18.6(a), la componente horizontal del empuje se ha reducido (quizá por una pequeña separación entre los estribos) hasta un valor tal que se han formado tres articulaciones en el arco, que se encuentra ahora en una situación estáticamente determinada, si bien sigue siendo una estructura perfectamente viable. La figura 18.6(b) representa el estado del arco bajo la acción del máximo valor posible del empuje (si hubiera alguna asimetría no se formaría una de las cuatro articulaciones que se han dibujado).

En la práctica, el valor del empuje debe estar comprendido entre los límites que implican las figuras 18.6(a) y 18.6(b); el valor real del empuje en un momento determinado dependerá del comportamiento del entorno exterior, por ejemplo, la separación entre estribos, los cambios de temperatura o el asentamiento de una pila. No obstante, cuando se adelgaza el arco, se estrechan los márgenes de la posición de la línea de empujes, resultando para la posición final un valor único. La figura 18.4(a) es efectivamente la combinación límite de las figuras 18.6(a) y 18.6(b).

La idea del arco menguante se aplica aquí para obtener un método práctico de peritación de la estabilidad de arcos de fábrica. En lugar del arco real, se analiza un arco que tenga la misma directriz pero con un espesor reducido, y se determina el espesor

mínimo justo para que la línea de empujes pueda quedar contenida bajo la combinación más desfavorable de peso propio y sobrecargas. (La rosca del arco suele variar de espesor a lo largo del arco; el coeficiente geométrico se aplica uniformemente a todas las secciones.)



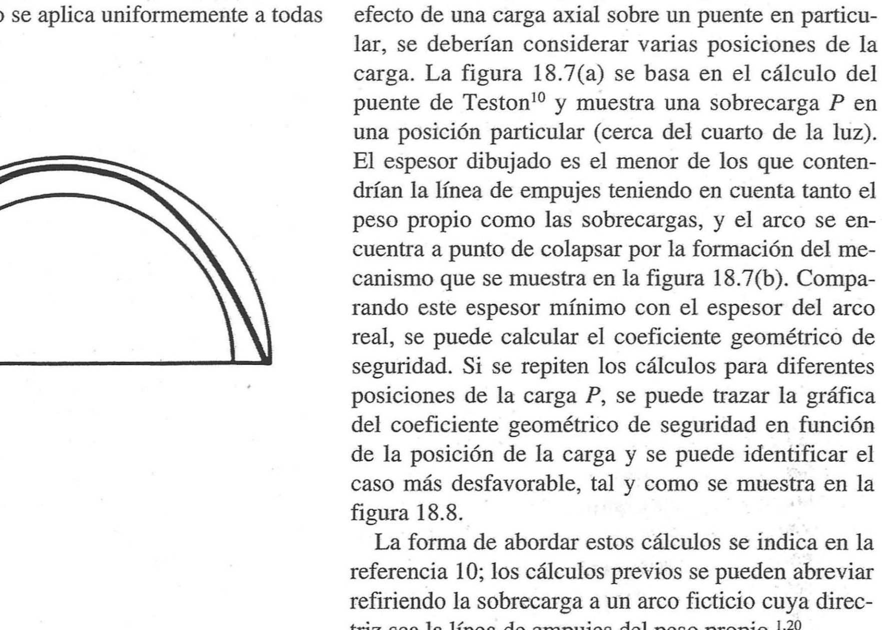


Figura 18.5

En la práctica, el análisis preciso de un arco requiere el dibujo de polígonos funiculares para las distintas condiciones de carga que se hayan de tener en cuenta. Si, por ejemplo, se requiere estudiar el efecto de una carga axial sobre un puente en particular, se deberían considerar varias posiciones de la carga. La figura 18.7(a) se basa en el cálculo del puente de Teston[10] y muestra una sobrecarga *P* en una posición particular (cerca del cuarto de la luz). El espesor dibujado es el menor de los que contendrían la línea de empujes teniendo en cuenta tanto el peso propio como las sobrecargas, y el arco se encuentra a punto de colapsar por la formación del mecanismo que se muestra en la figura 18.7(b). Comparando este espesor mínimo con el espesor del arco real, se puede calcular el coeficiente geométrico de seguridad. Si se repiten los cálculos para diferentes posiciones de la carga *P*, se puede trazar la gráfica del coeficiente geométrico de seguridad en función de la posición de la carga y se puede identificar el caso más desfavorable, tal y como se muestra en la figura 18.8.

La forma de abordar estos cálculos se indica en la referencia 10; los cálculos previos se pueden abreviar refiriendo la sobrecarga a un arco ficticio cuya directriz sea la línea de empujes del peso propio.[1,20]

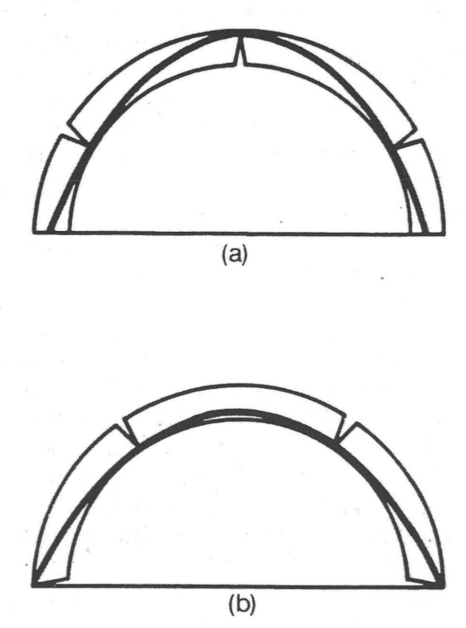


Figura 18.6

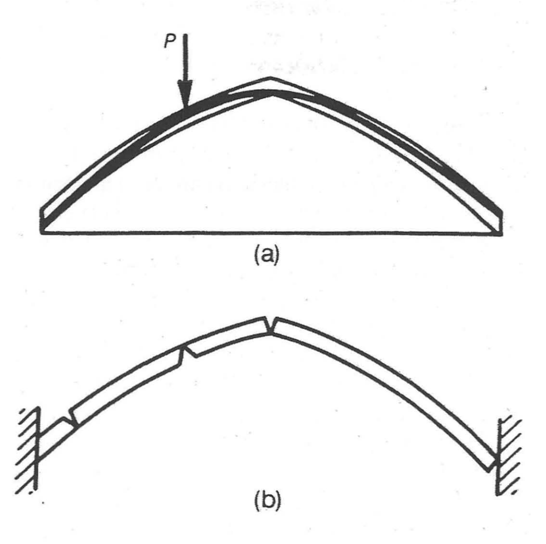


Figura 18.7

De ese modo, si se requiere el efecto de una carga axial en el caso del arco semicircular idealizado de la figura 18.5, se harían los cálculos para la curva de la catenaria indicada en aquél dibujo. Puede llegar a ser necesario hacer estas operaciones como último paso de un análisis concreto.

CÁLCULO APROXIMADO DE CARGAS AXIALES SEGURAS

Se trata de determinar el efecto de una sola carga puntual axial sobre un arco de fábrica. Este es en esencia el problema de Pippard, pero se supone que la carga está uniformemente distribuida a lo ancho del puente.

Siguiendo las indicaciones de la figura 18.8, se toma como posición crítica de la carga puntual axial la del cuarto de la luz. En realidad, el mínimo de la figura 18.8 no está claramente definido, así que si colocamos la carga en el cuarto de la luz el error no será muy grande.

Se supone que el mecanismo indicado por la posición de la línea de empujes de la figura 18.9 (cf. figura 18.7) ocurrirá en un amplio intervalo de formas diferentes de arco. Las articulaciones aparecen en la secuencia adecuada, alternadamente en el intradós y el trasdós; la articulación que hace que el intradós se abra está exactamente en el centro del vano.

La figura 18.10 muestra las dimensiones del arco. Se adopta una superficie horizontal de calzada. Se supone que el relleno no tiene resistencia y que transmite la carga lineal P sin repartirla hasta el trasdós de la rosca del arco; tanto el relleno como la rosca tienen peso específico γ. Los cálculos están referidos a la flecha h_c del arco, de modo que el parámetro $\alpha = h_q/h_c$ mide de algún modo la forma del arco, el parámetro $\beta = h_0/h_c$ da una medida de la profundidad del puente en la clave (rosca más relleno) y $\epsilon = t/h_c$ mide el espesor vertical de la rosca del arco en el cuarto de la luz.

La cuarta parte extrema del puente tiene un peso propio W_1 con un centro de gravedad tal y como se indica en la figura 18.10; W_2 queda indicado de forma similar. El arco es simétrico respecto a la directriz. Se conoce la posición de la línea de empujes en cuatro secciones distintas cuando el arco está a punto de rotura (figura 18.9) y la forma básica del arco tiene tres incógnitas hiperestáticas, así que es posible dar con una ecuación que relacione todas las variables de la figura 18.10. Ello es posible suponiendo un pequeño movimiento del mecanismo de colapso de la figura 18.9 ó, de forma más sencilla, planteando las ecuaciones estáticas de equilibrio (en la referencia 10 se da un ejemplo numérico). La relación buscada es:

$$P = 16 \frac{1}{(3-2\alpha)-(2+k)\epsilon} \left\{ W_2 x_2 [\alpha + (1 - \tfrac{1}{4} k)\epsilon] - (W_1 x_1 + \tfrac{1}{4} W_2)[(1-\alpha) - (1 + \tfrac{1}{4} k)\epsilon] \right\} \quad (20)$$

La ecuación (20) da el valor de la sobrecarga P que justo provocaría el colapso de un arco determinado. Cuando $(3-2\alpha) = (2+k)\epsilon$, la carga de colapso teóricamente es infinita. Ese caso corresponde a un arco de las proporciones indicadas en la figura 18.11, en el cual se pueden trazar líneas rectas de empuje desde el trasdós (en el cuarto de la luz) hasta los apoyos.

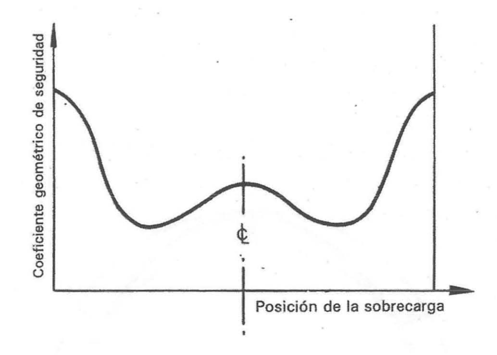


Figura 18.8

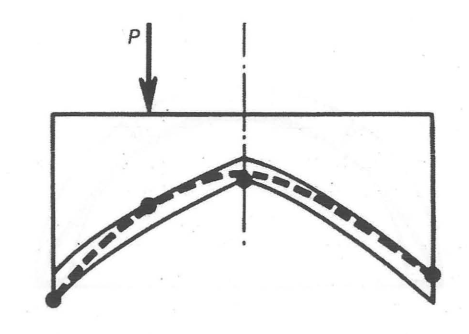


Figura 18.9

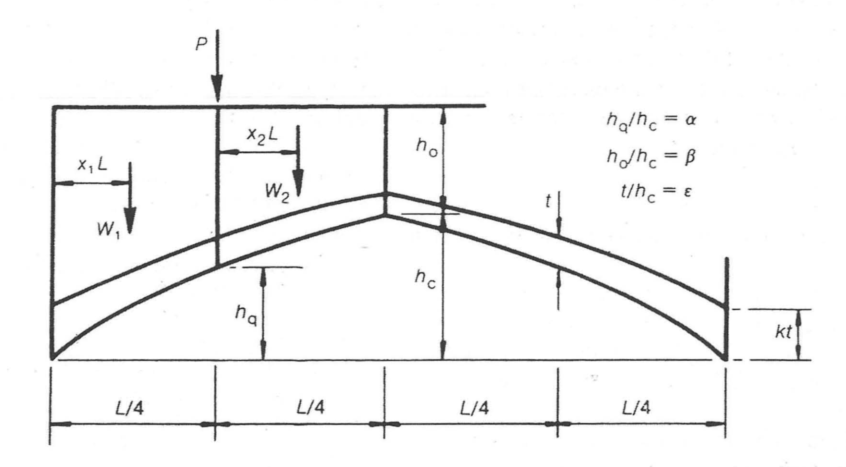


Figura 18.10

Como otra simplificación para conseguir que la ecuación (20) tenga una forma adecuada para su aplicación general, se calcula el peso W_1 a partir del trapecio de la figura 18.12, en la que se ha sustuitido el intradós del puente por una línea recta.

Haciendo una aproximación similar para W_2 y tomando un ancho unidad de puente, la ecuación (20) se convierte en:

$$p = \frac{P}{\gamma L h_c/6} =$$

$$= \frac{1}{(3-2\alpha)-(2+k)\epsilon}\Big\{(1+3\beta-\alpha)[\alpha+(1-\tfrac{1}{4}k)\epsilon]- -(6+9\beta-5\alpha)[(1-\alpha)-(1+\tfrac{1}{4}k)\epsilon]\Big\} \quad (21)$$

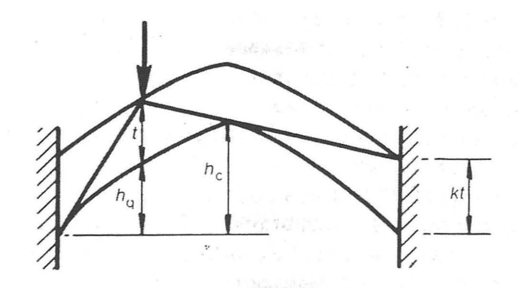


Figura 18.11

Si se da un valor unitario a la constante k, que expresa el espesor vertical de la rosca del arco en los arranques (figura 18.10), la ecuación (21) dará la intensidad de carga lineal por unidad de ancho de puente necesaria para provocar el colapso en función de los parámetros α, β y ϵ. La simplificación $k=1$ es segura, pero no en exceso. La figura 18.9 indica que las posiciones de tres de las cuatro articulaciones se fijan independientemente del valor de k y la variación del espesor del arco en la cuarta articulación (en

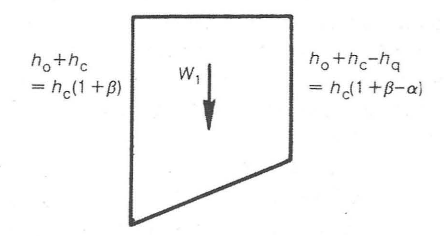


Figura 18.12

el estribo) tiene en consecuencia un efecto pequeño sobre el valor de P. Este argumento de carácter físico se refuerza analizando las magnitudes de las variables de la ecuación (21); el valor del espesor adimensional ϵ de la rosca del arco, con el que está asociado k, normalmente es pequeño comparado con los valores de α y β.

La ecuación (21), que constituye la base del método rápido propuesto para la peritación de arcos de fábrica, se tabula en la tabla 18.1 (para $k = 1$), para:

$$\left.\begin{array}{l}\epsilon = 0{,}04\ (0{,}02)\ 0{,}30 \\ \alpha = 0{,}60;\ 0{,}65;\ 0{,}68\ (0{,}02)\ 0{,}82;\ 0{,}85;\ 0{,}90 \\ \beta = 0,\ 1\end{array}\right\} \quad (22)$$

El valor de P es función lineal de β, y la interpolación lineal para un valor determinado de β es exacta. Como la tabulación es bastante detallada, no se introducen grandes errores interpolando también linealmente otros valores de α y ϵ.

Ejemplos

Puente del Clare College en Cambridge

El puente del Clare College se ha analizado con precisión,[2] obteniendo una carga lineal de rotura de 39 kN a partir de métodos gráficos y de las dimensiones reales (asimétricas) del puente. Las dimensiones medias del arco principal son $L = 6720$ mm, $h_c = 2320$ mm, $h_q = 1780$ mm, $h_0 = 620$ mm y $t = 150$ mm, de donde $\alpha = 0{,}77$; $\beta = 0{,}27$ y $\epsilon = 0{,}065$.

A partir de la tabla 18.1, cuando $\beta = 0{,}27$ y $\alpha = 0{,}76$, p vale 0,062 y 0,172 para los valores de $\epsilon = 0{,}06$ y $\epsilon = 0{,}08$ respectivamente; y cuando $\beta = 0{,}27$ y $\alpha = 0{,}78$, p vale 0,151 para $\epsilon = 0{,}06$ y 0,264 para $\epsilon = 0{,}08$. Haciendo una interpolación lineal para $\alpha = 0{,}77$ y $\epsilon = 0{,}065$, se obtiene un valor de p de 0,134. El valor de γ se ha tomado de 20 kN/m^3, de forma que $\gamma L h_c/6 = 52{,}0$ kN/m y se obtiene un valor de P de 7,0 kN/m. El puente tiene 5 m de ancho, de modo que la carga total para producir el colapso del arco principal se calcula en 35 kN, que se puede comparar con el valor exacto de 39 kN.

Esta coincidencia quizá es fortuita en este caso; el puente del Clare College tiene una rosca muy fina y los cálculos son sensibles a pequeños cambios en los valores de los parámetros.

Ponte Mosca, Turín

El estudio del puente Mosca figura en la referencia 1. Sus dimensiones son $L = 45$ m, $h_c = 5{,}50$ m, $h_q = 4{,}19$ m y $h_0 = 2{,}10$ m, de donde $\alpha = 0{,}76$ y $\beta = 0{,}38$.

Se supone un peso específico medio del material del puente de 20 kN/m^3, resultando por tanto un valor de $\gamma L h_c/6$ de 825 kN/m. Así pues, si se considera una carga lineal de 100 kN/m como posible sobrecarga del puente, el valor adimensional de la carga p será de $100/825 = 0{,}121$.

Entrando en la tabla 18.1 para $\alpha = 0{,}76$, cuando $\beta = 0{,}38$ los valores de p son 0,02 para $\epsilon = 0{,}04$ y 0,14 para $\epsilon = 0{,}06$. Por interpolación lineal, $\epsilon = 0{,}057$ para el valor buscado de $p = 0{,}121$. En consecuencia, un arco de rosca de espesor uniforme $t = 0{,}057 \times 5{,}50 = 0{,}314$ m contendría justo la línea de empujes resultante del peso propio del arco más la sobrecarga de 100 kN/m.

La rosca del arco tiene realmente un espesor en la clave de 1,50 m (creciente hacia los apoyos); por ello, parece que el coeficiente geométrico de seguridad puede tener al menos un valor de $1{,}50/0{,}314 = 4{,}8$; un cálculo más exacto[1] da un valor de 4,6.

Estudiando una serie de ejemplos similares resulta que el método aproximado de cálculo en el caso de una carga lineal aislada parece aproximarse bastante a la estimación exacta de la resistencia de los arcos. Deberían comprobarse los resultados con un cálculo final más preciso; la tabla 18.1 sólo da información sobre cargas aisladas, por lo que también hay que hacer cálculos detallados para trenes de cargas.

Conclusión

Tanto el método «plástico» apuntado como el cálculo elástico de Pippard[7] se orientan a la determinación de la carga axial admisible. Ambos tipos de análisis son más adecuados para el caso de arcos estrechos de luces relativamente pequeñas; de hecho, el método «plástico» fue desarrollado específicamente para la investigación de puentes medievales.

La idea clave del método propuesto estriba en abandonar la búsqueda de la línea de empujes real del arco. En realidad, el concepto de estado real de una estructura hiperestática no es muy significativo; incluso si se pudiera describir ese estado en un instante cualquiera, éste se vería modificado, de

ϵ	$\alpha = 0{,}60$		$\alpha = 0{,}65$		$\alpha = 0{,}68$		$\alpha = 0{,}70$		$\alpha = 0{,}72$		$\alpha = 0{,}74$	
	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$
0,04									–0,24	–0,11	–0,20	0,10
0,06							–0,24	–0,09	–0,20	0,12	–0,17	0,35
0,08					–0,24	–0,07	–0,20	0,15	–0,16	0,38	–0,13	0,62
0,10			–0,26	–0,15	–0,20	0,18	–0,16	0,42	–0,12	0,67	–0,08	0,93
0,12			–0,22	0,10	–0,15	0,46	–0,11	0,71	–0,07	0,98	–0,03	1,26
0,14			–0,17	0,37	–0,10	0,76	–0,06	1,03	–0,02	1,32	0,02	1,63
0,16	–0,24	0,04	–0,12	0,67	–0,05	1,09	0,00	1,39	0,04	1,71	0,08	2,04
0,18	–0,18	0,32	–0,06	1,00	0,01	1,46	0,06	1,79	0,11	2,13	0,15	2,51
0,20	–0,13	0,62	0,00	1,37	0,08	1,87	0,13	2,23	0,18	2,62	0,23	3,03
0,22	–0,06	0,97	0,08	1,78	0,16	2,33	0,21	2,73	0,26	3,16	0,31	3,63
0,24	0,01	1,34	0,16	2,24	0,24	2,85	0,30	3,30	0,36	3,79	0,41	4,31
0,26	0,09	1,77	0,25	2,76	0,34	3,45	0,40	3,95	0,47	4,51	0,53	5,11
0,28	0,18	2,24	0,35	3,35	0,45	4,13	0,52	4,71	0,59	5,34	0,67	6,05
0,30	0,28	2,78	0,47	4,03	0,58	4,92	0,66	5,59	0,75	6,34	0,83	7,15

ϵ	$\alpha = 0{,}76$		$\alpha = 0{,}78$		$\alpha = 0{,}80$		$\alpha = 0{,}82$		$\alpha = 0{,}85$		$\alpha = 0{,}90$	
	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$
0,04	–0,17	0,32	–0,14	0,55	–0,10	0,79	–0,08	1,04	–0,04	1,44	0,02	2,18
0,06	–0,13	0,58	–0,10	0,83	–0,07	1,09	–0,04	1,36	0,00	1,80	0,06	2,61
0,08	–0,09	0,88	–0,06	1,14	–0,02	1,42	0,01	1,72	0,05	2,20	0,10	3,10
0,10	–0,04	1,20	–0,01	1,49	0,02	1,80	0,05	2,12	0,09	2,64	0,15	3,65
0,12	0,01	1,56	0,04	1,87	0,07	2,21	0,11	2,57	0,15	3,15	0,21	4,28
0,14	0,06	1,96	0,10	2,30	0,13	2,67	0,17	3,07	0,21	3,72	0,27	5,00
0,16	0,12	2,40	0,16	2,79	0,20	3,20	0,24	3,64	0,28	4,38	0,35	5,85
0,18	0,19	2,91	0,24	3,34	0,28	3,80	0,31	4,30	0,37	5,14	0,44	6,85
0,20	0,27	3,48	0,32	3,96	0,36	4,49	0,40	5,06	0,46	6,04	0,55	8,05
0,22	0,36	4,13	0,41	4,68	0,46	5,29	0,51	5,95	0,58	7,10	0,68	9,52
0,24	0,47	4,89	0,53	5,53	0,58	6,23	0,64	7,01	0,72	8,37	0,85	11,35
0,26	0,59	5,78	0,66	6,52	0,72	7,35	0,79	8,29	0,89	9,95	1,06	13,71
0,28	0,74	6,84	0,82	7,72	0,90	8,72	0,98	9,86	1,11	11,93	1,35	16,85
0,30	0,92	8,11	1,01	9,18	1,11	10,41	1,21	11,84	1,39	14,51	1,75	21,25

Tabla 18.1. Valores de p (la interpolación lineal para valores intermedios de β es exacta)*

* *Ejemplo*: Para $L = 7{,}20$ m; $h_c = 2{,}66$ m; $h_q = 2{,}08$ m; $h_o = 1{,}00$ m; $t = 320$ mm; $\gamma = 16{,}7$ kN/m^3; $\alpha = 0{,}78$; $\beta = 0{,}376$; $\epsilon = 0{,}12$; $\gamma L h_c/6 = 53{,}30$ kN/m: a partir de la Tabla, $p = 0{,}73$ y en consecuencia, $P = 39$ kN/m.

forma impredecible, por cambios posteriores del entorno. Un método elástico produce un sólo estado posible de equilibrio de una estructura; éste puede o no ser razonable a los efectos del cálculo o del proyecto.

En consecuencia, la descripción de Pippard del arco de fábrica puede no ser correcta, en el sentido de que es improbable que las fuerzas y momentos que predice sean observables en la práctica. No obstante, puede ser razonable en el sentido de que puede llevar a estimaciones plausibles de la resistencia. Por contra, no hay ambigüedades en el método que se propone en este artículo; el estado límite, aunque hipotético, es único.

Una curiosa particularidad del método de Pippard es que el espesor *d* de la rosca del arco no interviene directamente en los cálculos; se utiliza en su lugar la profundidad total ($h+d$) en la clave. (El valor real de *d* tiene poca influencia en el valor del coeficiente del material del método del Ministerio de Transportes.[5]) Así, el método original implica que sería posible determinar un valor particular de la carga axial admisible independientemente casi por completo de que el arco tuviera un espesor significativo o fuera muy delgado. El método «plástico» propuesto distingue radicalmente entre roscas gruesas o delgadas, quizá de forma demasiado radical. Cuando se analizan los mecanismos de rotura se contempla el relleno como una simple carga muerta sin resistencia propia; el método de Pippard permite considerar de alguna forma que tanto el relleno como la propia rosca del arco contribuyen a su resistencia.

Análogamente, el método «plástico» es conservador en su hipótesis de que las sobrecargas se transmiten sin dispersarse a través del relleno hasta llegar al extradós del arco. En este caso puede que el error no sea muy grande, especialmente para arcos de poca altura y recubrimientos pequeños.

El método «plástico» se basa en una serie de hipótesis identificables cuyos efectos pueden seguirse perfectamente a través de los cálculos. Dentro del marco de estas hipótesis, los cálculos conducen a un claro valor mínimo del espesor del arco. La seguridad real de un puente concreto dependerá del valor del coeficiente geométrico de seguridad utilizado.

La elección de un valor apropiado del coeficiente de seguridad sigue siendo una cuestión abierta. Este aspecto recuerda la situación de los primeros tiempos del desarrollo de la teoría plástica aplicada a pórticos metálicos, aunque en aquel caso los cálculos plásticos podían compararse con los cálculos elásticos convencionales para llegar a un valor apropiado. Este tipo de comparación no es posible en arcos de fábrica, pero la experiencia indica que un coeficiente geométrico de 2 puede ser adecuado. Éste fue el valor empleado en la rehabilitación del puente de Teston.[10]

19

Defectos crónicos en las bóvedas de fábrica: las grietas de Sabouret

En las bóvedas de fábrica se pueden distinguir tres tipos de grietas diferentes. La figura 19.1 reproduce el dibujo de Pol Abraham[1] de una bóveda cuatripartita típica, y su clasificación de las grietas, que discurren todas en dirección este/oeste (la dirección de la nave), es como sigue:

1. Las grietas en el cañón principal de la bóveda, en la zona de la línea de clave, que con frecuencia atraviesan los arcos perpiaños y cruceros, cerca de la clave mayor. Si los arcos son más apuntados estas grietas se producen a cierta distancia de la línea de clave.
2. Las grietas que Pol Abraham denominó *fissures de Sabouret,*[2] paralelas a los arcos formeros, pero a cierta distancia de ellos.
3. Frecuentemente, hay una separación completa entre la plementería de la bóveda y los muros laterales norte y sur, de modo que, situándose sobre el trasdós de la bóveda se puede ver, debajo, el suelo de la iglesia.

Estos tres tipos de grietas pueden haber existido durante muchos años, o durante siglos, en las bóvedas de una iglesia determinada. En sí mismas no indican que las bóvedas estén en peligro; más bien, están relacionadas con un simple movimiento que se ha producido en el pasado y que no tiene porqué haber continuado. En otra parte[3] se han expuesto las características de la fábrica que son fundamentales para a formulación de su análisis estructural. Brevemente, las tensiones que aparecen en la fábrica en la construcción normal son extraordinariamente bajas en comparación con la resistencia de rotura a compresión de la piedra. Es más, los valores de las tensiones son tan bajos que es conveniente, y sólo remotamente inseguro, suponer que el material es infinitamente resistente a compresión. Por otra parte, el material es poco resistente a tracción; las piedras en sí mismas pueden resistir tracciones, pero están unidas con mortero pobre, o incluso sin él (en seco). Parece, pues, que considerar la fábrica incapaz de soportar tracciones es una hipótesis sensata, sólo ligeramente del lado de la seguridad.

De esta manera, surge la imagen de la fábrica como conjunto de pequeños bloques de piedra, labrados para constituir una forma estructural coherente, que se mantiene mediante fuerzas de compresión que se transmiten en el interior de la masa del material, pero obligada a agrietarse si aparecen fuerzas de tracción. Así, un primer requisito para cualquier teoría estructural de las fábricas, es que debería modelar con precisión este comportamiento del material. Los cálculos realizados, por ejemplo, según la teoría convencional, que supone un comportamiento similar a tracción y a compresión, proporcionarán resultados que, en el mejor de los casos, sólo serán parcialmente relevantes en relación con el comportamiento de la estructura real.

Sin embargo, para establecer una teoría correcta sobre el comportamiento de las fábricas hay un requisito más importante. Las estructuras de fábrica

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Chronic defects in masonry vaults: Sabouret's Cracks,» *Monumentum* 26 (1983): 131-41. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

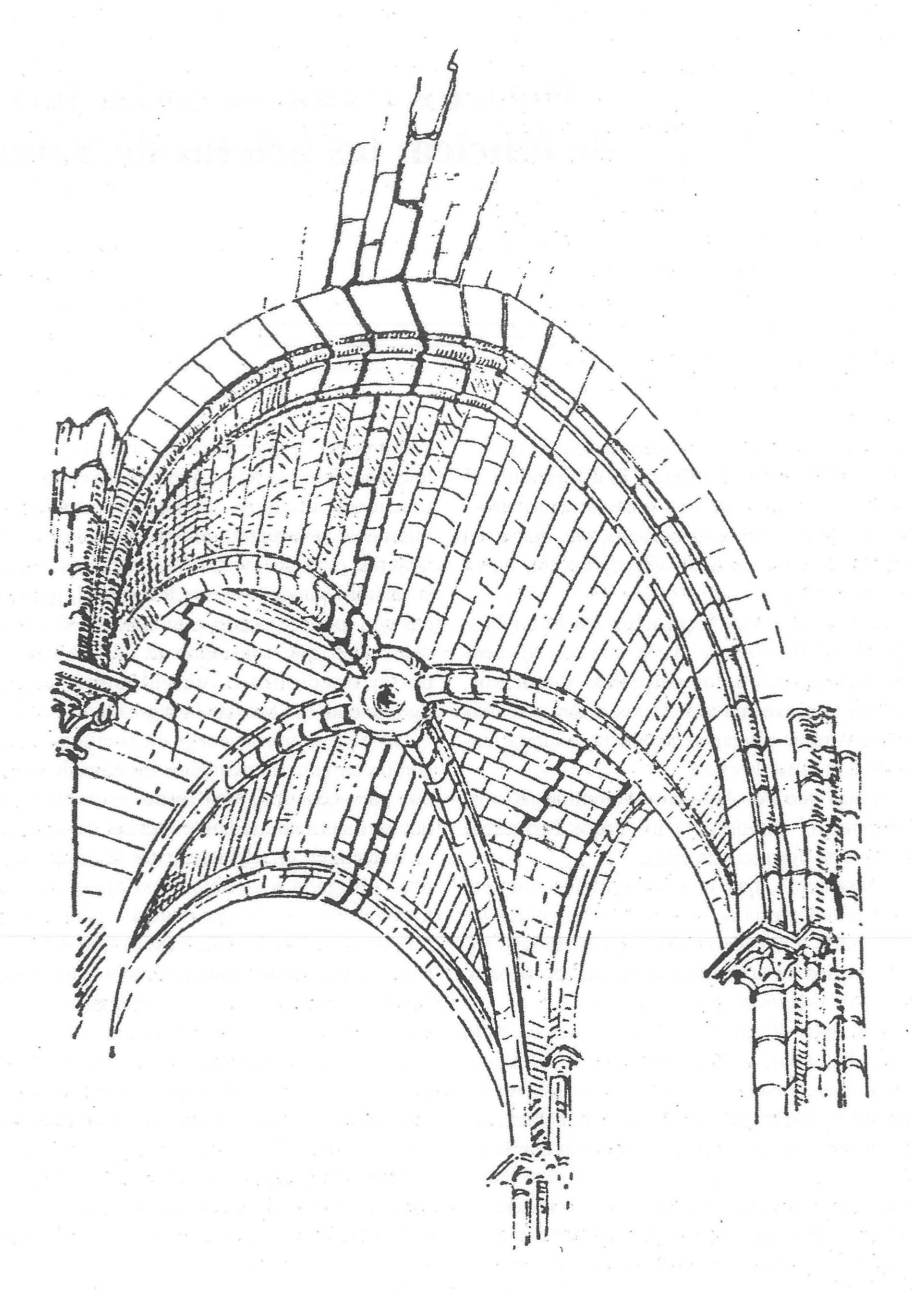


Figura 19.1
Grietas típicas de una bóveda gótica. Pol Abraham diferenciaba las grietas de tracción cerca de la línea de clave, las «grietas de Sabouret» paralelas a los arcos formeros y las de separación entre la bóveda y el muro

son evidentemente «hiperestáticas» en el sentido técnico de que, dado un determinado conjunto de cargas, pueden existir muchas soluciones diferentes (en realidad un número infinito) para la distribución de las fuerzas dentro de la estructura, y cualquiera de ellas soportará satisfactoriamente la carga aplicada. La distribución *real* de los esfuerzos dentro de una estructura dependerá de la manera en que ésta se construyó y del modo en que se apoya externamente. Por tanto, para calcular este estado real, el técnico necesita gran cantidad de información detallada, parte de la cual, por su propia naturaleza, puede ser difícil o imposible de obtener. De hecho, lo que normalmente hace el analista es suponer que la estructura (por ejemplo la bóveda de una nave) está vinculada rígidamente a apoyos rígidos (los pilares y los arbotantes) o, si desea realizar un cálculo muy elaborado, puede tener en cuenta cierta elasticidad de los apoyos; supondrá, casi con toda seguridad, que el material de la bóveda es elástico y homogéneo; y por último obtendrá su «solución», ya sea analíticamente, empleando quizá el método de los elementos finitos con la ayuda de un programa de ordenador, o quizá experimentalmente, utilizando un modelo físico en el laboratorio.

Ahora bien, en primer lugar esta «solución» depende en gran medida de las hipótesis del analista; cambios muy pequeños en la manera en que la bóveda se une a los pilares o en la elasticidad supuesta (si la hay) en el sistema de contrarresto, pueden conducir a grandes variaciones en la distribución de esfuerzos dentro de la estructura. Además, aunque el ingeniero o arquitecto tenga una descripción exacta de la estructura, el mero paso del tiempo la hará anticuada; un pequeño asiento de un pilar, o los movimientos del edificio durante un vendaval, harían necesario un nuevo cálculo. Desde este punto de vista, carece de sentido plantearse cuál es el estado «real» de la estructura, ya que éste, en cualquier caso, variará con el tiempo. Lo mejor que se puede decir de una solución elástica convencional es que, cuando menos, describe un posible estado de equilibrio de la estructura.

En estas circunstancias, los teoremas «plásticos» sobre el comportamiento estructural resultan reconfortantes. La teoría plástica se elaboró en un principio como respuesta a observaciones similares sobre el comportamiento de las estructuras de acero. En teoría, los pequeños defectos de construcción pueden tener una gran repercusión en la distribución elástica de las tensiones, pero no parece razonable suponer que tales imperfecciones tengan un efecto real en la resistencia global de una estructura de acero. Este punto de vista, de sentido común, queda completamente justificado por los teoremas plásticos, de los que el fundamental es el teorema de la «seguridad» o del «límite inferior» o «antropomórfico». Expresado de manera sencilla dice: si el analista es capaz de encontrar al menos un modo en el que la estructura *pueda* soportar su carga, entonces puede estar seguro de que la propia estructura también es capaz de encontrarlo. Puede ocurrir que el modo de la estructura no sea el del proyectista, y además, como ya se ha visto, éste cambiará con el paso del tiempo en respuesta a las alteraciones de las condiciones externas, pero lo que es seguro es que *encontrará* un modo de resistir la carga.

Desde este punto de vista, parece que el cálculo elástico de las tensiones carece de sentido como medio para determinar la estabilidad de una estructura de fábrica. Sin embargo, la fábrica es un material que satisface los requisitos fundamentales para aplicar la teoría plástica, y el camino está abierto para elaborar una teoría como alternativa a las complicaciones innecesarias del análisis elástico. Lo único que se necesita es construir una distribución razonable de las fuerzas interiores en equilibrio con las cargas exteriores; a continuación se expone cómo se puede llevar a cabo ésto para las fábricas.

La figura 19.2(a) muestra un arco escarzano que en un principio estaba encajado perfectamente entre los estribos. Éstos se han separado y, para adaptarse al incremento de la luz, el arco se ha agrietado formando «articulaciones». (El dibujo está, por supuesto, muy exagerado. Las grietas podrían ser del espesor de un cabello, aunque también podrían, en la práctica, medir varios milímetros.)

Las tres articulaciones de la figura 19.2(a) han transformado la estructura, que inicialmente era hiperestática de tercer grado, en una estructura isostática; el arco triarticulado es un tipo estructural bien conocido y perfectamente satisfactorio. Además, mientras que el arco original tenía un número infinito de estados de equilibrio posibles, no existe ambigüedad alguna sobre el estado del arco de la figura 19.2(a). Evidentemente, las fuerzas transmitidas entre las piezas del arco, que las mantienen en equilibrio sometidas al peso propio, tienen que pasar por dichas

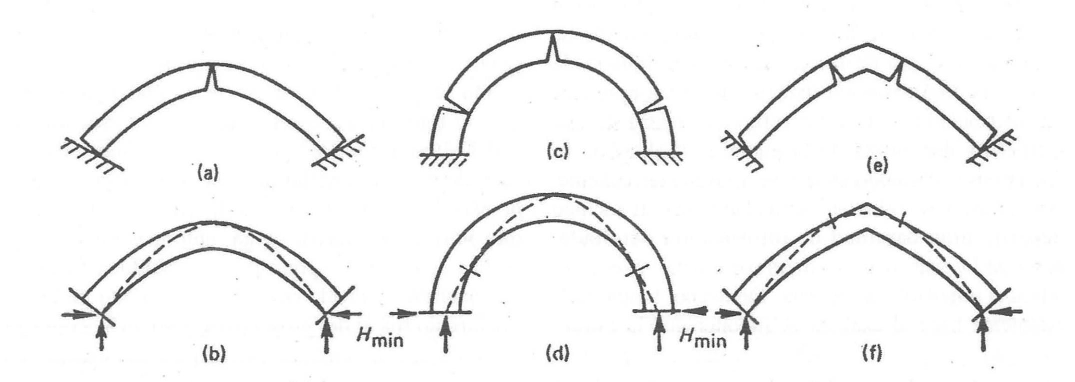


Figura 19.2
Configuraciones de grietas en arcos de fábrica producidas por un incremento de la luz

articulaciones. La línea de empujes del arco, se puede dibujar como se ilustra en la figura 19.2(b). (La línea de empujes representa la forma de un arco ideal que, en teoría, aunque fuese de espesor infinitesimal, sería capaz de soportar las cargas que actúan sobre el arco real. Ya en 1675 Robert Hooke señaló la equivalencia estática entre el problema del arco y el del hilo colgante. Si un hilo flexible se carga con una serie de cuentas que representan los pesos correspondientes a sucesivas partes del arco, la forma de este hilo será la misma, invertida, que la de la línea de empujes del arco. «Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido».)

En la figura 19.3 se muestra un arco de medio punto con una posible línea de empujes contenida en su interior. La posición «real» de esta línea de empujes no se puede encontrar sin realizar las suposiciones a que se ha aludido anteriormente. El «teorema de la seguridad» dice que si se *puede* trazar una línea de empujes que esté contenida por completo dentro de la fábrica, el arco será estable, y no es necesario ningún análisis adicional. Evidentemente, si el arco fuese más delgado —aproximadamente la mitad del espesor del de la figura 19.3 — no sería posible situar una línea de empujes dentro de la fábrica. En este caso, el arco tendría una forma geométrica incorrecta para soportar su propio peso y se hundiría al descimbrarlo.

En la figura 19.2(c), el arco de la figura 19.3 ha experimentado un incremento de la luz debido a la separación entre los estribos; la figura 19.2(d) muestra la posición límite de la línea de empujes que define la situación de las grietas en el arco. Una vez más, el arco se ha vuelto isostático mediante la formación de tres articulaciones.

En las figuras 19.2(e) y 19.2(f) se observará que, en las mismas condiciones, un arco apuntado debería formar teóricamente cuatro articulaciones. En realidad, es evidente que una ligera asimetría, ya sea en la geometría o en las cargas, hará que sólo se forme una de las articulaciones cerca de la clave. Siempre se pueden considerar dos articulaciones contiguas de este tipo y, normalmente, siempre se producirá así, como una única articulación asimétrica y ligeramente separada de la clave.

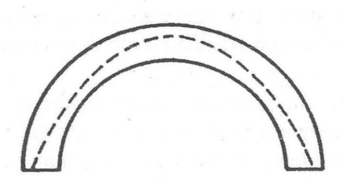


Figura 19.3
Posible línea de empujes de un arco de medio punto

La simple extensión de estas ideas básicas nos lleva a entender la mecánica de las bóvedas. Como primer paso hacia esta comprensión, la figura 19.4 muestra la sección transversal de una bóveda de cañón cilíndrica, dibujada más o menos a escala (digamos, una bóveda de 300 mm de espesor con una luz de 15 m). Se supone que la bóveda se sostiene mediante soportes exteriores, es decir por medio de estribos o mediante arbotantes que transmiten el empuje por encima de las naves laterales. Tal y como se ha dibujado, la bóveda es en realidad demasiado delgada para soportar su propio peso (en teoría para que un arco semicircular sea estable se requiere un espesor mínimo de 800 mm para una luz de 15 m); es decir, aunque la línea de empujes pudiera estar contenida dentro de la parte superior del arco, el empuje se «escaparía» de la fábrica en las zonas próximas a los arranques. Estas zonas, por tanto, deben reforzarse, y en la figura 19.4(a) se muestra el «relleno» que refuerza los riñones del cañón, y que es capaz de transmitir el empuje a los estribos. En una construcción real, el relleno estará formado por mampostería (piedras sin labrar recibidas con mortero).

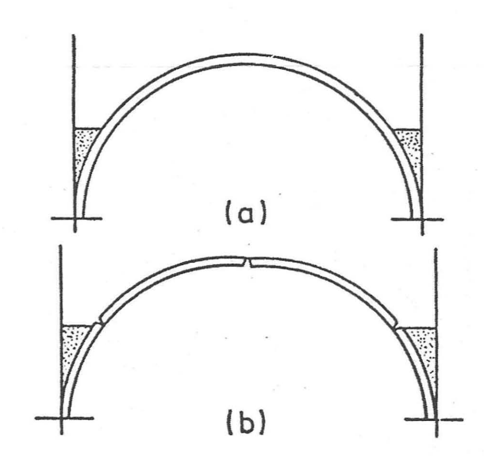


Figura 19.4
Configuración de grietas en una bóveda de cañón debida al cedimiento de los estribos

En la figura 19.4(b) se ha supuesto que los estribos han cedido ligeramente; aparecerán líneas de articulación (cf. figura 19.2(c)), aunque sólo una de ellas, la de la clave, se verá desde el interior de la iglesia. Si la bóveda de cañón tuviese una sección transversal apuntada, de nuevo sólo se vería una grieta (cf. figura 19.2(e) y la explicación de las articulaciones asimétricas), esta vez ligeramente separada de la clave de la bóveda. Esta grieta, en o cerca de la línea de clave, es el primer tipo de defecto crónico al que se ha hecho referencia al principio de este ensayo y, por tanto, indica que la articulación se ha formado al adaptarse la bóveda a la separación de sus apoyos.

La bóveda de la figura 19.4 es en esencia bidimensional, ya que se ha supuesto que la sección transversal es la misma a lo largo de la iglesia. La figura 19.5 muestra, esquemáticamente, un tramo cuadrado de una bóveda cuatripartita formado por la intersección de dos cañones cilíndricos. En la figura 19.5 se muestra un alzado de la bóveda; el relleno, que cumple la misma función que antes, está colocado en los senos conoidales de la bóveda (cf. la planta de la figura 19.5(d). Se supone que la bóveda consta de varios tramos, como se señala en planta). Si los apoyos de la bóveda se separan, el cañón que va de este a oeste se agrietará igual que antes, figura 19.5(b), y una articulación lineal (una grieta) en, o cerca, de la clave, el primer tipo de defecto crónico, se verá desde el interior de la iglesia. El cambio en la geometría global se consigue mediante la rotación en las tres articulaciones, con el consiguiente descenso de la clave de la bóveda.

Hay, sin embargo, un condicionante geométrico grave para el cañón transversal en dirección norte/sur. La clave horizontal de esta bóveda se construyó con las dimensiones iniciales de la luz, pero ésta ha aumentado. El desajuste de dimensiones es nulo en el seno conoidal de la bóveda y crece hasta un valor máximo en la coronación, como indica la figura 19.5(c); la curva que se muestra sería la de la función seno si las bóvedas originales tuvieran una sección transversal circular, pero para bóvedas con perfiles usuales tiene, más o menos, la misma forma. El efecto general del desajuste es evidente en el alzado de la figura 19.5(b); desde el lado izquierdo (sur) de la planta de la figura 19.5(d), se observará que toda la incompatibilidad geométrica se podría absorber con un hueco (de forma senoidal) entre la bóveda y el muro. Esta grieta es el tercer tipo de defecto crónico de la bóvedas.

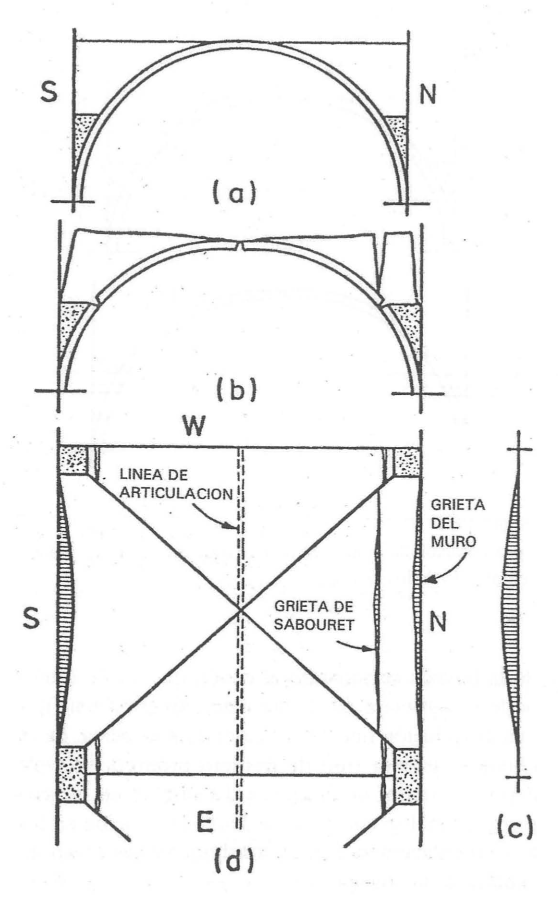


Figura 19.5
Configuración de las grietas en un tramo de una bóveda cuatripartita como resultado del cedimiento de los estribos

Sin embargo, a partir de la planta y el alzado del lado sur de la bóveda, se observará que la fábrica contigua al muro presenta fuertes deformaciones. En planta se necesita cierta curvatura de la fábrica y esto quizá se podría ajustar, en parte, con la flexión de la bóveda, dependiendo de la proporción exacta de piedra y juntas de mortero. Aún más, también se producirá una deformación vertical en el cañón norte/sur debido a las rotaciones en las articulaciones de la bóveda este/oeste. Se observará que gran parte de esta deformación desaparecerá si se abren grietas secundarias paralelas a las grietas del muro, tal y como se muestra en la mitad derecha (norte) de la planta de la figura 19.5(d). Éstas son las grietas de Sabouret. Una grieta de Sabouret y una grieta mural aislarán una porción de la bóveda norte/sur que, por consiguiente, tendrá libertad para funcionar como un arco simple en dirección este/oeste. Este arco salva aproximadamente la luz entre senos contiguos (en la práctica el ancho de este arco, aislado por las grietas, dependerá también de otra serie de factores, entre ellos la forma de la sección transversal principal de la bóveda).

Así, las grietas del primer tipo, en o cerca de la clave, indican la presencia de líneas de articulación en una zona de la bóveda a través de las que se transmiten fuerzas de compresión. Estas fuerzas son aproximadamente perpendiculares a las líneas de articulación. Sin embargo, las grietas del segundo y tercer tipo (las de Sabouret y las del muro) representan la separación completa, potencial o real, de la fábrica; a través de ellas no se pueden transmitir esfuerzos, y éstos discurren paralelos a las grietas. El comportamiento que ilustra la figura 19.5 corresponde a una bóveda cuatripartita cilíndrica ideal de tramos cuadrados. Sin embargo, la patología general de todas las bóvedas de fábrica es exactamente de la misma índole; si son apuntadas, la línea de articulación de la clave se desplazará ligeramente, pero también se formarán las grietas de Sabouret y las del muro; una bóveda de tramos rectangulares tampoco manifestará un comportamiento diferente. Es más, los razonamientos se aplican tanto a bóvedas de arista como a nervadas (y también a bóvedas de abanico, que sostienen una plementería casi plana); sean o no portantes, con la variación de la geometría externa, los nervios de una bóveda gótica (y este es un famoso problema de la historia de la arquitectura tratado someramente más adelante) se verán obligados a manifestar la misma configuración de articulaciones que la bóveda.

La configuración general de grietas de la figura 19.1 (o de la figura 19.5) indica una manera sencilla de calcular las fuerzas. En la figura 19.6 la bóveda cuatripartita se apoya en los nervios cruceros. Para los objetivos del análisis, la bóveda se ha seccionado imaginariamente en una serie de arcos paralelos, cada uno con una sección parecida a la de la figura 19.2 (e), aunque mucho más delgada, y con los arranques en los nervios diagonales. Si, en estas condiciones, es posible encontrar un estado satisfactorio para la bóveda seccionada, es de sentido común

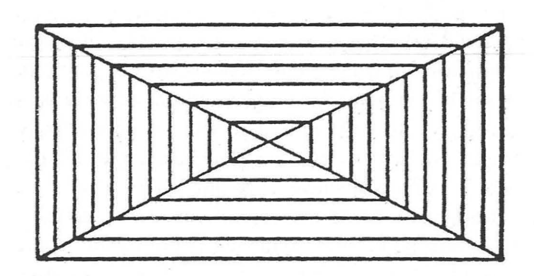


Figura 19.6
Bóveda seccionada en arcos paralelos para determinar las fuerzas fundamentales

pensar (y en este caso el sentido común se apoya en el teorema de la seguridad) que la bóveda inicial sin dividir también será satisfactoria.

Así, se podría analizar cada uno de los arcos y hacer una estimación de las cargas que soportan los nervios; resulta que, de este modo, es bastante fácil llegar a comprender el sistema fundamental de fuerzas en la bóveda original. No obstante, un cálculo de otro tipo del orden de magnitud de los esfuerzos, servirá para dar respuesta al tema de la función de los nervios.

En primer lugar, las tensiones en un arco curvo que soporta su propio peso son del orden de Rw, donde R es el radio (local) del arco y w es el peso específico del material. Se puede observar que este valor de la tensión es independiente del espesor del arco; si el espesor se duplica, el peso se duplicará, pero también lo hará la sección de fábrica capaz de resistir esfuerzos. Una bóveda apuntada con una luz de 15 m puede tener un radio R de unos 10 m. Si el peso específico de la piedra es de 20 kN/m^3, el producto Rw es 200 kN/m^2 ó 0,2 N/mm^2, a comparar con una resistencia de rotura a compresión (para una arenisca media) de unos 40 N/mm^2. Así, la idea de que en la fábrica las tensiones son extraordinariamente bajas se corrobora, al menos para los plementos de la bóveda.

No obstante, estas observaciones se aplican sólo a superficies continuas. En la intersección de los plementos, es decir en las aristas (o en los nervios cruceros), se produce un notable incremento de las tensiones; en una cáscara, un «pliegue» es una línea de concentración de tensiones. En el modelo seccionado de la figura 19.6 se supone que los «pliegues» están reforzados con nervios cruceros; los arcos seccionados arrancan de los trasdoses de los nervios. Ahora, se podrían evaluar las fuerzas sobre los nervios sumando las cargas transmitidas por los arcos seccionados, pero, en cualquier caso, el esfuerzo máximo en uno de los nervios debe ser del orden de la cuarta parte del peso de un tramo de bóveda. Si el tramo mide 15 m por 7,5 m, y la bóveda tiene un espesor de 300 mm, ésta pesará unos 1.200 kN, de modo que cada arco soportará alrededor de 300 kN. Así, un nervio de 300 mm por 300 mm trabajaría a una tensión de unos 3,3 N/mm^2, un valor todavía holgado en comparación con una resistencia a rotura de 40 N/mm^2.

Se observará que un nervio de 300 mm por 300 mm se puede imaginar contenido dentro de la plementería de la bóveda, que tiene un espesor de 300 mm. Por tanto, si una bóveda de estas dimensiones se construye sin nervios, el análisis anterior indica que el nivel de tensiones en la plementería, de unos 0,2 N/mm^2, crecerá bruscamente en las proximidades de las aristas hasta alcanzar unos 3 N/mm^2. Habrá una gran concentración de tensiones, pero el nivel es aún bajo comparado con la resistencia de la piedra. Así pues, siempre que el encuentro de los plementos sea suficientemente regular y el mortero lo bastante resistente, es perfectamente posible que la bóveda tenga éxito, por así decirlo, al construir en su interior sus propios nervios.

Las articulaciones (grietas) de la figura 19.5(d) producen un desajuste en la geometría de las bóvedas norte/sur que, a su vez, conduce a la separación de la plementería de la bóveda a lo largo de las grietas de Sabouret, aproximadamente paralelas en planta a las anteriores. La dirección de estas grietas indica que la «división» de la figura 19.6 proporciona una idea razonable del comportamiento de la bóveda. No obstante, hay que recalcar que la bóveda sigue siendo una estructura hiperestática, por lo que, a pesar de las indicaciones de las grietas, carece de sentido preguntarse por la distribución «real» de fuerzas. Lo que se puede decir es que la configuración de la figura 19.6 es razonable y, lo que es más, sea o no razonable la configuración de la figura 19.6, los cálculos de la estabilidad de la bóveda basados en esa configuración son seguros.

Además, las conclusiones generales sobre la función estructural de los nervios no se verán afectadas por las distintas configuraciones adoptadas para el

análisis. Un pliegue agudo en la superficie de la cáscara, como el que se produce en la intersección de los plementos curvos de la bóveda, conducirá a una fuerte concentración de tensiones; si en el pliegue hay un nervio, éste ayudará a soportar la bóveda, pero no es absolutamente necesario. Así, los nervios cruceros de una bóveda cuatripartita surgen con una posible función estructural pero, por supuesto, también son útiles durante la construcción. Facilitan el tendido de los plementos de las bóvedas, posibilitan un importante ahorro de cimbras y cubren las intersecciones mal aparejadas de los plementos de la bóveda, cuando se encuentran en las aristas. Por último, los nervios se han considerado, a veces, estéticamente satisfactorios, pues definen visualmente el «flujo de las fuerzas» (aunque no con mucha precisión) de la bóveda de la catedral gótica.

En una bóveda cuatripartita formada por la intersección de cañones, apuntados o circulares, y con la línea de clave horizontal, no hay pliegues ni discontinuidades en los muros de la nave ni sobre los arcos perpiaños. En estas circunstancias, ni los arcos formeros ni los perpiaños colaborarán al soporte de la bóveda y, en realidad, puede que sólo soporten su propio peso; lo mismo puede afirmarse de los nervios de la línea de clave, si es que los hay. Si ésta no es horizontal, como por ejemplo cuando cada tramo de la bóveda es marcadamente cupuliforme, aparecerá un pliegue sobre los arcos perpiaños que entonces tendrán que soportar parte de la carga. Por el contrario, las ligaduras o cualquier configuración más compleja de nervios, aplicadas a la superficie continua del casco de la bóveda, tienen una función estrictamente ornamental.

20

Cálculo de estribos en puentes de fábrica

Las reglas medievales de construcción eran esencialmente numéricas; la ciencia de la estática se encontraba aún sin desarrollar, y el proyecto de estructuras de fábrica se basaba necesariamente en reglas de proporción.[1] Esto no significa, sin embargo, que los constructores medievales no tuvieran noción de la idea de fuerza; de hecho, las pruebas periciales que tuvieron lugar en Milán hacia 1399[2] hacen uso de una palabra específica para referirse a la acción de los arcos contra sus estribos: *archi spiguti non dant impulzam contrafortibus* (los arcos apuntados no producen empuje). Esta afirmación es, desde luego, equivocada (y fue corregida ya en su momento), pero el tema en cuestión era averiguar si los estribos eran suficientemente resistentes. Los arcos apuntados y peraltados empujan menos que los circulares rebajados; ¿qué estribos deben disponerse en cada caso?

Para responder a esta pregunta sin hacer uso del análisis estático se precisa algún tipo de construcción geométrica. Dicha construcción puede encontrarse en la regla de Blondel, descrita en su *Cours d'Architecture.*[3] En la figura 20.1, la longitud de arco ACDB (de cualquiera de los arcos) se divide en tres partes iguales mediante los puntos C y D. DB se prolonga hasta hacer DB = BE. Entonces el punto E define el borde exterior del estribo. Blondel señala que un arco de medio punto debe tener un estribo de un cuarto de la luz, que los arcos peraltados precisan menos estribo, y los arcos rebajados más.

Estas consideraciones acerca del empuje de distintas formas de arco son intuitivamente correctas, y la regla de Blondel proporciona, ciertamente, estribos acordes con la intuición. El análisis de un arco semielíptico de semiejes a y b (es decir, un arco de luz $L = 2a$ y flecha b) nos lleva, de acuerdo con la regla de Blondel, a un estribo de $L/(3+\beta^2)$, siendo $\beta = b/a$. Así, para $\beta = 1$, arco de medio punto, tendremos un estribo de $L/4$, que disminuirá para un arco más peraltado. Para un arco muy rebajado se llega al interesante límite máximo de $L/3$.

La construcción de Blondel se citaba en todos los manuales de su época, por ejemplo en el de Derand,[4] pero ya en 1729 Bélidor, en su *Science des ingenieurs,*[5] la criticaba; crítica que se repetía en la edición de 1777 del *Cours d'Architecture* de Jacques-François Blondel[6] (sin parentesco alguno con François Blondel). Ambos autores señalan que el espesor del arco no se tiene en cuenta, ya que para la construcción tan sólo se utiliza su intradós. Quizá sea más relevante que no se considera la altura de los estribos, lo que parece ser un defecto evidente. Sin embargo, la intuición puede engañar en este caso. Moseley,[7] en 1843, demostró que un estribo que soporta un empuje dado, puede tener un espesor finito y constante, independientemente de su altura. Como ejemplo aproximado (en el que se ignora el peso $2W$

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Calculation of abutment sizes for masonry bridges,» *Colloquium on History of Structures, International Association for Bridge and Structural Engineering, 1982* (London: Institution of Structural Engineers, 1984). Traducción de Jorge Conde Conde.

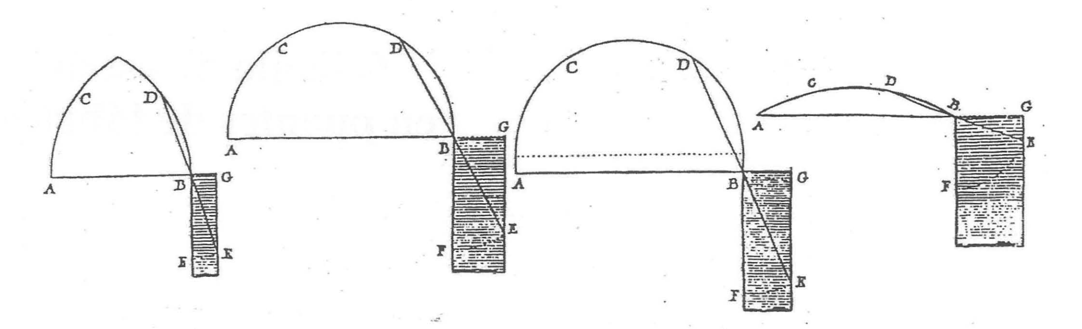


Figura 20.1
Blondel (1683)

del puente), el empuje del arco H por unidad de ancho del puente es soportado por un estribo de ancho D y altura Y (figura 20.2); el material tiene un peso específico ρ por unidad de superficie. Si el estribo se encuentra a punto de volcar,

$$HY = \frac{1}{2} D(\rho YD)$$

de donde

$$D = \sqrt{\frac{2H}{\rho}} \qquad (1)$$

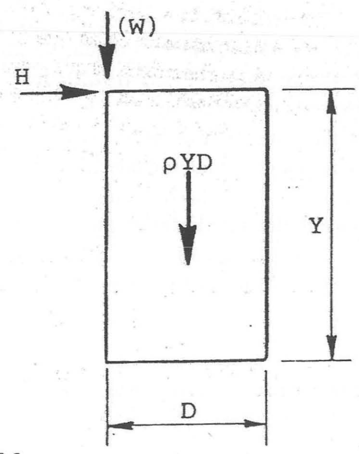


Figura 20.2

resultado que no depende de la altura Y del estribo. De hecho, si Y es lo bastante grande, la ausencia del peso W tendrá escaso efecto en el valor de D.

La figura 20.3 muestra medio arco construido del mismo material que el estribo; supongamos que su peso es del orden de $\rho ab/2$ y que actúa en el centro de gravedad situado a una distancia, digamos, $a/4$ del estribo. Para estos valores «inventados», simples consideraciones de equilibrio nos dan un valor de $H = \rho a^2/8$ (¡independiente de la flecha del arco!), así que sustituyendo en la ecuación (1), el ancho del estribo será $D = L/4$. La regla de Blondel, recogida por un hombre práctico para su uso práctico nos conduce, por supuesto, a un resultado sensato.

En la ecuación (1) hay implícito un «coeficiente de seguridad», puesto que no se ha tenido en cuenta el peso del puente, y un análisis preciso de cada puente en particular nos dará el valor de este coeficiente. El coeficiente implícito en la regla de Blondel es indeterminado. Sin embargo, la regla de Blondel puede compararse con la ecuación (1) para casos reales. En la tabla 20.1 se proporcionan datos de un pequeño puente, el del Clare College en Cambridge, construido en 1635,[8] y del puente de Telford en Over, de 1828.[9]

Para el caso del puente del Clare College, el valor «real» de D/L se refiere a las dimensiones de una de las pilas del río, que se aproxima, como puede verse, tanto al valor de Blondel ($1/(3+\beta^2)$) como al resultante de aplicar la ecuación (1). En el puente de

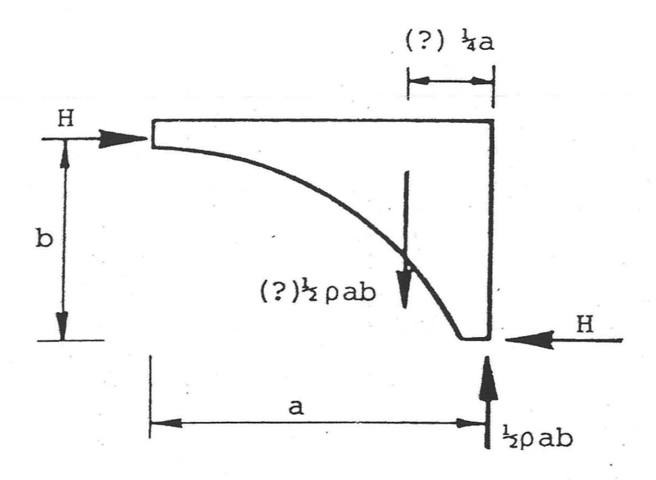


Figura 20.3

Over, los estribos se apoyan sobre muros de aleta, es decir, sobre auténticos contrafuertes adicionales.

La proporción 1/4 entre estribo y luz del puente en Clare College, concuerda con las empleadas habitualmente en los siglos XVII y XVIII. En 1717 Gautier[10] cita diversas fuentes, dando como regla propia la proporción 4/15. La regla de Blondel del siglo XVII resultaba, sin embargo, mucho más elaborada que una simple proporción; era un intento de tomar en consideración la forma del arco. Por otra parte algo parecido se conocía con, al menos, un siglo de anterioridad; por ejemplo por Rodrigo Gil de Hontañón que vivió desde ca. 1500 hasta 1572.

Algunos escritos de Gil de Hontañón fueron incorporados por Simón García en su tratado de arquitectura de 1681. La figura 20.4 reproduce una de las ilustraciones de la edición del siglo XIX. Esta detallada construcción difiere de la de Blondel: el punto A (no señalado en el original) es el centro del intradós (semicircular); la diagonal AC del cuadrado ABCE corta al intradós en D; la línea BD corta a EK, perpendicular a BE, en K; y así EK = EF es el estribo buscado.[11]

La construcción viene descrita con toda claridad por Simón García, pero el texto original ha sufrido, con toda seguridad, alguna alteración. No parece haber necesidad de una construcción tan sumamente elaborada para un simple arco de medio punto. Cabe imaginar que originariamente fuera un simple ejemplo de aplicación de una regla más general. A pesar de todo, el texto de Simón García deja claro que ABCE es cuadrado, que el intradós es semicircular, etc. El estribo puede calcularse analíticamente a partir de la geometría como $(1 - 1/\sqrt{2})$, es decir, 0,293 veces la luz; el mismo Gil de Hontañón da como regla alternativa 1/4 de la luz (lo que Kubler[12] afirma tiene un «coeficiente aún mayor de seguridad», evidentemente sin haber calculado el valor 0,293).

Tabla 20.1

						Valores de D/L		
	Luz L (m)	Altura (m)	β	H (kN/m)	ρ (kN/m^3)	«Blondel»	Ecuación (1)	Real
Clare	6,72	3,36	1	39	20	1/4	0,294	0,26
Over	45,72	10,67	0,467	1.124	24	0,311	0,212	0,19

Un intento de extrapolar la construcción al caso de arcos no semicirculares, tomando el cuadrado ABCE como un rectángulo, es obviamente incorrecto; los arcos peraltados necesitarían grandes estribos, y los rebajados estribos pequeños. A efectos de cálculo puede resolverse analíticamente la construcción para el caso de intradós semielíptico, para el que el ancho de estribo vendrá dado por una función bastante sencilla de β ($\beta = b/a$, la proporción entre los semiejes de la elipse). Para valores pequeños de β, (arcos rebajados), el ancho de estribo se aproxima mucho a $0{,}293\beta$; para valores grandes de β, el ancho tiende al límite $1/\sqrt{2}$.

Rodrigo Gil da también otra construcción (figura 20.5). Se comienza dividiendo la mitad del intradós en tres partes (marcadas por B, C, y D), pero el proceso se vuelve ilógico e inconsistente, incluso para el caso del semicírculo. Parece probable que Simón García en el siglo XVII (y por supuesto el editor de 1868) no comprendieran la intención de Rodrigo. Existen precedentes históricos; los expertos de Milán, en 1399, tampoco interpretaron correctamente las reglas de las logias para el cálculo de los estribos de las bóvedas. El mismo Rodrigo dice explícitamente que sus reglas son también válidas para el cálculo de dichos estribos; cualesquiera que fueran las reglas medievales, las de Rodrigo están directamente relacionadas con sus predecesoras del gótico clásico.

En este sentido, resulta interesante comparar dos edificaciones de aproximadamente el mismo tamaño, la Sainte Chapelle del gótico clásico (siglo XIII), y la capilla del King's College (siglo XV), cercana a la época de Rodrigo. Las figuras 20.6 y 20.7 muestran las secciones de ambos edificios a la misma escala; la Sainte Chapelle es ligeramente más alta, y la capilla del King's College un poco más ancha y tiene más tramos. Se ha superpuesto la aplicación de la regla de Blondel, poniendo en evidencia la timidez del edificio inglés, posterior.

Hubo un curioso período de tres siglos, del XIV al XVII, durante el que la interpretación de las reglas empíricas anteriores era deficiente, y la recién nacida

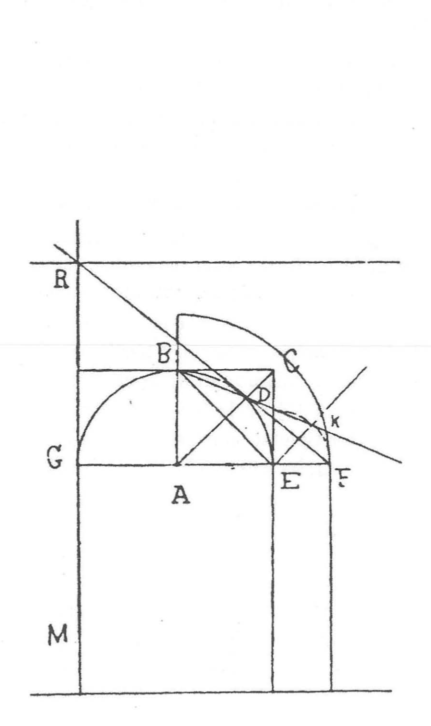


Figura 20.4
Rodrigo Gil

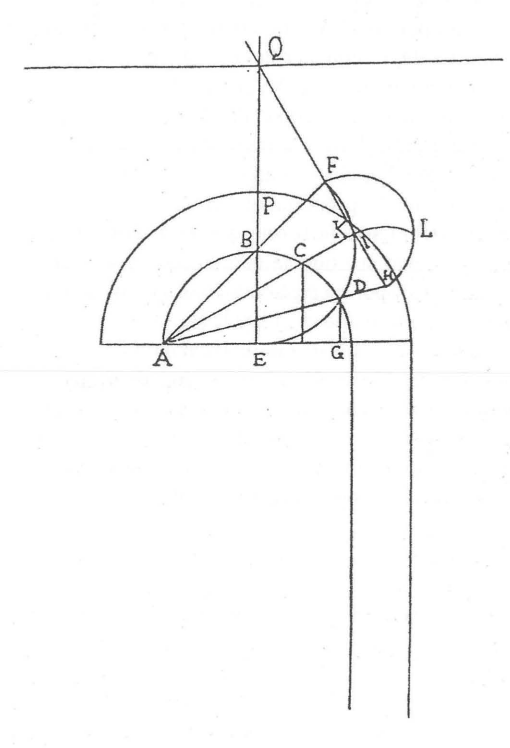


Figura 20.5
Rodrigo Gil

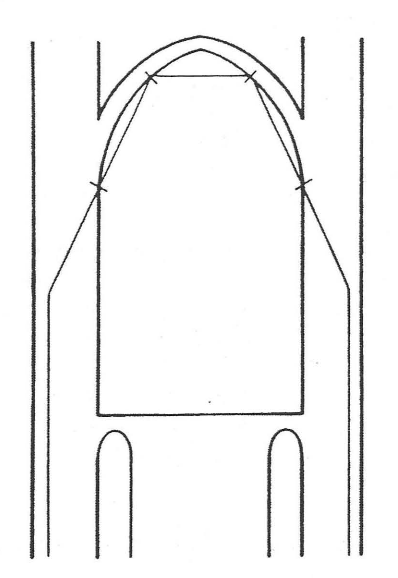


Figura 20.6
Sainte Chapelle, París

Figura 20.7
Capilla del King's College, Cambridge

ciencia de la mecánica era aún incapaz de suministrar un análisis «adecuado» del comportamiento de las bóvedas. El siglo XVIII trajo consigo la aparición de análisis de este tipo,[13] si bien los primeros intentos de aplicar la estática fueron, en ocasiones, bastante desacertados. Por ejemplo, el análisis de Wren que se muestra en la figura 20.8, es una aplicación de la ley de la palanca: un arco estará en equilibrio si (considerando el semiarco) «N es equiponderante con M a ambos lados de la perpendicular AB.»[14]

Wren parece poseer una noción algo equivocada de la estática, siendo sus principios estéticos igualmente extraños. Asegura que «hay dos Causas de la Belleza, natural y consuetudinaria. La natural proviene de la Geometría, y consta de Uniformidad (es decir, Igualdad) y Proporción. La consuetudinaria proviene de la Costumbre de nuestros Sentidos hacia Objetos que nos agradan por otros Motivos, igual que la Familiaridad o la Inclinación particular pueden encender el Amor hacia Objetos que en sí

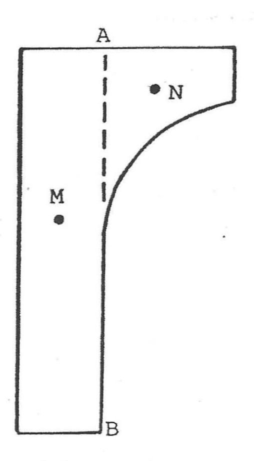


Figura 20.8
Christopher Wren

mismos no son Bellos. En ello radica el Motivo habitual del Error; aquí se pone a prueba el juicio del Arquitecto: pero la auténtica Prueba es siempre la Belleza natural o geométrica.»[15]

Estas ideas llevaron a Wren a un énfasis en la simetría visual; el semiarco de la figura 20.8 debe estar equilibrado con exactitud, visualmente, por otro semiarco idéntico, y seguramente Wren comprendió (aunque su principio de la equiponderancia parece negarlo) que los dos semiarcos se equilibran estáticamente entre sí. En cualquier caso, la visión del arco incompleto de los arbotantes producía a Wren tal aversión, que incluso escondió los proyectados por él para San Pablo tras los grandes muros exentos de la fachada.

Resulta interesante ver a dónde nos lleva la regla de la equiponderancia de Wren. La figura 20.9 muestra el semiarco de la figura 20.3 junto con un estribo; la equiponderancia de N y M nos da

$$\frac{1}{4}a\left(\frac{1}{2}\rho ab\right)=\frac{1}{2}D(\rho bD)$$

o bien

$$D=\frac{a}{2}=\frac{L}{4}$$

En progresión histórica, Rodrigo, Blondel y Wren parecen estar de acuerdo en que un estribo de un cuarto de la luz es aproximadamente correcto.

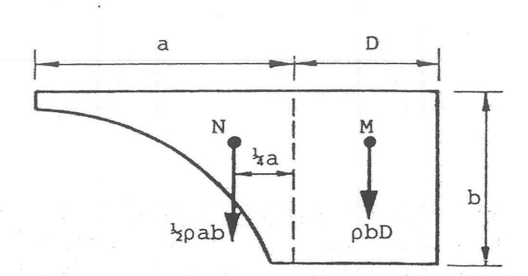


Figura 20.9

21

Los pilares del crucero del Panteón de París

Rondelet, en el segundo libro de la séptima edición (1834) de su *Traité de l'art de bâtir*,[1] dedica varias páginas a analizar un defecto particular en la construcción de sillería de la época. La palabra que utiliza para el defecto es *vice*, junto con las expresiones *vice de construction* y *construction vicieuse*; en este ensayo, para calificar el defecto, se empleará el adjetivo «vicioso». En ediciones anteriores, por ejemplo las de 1808 y 1812, se encuentra el mismo análisis, sin embargo no se halla a continuación la nota sobre Santa Genoveva que se añadió a la edición de 1834.

El defecto procede de la falta de cuidado que en general se tenía (en París a finales del siglo XVIII) en la preparación de los lechos de las piedras (Rondelet admite que hay ejemplos en los que se puede encontrar un buen trabajo). Los antiguos tenían un gran cuidado para conseguir el apoyo sobre la totalidad de las superficies de contacto de dos piedras contiguas, lo que a menudo implicaba realizar el acabado de las piedras después de haberlas presentado en obra. Por el contrario, en las obras modernas, las piedras se terminaban en el taller y los desajustes se absorbían con el mortero.

Además (y esto es lo que fomentaba la manera viciosa de construir), el trabajo realizado se medía y presupuestaba en función de las superficies acabadas; lo importante era la apariencia externa de la fábrica. En consecuencia, los tendeles y las juntas se hacían mal y, como se verá enseguida, son los bordes de las piedras los que, por tanto, soportan la carga. Cada piedra se colocaba en su lugar sobre calzos de madera (roble) y sobre cuñas, de modo que quedase a nivel absorbiéndose así los defectos del corte. Después se introducía en la junta el mortero con la ayuda de una *fiche*, una paleta dentada (Fig. 7 de la lámina XV de Rondelet, aquí figura 21.1); con esta herramienta se introducía el mortero. Para poder enrasarlo bien entre las piedras, las juntas deben tener un espesor de, al menos, siete u ocho líneas. (Rondelet emplea como unidad de medida la *ligne*, la doceava parte de una pulgada, es decir unos 2,25 mm. También utiliza el nuevo metro (1797) y sus divisiones, pero no parece estar familiarizado con las nuevas unidades.) El *pied* francés medía unas 12,8 pulgadas, 32,5 cm, y la *pouce* unas 1,06 pulgadas ó 2,7 cm). Sin embargo, una junta de 18 mm de espesor sería inaceptable en el acabado de una superficie de sillería y, por tanto, se tallaba en el borde del sillar una tirada con un resalto de 4 ó 5 pulgadas, de modo que aparentemente las juntas se han reducido hasta 3 mm. Así, cada lecho de un sillar presenta una tirada de 4 ó 5 pulgadas de ancho, quedando el interior rehundido ligeramente de manera que el espesor de la junta de la obra acabada es quizá cinco veces mayor que el del borde. (En la figura 21.2, que reproduce parte de la lámina XIII de Rondelet, se muestran piedras preparadas de esta manera.)

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The crossing Piers of the French Panthéon», *The Structural Engineer* 63 (1985): 230-34. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

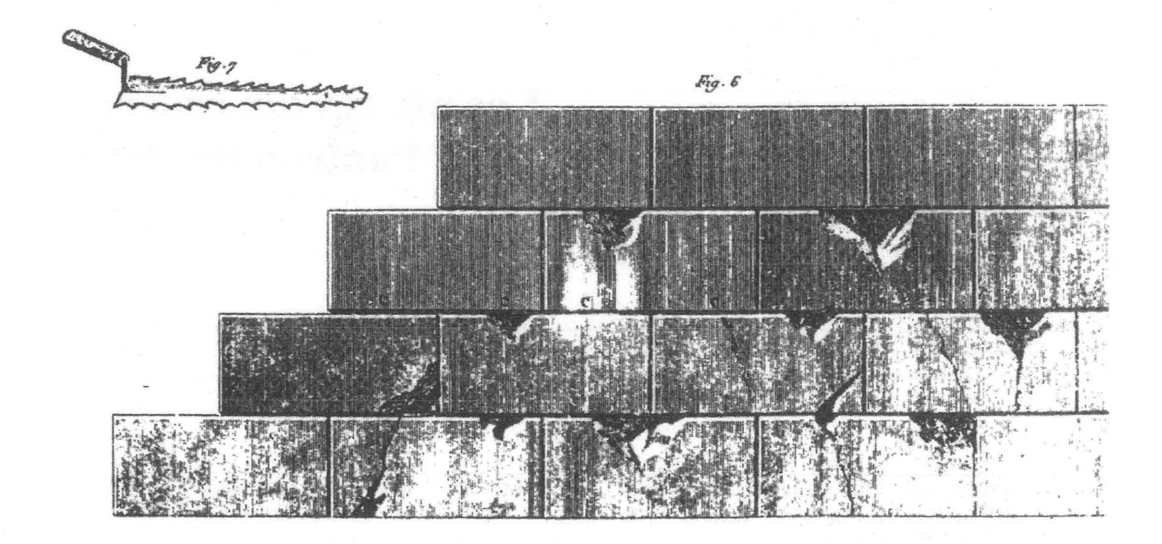


Figura 21.1

Rondelet se confiesa asombrado de que un arquitecto tan eminente como Monsieur Patte abogase en su tratado de 1769[2] por este sistema de preparar y asentar la fábrica. En efecto, Rondelet cita dos páginas de Patte y utiliza sus ilustraciones (aquí las figuras 21.1 y 21.2). Patte recomienda el empleo de calzos de roble de 4 mm de espesor como separadores entre las juntas; estos calzos se disponen alejados de las esquinas para evitar que la piedra se fracture. Después la *fiche* (llamada *scie* por Patte) se utiliza para introducir el mortero, etc. Este insólito aparejo, utilizado en París y otros lugares, conduce a la rotura de la sillería; el mortero se retrae al secarse, y todos los esfuerzos se trasmiten a través de los calzos de madera. Éste fue, por desgracia, el sistema constructivo en Santa Genoveva, y las consecuencias se manifiestan en la sillería rota y desconchada que ilustra la figura 21.1.

Este absurdo método de construcción, que reúne todos los defectos posibles, sólo puede haber sido concebido por malos obreros o contratistas codiciosos (continúa Rondelet). Sin embargo, el empleo de la resistente piedra de París permite que la mayoría de los edificios se puedan construir sin peligro de esta manera; los vicios se vuelven peligrosos cuando la fábrica soporta una gran carga. Por eso, los muros exteriores de Santa Genoveva se construyeron así, y resultaron satisfactorios. Fueron los pilares, más cargados, y en particular los cuatro que soportan la cúpula, los que resultaron insuficientes.

La figura 21.3, de Fergusson,[3] muestra la planta del Panteón y la figura 21.4 un detalle de la zona del crucero según Patte,[4] antes de que Rondelet recreciera los pilares alrededor de 1806/11. A continuación se resume la cronología de la construcción y sus daños. En Mathieu[5] se pueden encontrar detalles adicionales, así como la relación minuciosa del conflicto de Patte con Soufflot, el arquitecto del Panteón.

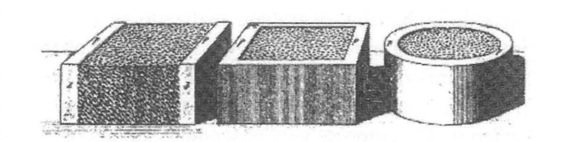


Figura 21.2

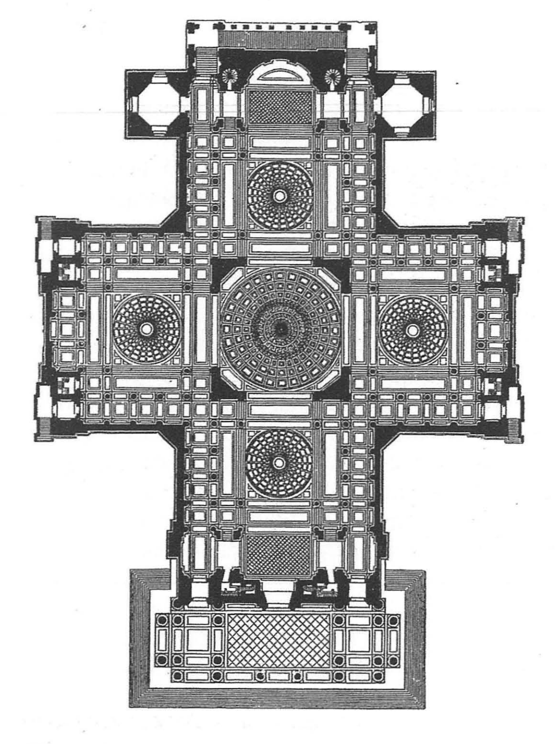


Figura 21.3

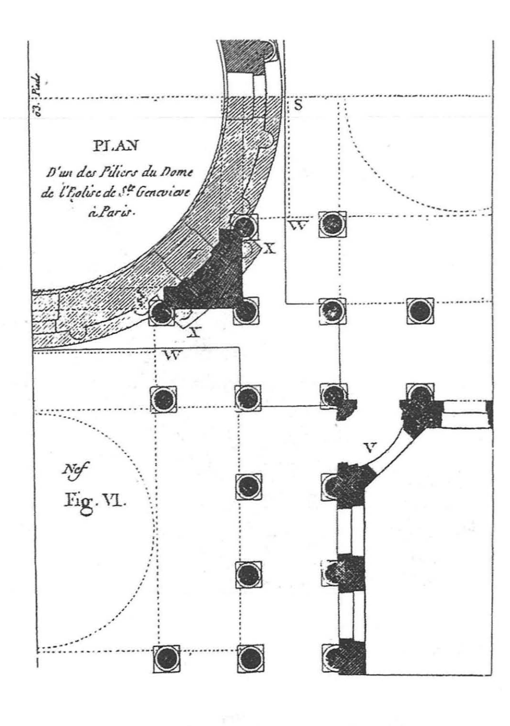


Figura 21.4

Tabla cronológica

1756 Comienza la construcción del edificio según el proyecto de Soufflot.

1770 *Mémoire*[4] de Patte sobre la cúpula de Santa Genoveva y la insuficiencia de los pilares del crucero.
Rondelet se hace cargo de la obra (a las órdenes de Soufflot).

1771 *Mémoire*[9] de Gauthey sobre la mecánica de las cúpulas.

1776 Comienza la construcción de la cúpula.
Primeros síntomas de alarma en los pilares tras el descimbrado de los cuatro arcos y de las pechinas.

1777-78 Los defectos aumentan a medida que la obra prosigue.

1779 Se trepanan las juntas de los pilares.

1780 Muere Soufflot.

1785-90 Se termina la cúpula.

1794 Se retiran todas las cimbras.
Soufflot-le-Romain (sobrino de Soufflot) se hace cargo de la obra con Rondelet; a partir de 1795 es el único encargado.

1796 La comisión de «Arquitectos» informa al Ministro sobre el estado de los daños.

1797 Se constituye una comisión formada por ingenieros de Ponts et Chausseés.
Algunos matemáticos entrar a formar parte de la comisión.
Mémoire[6] de Rondelet sobre el Panteón.
Se realizan catas en los pilares.

1798 La nueva comisión hace un informe; Gauthey y Patte entran a formar parte de la misma.
Mémoire[10] de Gauthey sobre el Panteón.
Gauthey y Prony miden los asientos de los pilares.

1800 Nueva comisión de miembros del Instituto.
Se levanta un apeo.

1806 Comienzan las obras de restauración.

1811 Rondelet termina las obras.

1829 Muere Rondelet.

LA POLÉMICA SOBRE LOS PILARES

La *Mémoire*[6] de Rondelet narra la historia de la construcción hasta 1797. Ésta se divide en cuatro partes aproximadamente iguales, de las que la primera se ocupa de la descripción del interior y el exterior de la iglesia, enumerando los elementos decorativos, las esculturas etc. La segunda parte describe cómo se construyó la iglesia. Rondelet afirma que hay tres factores que aseguran la resistencia de un edificio, a saber, la buena cimentación, la buena ejecución y la adecuada proporción de los muros y soportes.

En lo tocante a la cimentación, está claro que se había ejecutado con gran cuidado. Se realizaron numerosos sondeos en el terreno arcilloso, algunos con una profundidad de hasta 80 pies, y se rellenaron metódicamente con mampostería concertada. Toda la cimentación era de piedra, e incluía arcos invertidos, de acuerdo con los preceptos de Alberti.

El requisito de una buena ejecución da a Rondelet la oportunidad de referir sus hallazgos en relación a la construcción «viciosa» de la fábrica del Panteón. En concreto le da la oportunidad de atacar al Ciudadano Patte, a quien hace responsable de defender este sistema constructivo. Cita a Patte directamente, alude al uso de calzos de roble como separadores entre las piedras, proporciona una descripción detallada de la colocación de mortero con la *fiche*, etc.

Sin embargo, es en la tercera parte donde Rondelet organiza su ofensiva contra el Ciudadano Patte; (en 1797 Patte tenía 74 años; murió en 1814 a la edad de 91 años). En 1770 Patte había publicado una *Mémoire*[4] en la que «demostraba» que los cuatro pilares del crucero eran absolutamente insuficientes para soportar el peso de la cúpula cuando ésta se construyese. Expuesta de una manera muy sencilla (como Patte hace en su introducción), la propuesta consistía en levantar un muro de 3 pies y 9 pulgadas de espesor y 80 pies de altura, para colocar sobre éste otro, de 8 pies de espesor y 40 de altura, y someter la parte superior del segundo muro al empuje de la doble cúpula. El primer muro representa los cuatro grandes arcos torales que soportan las pechinas, que a su vez soportan el tambor de la cúpula. El segundo muro representa el tambor; una cúpula de 63 pies de diámetro requiere, de acuerdo con las mejores normas de proyecto (y Patte cita las reglas de Fontana), un tambor con muros de 8 pies de espesor.

La cuestión era, por supuesto, *la poussée des voûtes*, uno de los problemas más importantes de la ingeniería civil, que preocupó a científicos e ingenieros durante todo el siglo XVIII.[7] Patte conoce la obra de Parent, La Hire, Frézier y Bélidor, así como la de Couplet, quien realizó considerables progresos en la teoría de arcos en 1729-30. (Evidentemente, la memoria de Coulomb[7] de 1773 no se había publicado todavía.) Sin embargo, todas estas obras versaban sobre problemas esencialmente bidimensionales, y se referían a los arcos; no estaba claro cómo se podía aplicar este análisis a una cúpula de revolución. Poleni había abordado el problema con brillantez en su análisis de la cúpula de San Pedro[8] en 1748, pero su obra no se conocía en Francia, a pesar del hecho de que Patte hizo estudios de las cúpulas de San Pedro, de San Pablo en Londres y, en París, las de la Sorbona, Val-de-Grace y los Inválidos. Las plantas comparadas de estos edificos muestran realmente que los pilares proyectados para Santa Genoveva eran, aparentemente, más esbeltos que los de las otras iglesias.

La *Mémoire* de Patte, de un arquitecto, fue refutada inmediatamente por Gauthey,[9] un ingeniero, en 1771; Gauthey «demuestra» que los cuatro pilares del crucero eran más que adecuados para la cúpula proyectada. Gauthey repasa la obra de La Hire y otros, pero señala, con justicia, que la objeción de Patte es que las dimensiones de los soportes son sólo de 3 pies y 9 pulgadas, mucho menores que los empleados en la práctica habitual (p. ej. la regla de Fontana de 1/10 del diámetro, daría una dimensión de 6 pies y 3 pulgadas). Gauthey dice que Patte está realmente equivocado al citar una cifra de 3 pies y 9 pulgadas; si se tiene en cuenta la forma en que están construidos los arcos, la cifra correcta debería ser de $5^1/_2$ pies.

No obstante, todo esto en realidad es irrelevante. Lo que aquí se debate es la incapacidad para comprender el concepto de fuerza inclinada, y qué vuelo hay que tener en cuenta cuando se construye un muro que no se apoya directamente encima de otro, sino que tiene una línea media excéntrica y el conjunto está sometido a empujes laterales, además de a la fuerza de la gravedad (esta disposición, en francés se denomina *porte-à-faux,* lo que sugiere un significado peyorativo). Para Gauthey, los cuatro pilares del crucero soportan la carga vertical y el sistema general de contrarresto, proyectado por Soufflot para resistir el empuje lateral, proporciona un espesor

efectivo, en los términos de Patte, no de 3 pies y 9 pulgadas sino de más de 14 pies.

Gauthey comprende perfectamente el funcionamiento estructural de la cúpula y en una especie de *tour-de-force* aparentemente concebido para asombrar al lector, demuestra que los cuatro pilares se podrían suprimir completamente, a condición de que se disponga una fábrica inclinada, una especie de sistema de arbotantes interno, para transmitir el empuje de la cúpula al terreno. Sin embargo, no defiende ésto como un sistema para continuar la construcción. Por el contrario, cree (y se demostraría que estaba en lo cierto) que el proyecto original de Soufflot es más que adecuado.

En lo que a Rondelet respecta, Gauthey podría igualmente no haber escrito esta *Mémoire*. Veintiseis años más tarde, Rondelet la ignora por completo en su ataque a Patte. En 1770 Patte había dicho que los pilares eran totalmente inadecuados debido al empuje de la cúpula, mientras que, por cuanto Rondelet sabía y pudo demostrar, las cúpulas esféricas no producían empujes. En la tercera parte de su *Mémoire* de 1797, Rondelet repasa brevemente los argumentos.

Admite que si una bóveda de cañón se divide en arcos paralelos, y se determina el empuje de cada arco, la suma de los empujes de cada uno de ellos dará el empuje total de la bóveda original. No obstante en el caso de la cúpula es diferente. Si la cúpula se divide en gajos y se determinan los empujes, los empujes de gajos contiguos no se pueden sumar directamente; actúan en direcciones distintas. El efecto total se reduce y, de hecho, dice Rondelet, una cúpula se puede dividir en dos y cada mitad se sostiene; las dos mitades no interactúan.

Para demostrar esto, Rondelet hizo un modelo de una cúpula, y lo dividió en ocho gajos de 45°; cada gajo lo subdividió a su vez en dos, de manera que la cúpula constaba de 16 gajos. El modelo se levantó sobre un tambor circular del mismo espesor, formado por ocho partes, y el conjunto se sostenía, como también lo hizo al sustituir el muro por columnas. Así demostró experimentalmente que las cúpulas esféricas no producen empujes.

Además, Rondelet construye una teoría para llegar a la misma conclusión. El círculo de 45° de latitud divide a la cúpula en dos partes, la que va desde el ecuador hasta los 45° tiende a desplomarse hacia adentro mientras que la otra tiende a empujar hacia afuera. Rondelet «demuestra» que los momentos de estas fuerzas son exactamente iguales y opuestos.

Gauthey refuta todo esto en 1798 en una nueva memoria[10] sobre los daños del Panteón. La memoria trata fundamentalmente de la descripción de la patología y los trabajos de reparación; sin embargo, en las últimas páginas, Gauthey afirma que la teoría de cúpulas de Rondelet es un disparate y que los ensayos no estaban documentados correctamente (al parecer el casquete superior de la cúpula era de una sola pieza).

En realidad Gauthey, el ingeniero, probablemente había abandonado toda esperanza de convencer a Rondelet, el arquitecto, de la verdadera mecánica de las cúpulas. La primera comisión de 1796, la de los cuatro arquitectos (incluido Rondelet), había recomendado al Ministro que el procedimiento más adecuado a seguir era aumentar el tamaño de los pilares. Se comenzó la obra, pero Soufflot-le-Romain se opuso. Se constituyó una segunda comisión que constaba de los mismos cuatro arquitectos ahora ampliada con siete ingenieros de Ponts et Chaussées. No consiguieron ponerse de acuerdo para realizar un informe conjunto; los arquitectos insistían en su recomendación, mientras los ingenieros emitieron un informe por separado que defendía la construcción de arbotantes.

El Ministro amplió de nuevo la comisión, esta vez con dos matemáticos y ahora, como quizá era previsible, recibió tres informes distintos. Los arquitectos e ingenieros reiteraron sus diferentes puntos de vista; los matemáticos opinaban que las juntas de la fábrica eran muy estrechas. La siguiente comisión estaba constituida por arquitectos, ingenieros y matemáticos y constaba sólo de seis miembros, incluido el ingeniero Prony del Instituto. A esta comisión se unieron enseguida Rondelet y Patte pero, al parecer, hasta la formación de aún otra comisión —la de miembros de la sección de arquitectura del Instituto— las obras del Panteón no pudieron reanudarse.

LAS OBRAS DE REPARACIÓN

Rondelet continuaba la tercera parte de su *Mémoire* de 1797 con algunos datos sobre las tensiones en los pilares principales comparadas con la resistencia de la piedra. En 1774 Soufflot había construido una máquina de ensayos para determinar la resistencia de rotura a compresión de la piedra empleada en la

construcción de los pilares. Poco después, la escuela de Ponts et Chaussées (es decir Gauthey) llevó a cabo otros ensayos, y el propio Rondelet hizó una tercera serie. Como resultado se obtuvieron tres estimaciones de la resistencia de la piedra:

	libras/pie²
Soufflot	1.074.240
Ponts et Chaussées	653.760
Rondelet	417.240

Rondelet calculó el peso de un cuarto de la cúpula y la fábrica asociada (es decir la carga soportada por un pilar) en 7.449.980 libras y el área de la sección transversal en 131 pies². Tomó un factor de seguridad de 2 para los valores de la resistencia de rotura y, con estos datos, llegó a los siguientes valores para la carga admisible de un pilar (en libras):

70.362.720
42.821.280
27.329.220

Incluso la estimación más baja (los propios ensayos de Rondelet) proporcionaban un margen suficiente si se compara con los 7,5 millones de libras que pesa un cuarto de cúpula.

Sin embargo, estos cálculos no tenían en cuenta el efecto de los «vicios» de la construcción. Rondelet considera que sólo era eficaz la cuarta parte de la sección transversal del pilar, de manera que las cifras anteriores se reducen con este factor a (libras):

17.590.680
10.705.320
6.832.305

(Kerisel[11] piensa que el factor debería ser un sexto en vez de un cuarto, considerando en sus cálculos un borde exterior de 4 pulgadas para el área portante.)

Gauthey[10] confirma estos datos generales. Su propia estimación de la carga sobre un pilar a un tercio de la altura, donde los defectos eran más acusados, es de 7.525.042 libras, cargando sobre una superficie de 135,672 pies².

Sin embargo, Patte había dicho en 1770 que los pilares eran insuficientes porque, en efecto, no proporcionaban el contrarresto necesario para la cúpula. Gauthey refutó esto en 1771, diciendo que otras partes del proyecto suministraban suficiente contrarresto. Rondelet dejó claro en la cuarta parte de su *Mémoire* de 1797, en la que describe los diversos daños del edificio, que los cuatro arcos principales del crucero y las pechinas se descimbraron en 1776. La carga que soportaba cada uno de los cuatro pilares en esa época era de unos 2 millones de libras, es decir cada pilar estaba trabajando aproximadamante a la tercera parte de la carga total; y fue entonces cuando los cuatro pilares que Patte consideraba inadecuados empezaron a mostrar los primeros signos de alarma.

Las obras de 1777-78 incrementaron las cargas hasta algo más de la mitad del total; los daños aumentaron en consonancia. La mayoría de éstos se localizaban cerca de los puntos de concentración de tensión originados por los calzos y Gauthey[10] afirmaba que eran de dos clases, tal y como mostraba el dibujo de Rondelet (figura 21.1). O bien se habían desconchado algunas piedras, o habían aparecido algunas grietas verticales o casi verticales (esto último, según Gauthey, no habría afectado a la resistencia de los pilares).

En 1798 Gauthey estaba seguro de que los defectos se debían a la construcción «viciosa» y que no tenían nada que ver con la insuficiencia de los pilares en el sentido que decía Patte. Rondelet, en 1797, repite la enumeración de las tres causas, de las que la construcción «viciosa» es la primera y los movimientos del edificio la segunda. Aunque él había demostrado que la cúpula no producía empujes, su tercera causa parece indicar que persiste una duda, cuando habla de la disposición de la cúpula en relación a los muros que la soportan.

Sea cual fuere el estado de la teoría, un año antes de la muerte de Soufflot, en 1779, se inició una reparación práctica sorprendente y potencialmente eficaz. Como todos los defectos surgieron a partir de los puntos de concentración de tensión producida por los calzos de madera de las juntas, los canteros se pasaron más de un año abriendo todas las juntas horizontales con una sierra y retirando todos los calzos que encontraron (cabe suponer que las juntas se rellenaron de nuevo). Sin embargo, esta solución tuvo sólo éxito parcial a la hora de desviar las fuerzas desde las caras de los pilares hacia sus centros.

A la muerte de Soufflot, se nombró arquitecto a Brebion y su primer cometido fue elaborar una lista con todos los daños que presentaba la obra; Rondelet reproduce esta lista en 20 páginas de su *Mémoire* de

1797. La obra prosiguió durante la segunda mitad del decenio y parece que se terminó alrededor de 1790, poco después de la Revolución aunque, como se ha señalado, el andamiaje no fue retirado hasta 1794. Gauthey, en colaboración con Prony, realizó algunas mediciones en la iglesia en 1797-98 y evaluó los asientos de los pilares del crucero, tomando niveles en sus partes superiores. A partir del examen de la fábrica colindante llegaron a la conclusión de que los propios cimientos, si es que habían asentado, no presentaban asientos diferenciales y que los pilares se habían acortado debido, bien a la retracción de los tendeles de mortero, a la trepanación de las juntas, o a la perturbación debida a la sustitución de piedras agrietadas durante la ejecución de la obra.

Gauthey realizó algunos ensayos sobre la compresibilidad del mortero y dedujo un posible asentamiento máximo por esta causa de 9 pulgadas; según Kerisel, Prony midió en 1880 un asentamiento máximo en uno de los pilares de 89 mm.

ANÁLISIS

Los datos sobre la resistencia de rotura a compresión de la piedra son difíciles de interpretar. En gran parte dependen de la forma y tamaño de la muestra, y de las consiguientes restricciones a la formación de planos de rotura. Rondelet no proporciona detalles ni de cómo llevó a cabo sus ensayos, ni de cómo se realizaron los de Ponts et Chaussés; en ausencia de esta información, y considerando que la piedra es un material que varía de una muestra a otra, es prudente tomar el menor valor de la resistencia a rotura citado por Rondelet, 417.240 lb/pie^2, es decir 20,4 N/mm^2.

Coulomb[7] conocía el mecanismo de rotura de la piedra y calculó la inclinación de los planos de rotura a partir de una de las constantes del material (el ángulo de rozamiento interno). Si la figura 21.1 proporciona información precisa sobre los desconchones triangulares que se desgajaron de las caras de las piedras, los planos de fractura tienen una inclinación de aproximadamante arctg (2,8). Esta cifra se debe aceptar como bastante aproximada; el cuadrado de 2,8 es aproximadamante 8, lo que supone que una piedra de este tipo con una resistencia a compresión de 20,4 N/mm^2 presentaría una resistencia a tracción de 2,6 N/mm^2.

Los cálculos de Gauthey implican una carga de 34.133 kN que actúa sobre un pilar de 12,60 m^2 de superficie (Kerisel da 14,47 m^2), lo que conduce a una tensión media de 2,71 N/mm^2. Esto representa (como es habitual en los pilares de crucero) del orden del 10% (en realidad el 13%) de la resistencia a rotura de la piedra, lo que supone una tensión de trabajo a la que los pilares de gran cantidad de catedrales medievales han resultado, más o menos, satisfactorios. Sin embargo, el relleno interior de mampostería de los pilares medievales puede producir el mismo tipo de debilidad en sus núcleos; en el caso del Panteón, la construcción «viciosa» implica que posiblemente sólo sean capaces de soportar la carga los 100 mm exteriores del pilar. El área de esta banda perimetral es de unos 2,3 m^2, lo que llevaría a una tensión media en este perímetro de 14,8 N/mm^2, muy próxima a la resistencia de rotura a compresión de la piedra.

Además, ésta es una tensión *media*. El perímetro de un pilar es de 23 m, de manera que la carga total de 34.133 kN conduce a una carga por unidad de longitud de 1.484 kN/m. Si los calzos de roble empleados como separadores entre las piedras se insertaban a intervalos de 200 mm, y se supone que toda la carga pasa a través de ellos y ninguna por el mortero de las juntas, los sillares de las caras externas de los pilares estarían sometidos a una serie cargas lineales de una magnitud 1.484×0,200= 300 kN. La acción de fisuración de estas cargas lineales es bien conocida y el efecto puede calcularse de manera aproximada utilizando la teoría del ensayo a rotura por tracción indirecta del hormigón. En el bloque de piedra de la figura 21.5, con resistencia a tracción 2,6 N/mm^2, se formaría una grieta vertical de tracción cuando la carga lineal P alcance un valor $\pi/2$ (600) (100) (2,6) (10^{-3}) = 245 kN.

No obstante, si la carga no está concentrada totalmente a lo largo de la longitud del calzo, sino que se extiende sobre un área pequeña (idealizada en el área triangular a^2 de la figura 21.6), la carga P que se requiere para desconchar una pieza de piedra en forma de cuña sería, aproximadamente, (20,4)(a^2). Así, para a= 100 mm, la carga P resulta ser 204 kN.

Estos cálculos aproximados muestran claramente que, dada la construcción viciosa de los pilares del Panteón, que conduce a que sólo la zona periférica del pilar soporte la carga, cualquier concentración de

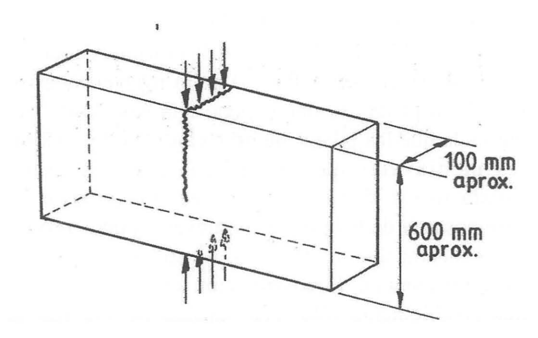


Figura 21.5

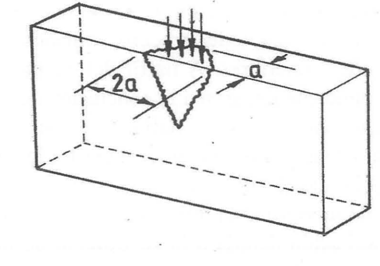


Figura 21.6

ésta que se produzca a consecuencia del empleo de calzos de madera podría llevar fácilmente a desconchones y grietas verticales —a los daños que, de hecho, se produjeron en el Panteón.

CONCLUSIÓN

Hay una serie de interrogantes de menor importancia sobre la construcción de Santa Genoveva a los que sería interesante responder. Por ejemplo, ¿dónde estaba Coulomb durante todo este periodo? Él conocía la fractura de la piedra y, a menudo, trabajó con Prony en la Académie. Excepto los años 1793-95, vivió permanentemente en París desde 1781 hasta su muerte en 1806, pero estaba vinculado a la Académie (más tarde al Instituto), más que a Ponts et Chaussés. No fue miembro de las sucesivas comisiones que estudiaron el Panteón en 1796-8. ¿Estaba o no en la comisión del Instituto de 1800?

Además, Gauthey, en su memoria de 1798 aclara que Soufflot cometió un error al haber permitido el empleo de la entonces habitual construcción viciosa. Sin embargo, Rondelet se empeñó en decir, en 1797, cuando los pilares se descubrieron por primera vez y aparecieron sus deficiencias, que la construcción era una sorpresa para él y que se le había engañado (al igual que a Soufflot, que murió en 1780) con la apariencia superficial de la obra. Al parecer ni Soufflot ni Rondelet habían vigilado los detalles de la construcción o, si lo habían hecho, en ese momento no fueron conscientes de la importancia de la habitual práctica viciosa. El ataque de Rondelet a Patte como defensor de este sistema constructivo parece haber sido escrito con posterioridad. ¿De qué modo dirigió Rondelet la obra a partir de 1770, si no había observado atentamente los detalles de la construcción?

22

El octógono de madera de la catedral de Ely

La reina Etheldreda, hija de Anna, rey de East Anglia, fundó un monasterio en la isla de Ely en el año 673. Ésta murió seis años más tarde y le sucedió como segunda abadesa su hermana Sexburga, que exhumó su cuerpo y lo trasladó al monasterio como objeto de culto; con el tiempo, ella misma fue enterrada detrás del sepulcro de su hermana. Eormenilda, hija de Sexburga, se convirtió en la tercera abadesa y fue a su vez sepultada en la abadía, al igual que el cuerpo de un cuarto miembro de la familia, Wihtburga, la hermana de Etheldreda. Las cuatro fueron canonizadas posteriormente.

Los cuatro sepulcros se conservaron a pesar del saqueo de la abadía por los daneses en el año 870; en 970 se consagró como un nuevo monasterio (benedictino). En 1071, Guillermo el Conquistador tomó posesión del lugar y nombró abad a un pariente normando, Simeón, en 1081. Simeón decidió reconstruir el conjunto del monasterio e inició la construcción de la actual iglesia de St. Mary, St. Peter y St. Etheldreda, la catedral de Ely.

Alrededor de 1106 el edificio, empezado siguiendo la tradición por el extremo oriental, estaba tan avanzado que los cuerpos de las cuatro santas habían sido trasladados al nuevo presbiterio, situado al este del altar mayor. Hacia 1189, se habían terminado el coro (no el actual), el crucero, los transeptos y la nave, y la gran torre occidental[1] se había levantado hasta alcanzar las dos terceras partes de su altura actual.

Los sepulcros de las cuatro santas, y otras reliquias de la catedral, atraían numerosos peregrinos y constituían una importante fuente de ingresos para el monasterio. El coro normando ya no podía albergar a las multitudes y el obispo Hugh de Northwold lo amplió en seis tramos, entre 1234 y 1251. La ampliación gótica es el límite actual de la catedral.

En esa época, el crucero estaba coronado por una segunda torre, que era parte del proyecto del abad Simeón del siglo XII; esta torre se hundió el 12 de febrero de 1322.

Existen documentos sobre muchas torres de iglesia que se han caído a los 20 años de su terminación, y no es una casualidad que el tiempo de asentamiento de una torre de crucero, digamos un cuadrado de 12 m de lado, sea aproximadamente de una generación. Si durante este período de consolidación el asentamiento es más o menos uniforme, la torre puede sostenerse durante siglos. La pregunta de por qué la torre de Ely se sostuvo durante 200 años y después se hundió, probablemente no se pueda responder. Existe algún testimonio de que una de las periódicas tentativas de drenaje de los Fens tuvo lugar unos cuantos años antes[2] y esto pudo provocar nuevos asentamientos. Stewart[3] alude a la «degradación de los pilares

---

Impreso y traducido, con autorización de los autores, del original «The timber octagon of Ely Cathedral,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 78 (1985): 1421-36. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

de la torre», como la causa del hundimiento. Sea cual fuere la razón, se cree que los monjes estaban sobre aviso de la inminente ruina, habían abandonado el extremo oriental de la catedral, y oficiaban sus servicios en otra parte. (Sin embargo, la Lady Chapel, situada en el extremo norte de la catedral y alarmantemente cerca del crucero, se había empezado sólo un año antes, en 1321.)

Sea como fuere, los cuatro tramos normandos originales del coro fueron reconstruidos en el decenio 1320-30 y, al mismo tiempo, se llevó a cabo una imaginativa reconstrucción del crucero central. Esta reconstrucción está vinculada al nombre de Alan de Walsingham, a la sazón sacristán de Ely, y a menudo se le considera el arquitecto del actual octógono de madera. No hay pruebas de esto, pero con certeza él era, desde el punto de vista de la catedral, el encargado de las obras. Con igual certeza sabemos que buscó el mejor consejo técnico posible y que el proyecto de la bóveda de madera y de la linterna estuvo a cargo de William Hurley, carpintero del rey.

Sin embargo, probablemente fue Walsingham el que tuvo la idea de suprimir los pilares originales del crucero. La figura 22.1 señala la posición original de los pilares en la zona del crucero y la figura 22.2 muestra la disposición actual. El crucero cuadrado de 12 m de lado se había abierto para convertirse en un espacio octogonal de aproximadamente el doble de tamaño. Se ampliaron y reforzaron los cimientos de los ocho pilares normandos, los cuáles se recrecieron con nueva fábrica. Se observará que el octógono no es equilátero; tiene cuatro lados largos y cuatro cortos.

Los ocho pilares soportan unos arcos que, a su vez, sostienen la cáscara octogonal de fábrica que configura la actual torre del crucero de la catedral. Esta obra de fábrica se terminó en 1328. El octógono está abovedado con madera, figura 22.3, y los nervios de madera arrancan de los capiteles de los pilares, al igual que los arcos de fábrica. La propia bóveda de madera sostiene una linterna de madera octogonal, cerrada a su vez por una bóveda de abanico, también de madera. La obra del octógono costó 2.406 libras (cifra que habría que multiplicar por 1.000 para obtener la equivalente de 1985).

Puede resultar curioso señalar que la catedral de Siena también tiene un crucero ampliado, con un diámetro ligeramente menor que el de Ely. No obstante, el crucero es hexagonal y los seis pilares sostienen una cúpula de fábrica que se terminó alrededor de 1264.

El sepulcro de St. Etheldreda se había conservado una vez más durante el hundimiento de la torre y la construcción del octógono, y en el siglo XV estaba sin duda en su posición central, en el extremo oriental de la iglesia, aunque los de las otras santas se habían trasladado. Sin embargo, poco después, el sepulcro fue destruido y el emplazamiento actual de la tumba de St. Etheldreda se desconoce.

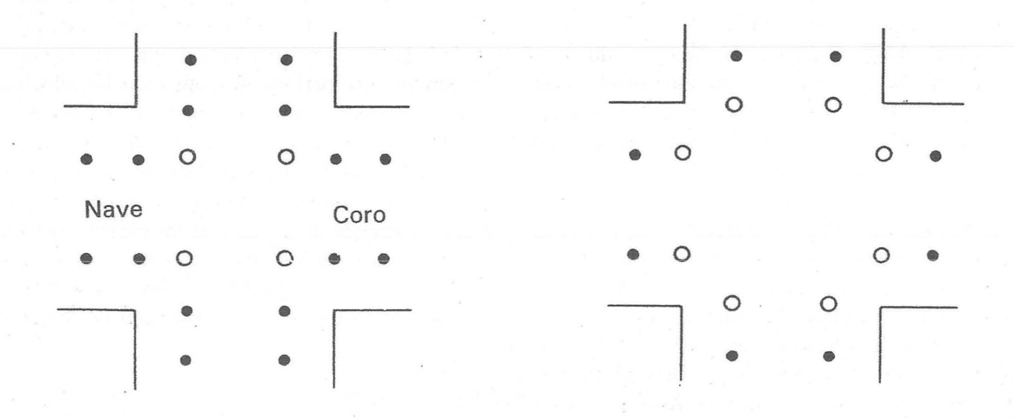


Figura 22.1

Figura 22.2

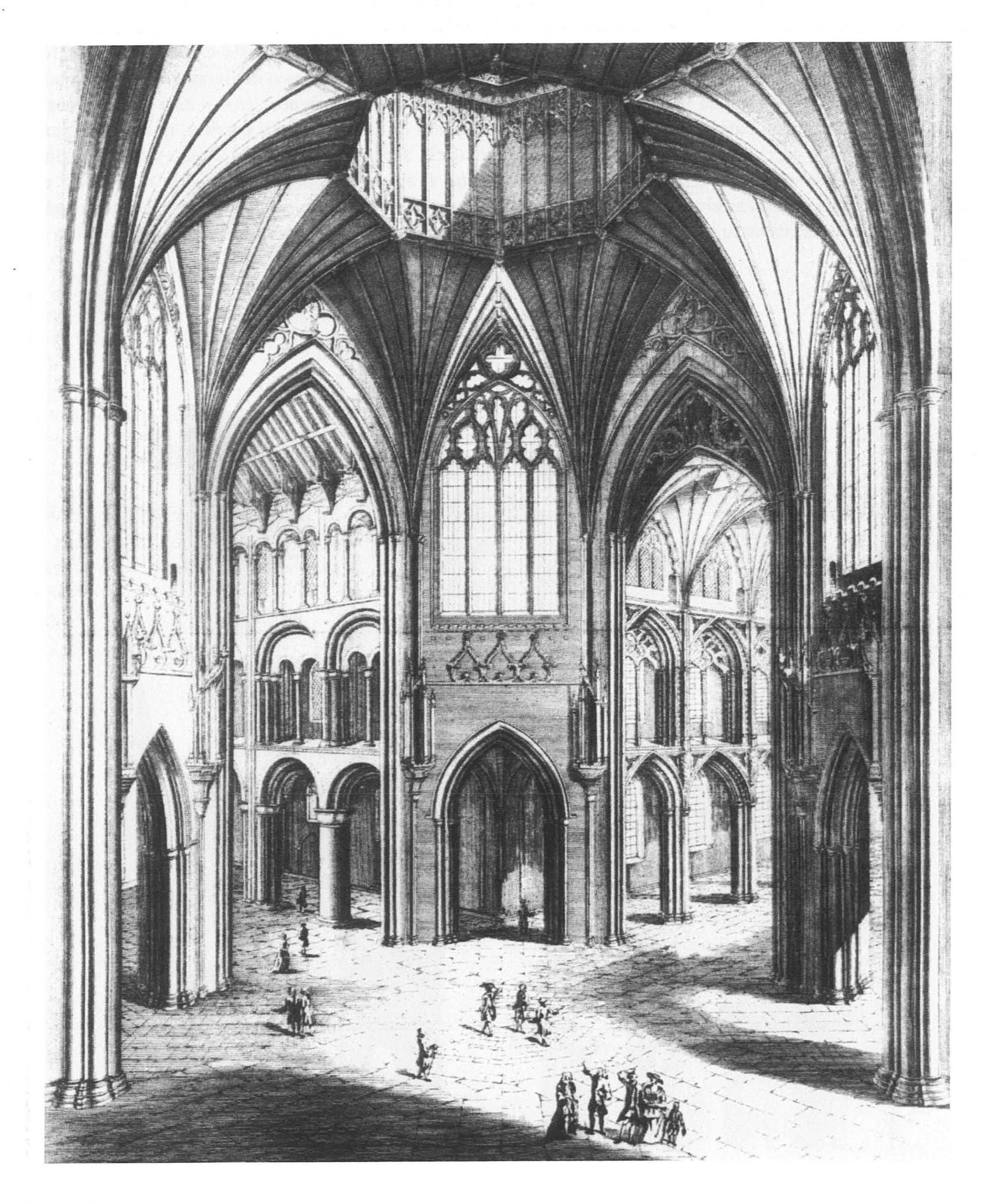


Figura 22.3

LA ESTRUCTURA BÁSICA

La figura 22.4 muestra una vista de la catedral seccionada por el crucero, mirando hacia el este, de un grabado[4] de 1766. La armadura de madera, parcialmente oculta por el entablado de la bóveda, no es completamente original, parte es del siglo XVIII y se debe a Essex. Los capiteles de los pilares, de donde arranca la bóveda, se encuentran a 19 m sobre el nivel del suelo, y la bóveda se eleva hasta un anillo octogonal de madera, estando el cerco inferior a una altura de 29 m. Este cerco es un octógono regular de unos 6 m de lado, y sostiene los ocho grandes pies derechos (de 18 m de largo) de la propia linterna. La figura 22.5 muestra una vista exterior del crucero, mirando al norte, también de Bentham, pero dibujada en 1756. Entre las figuras 22.4 y 22.5 existen considerables diferencias en los detalles, que se comentarán más adelante; Essex llevó a cabo su restauración entre 1757 y 1762, de manera que la figura 22.5 es anterior a Essex y la figura 22.4 muestra el estado después de que Essex hubiera terminado su obra.

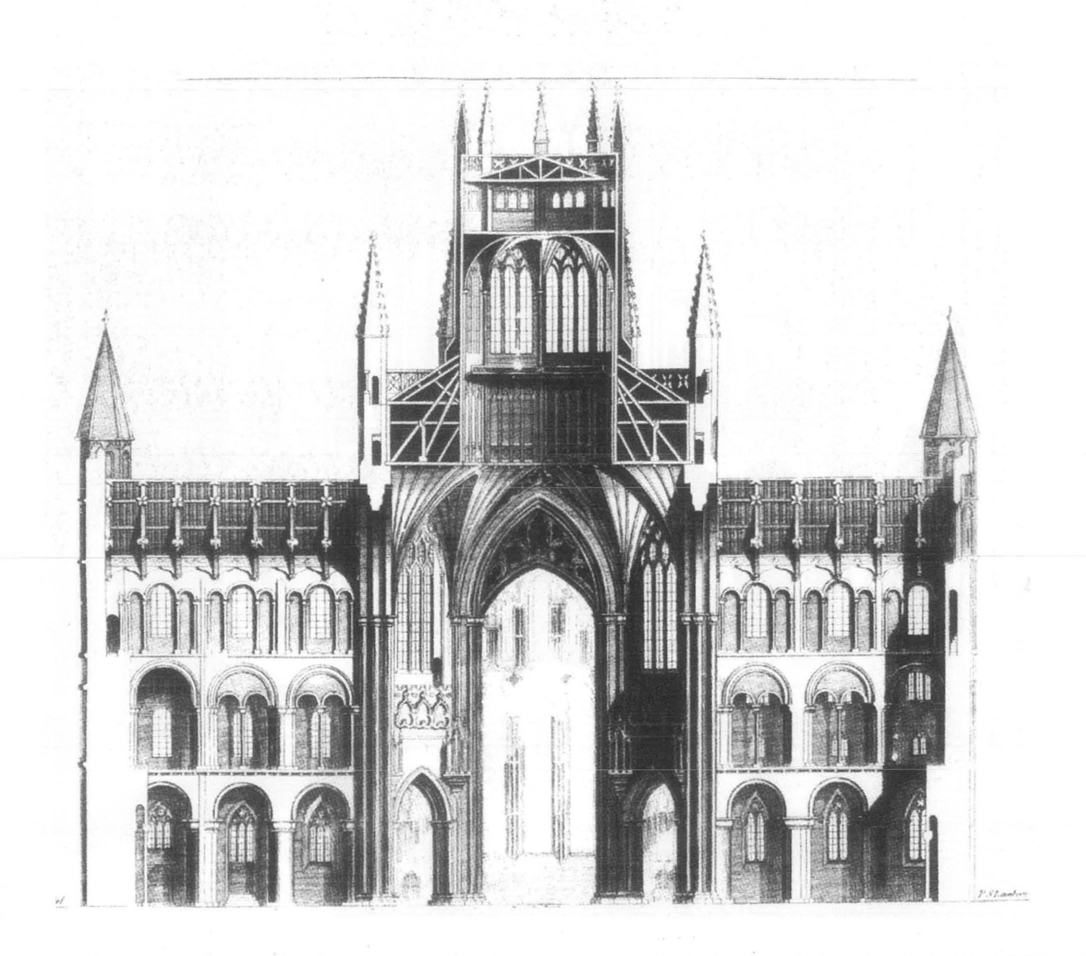


Figura 22.4

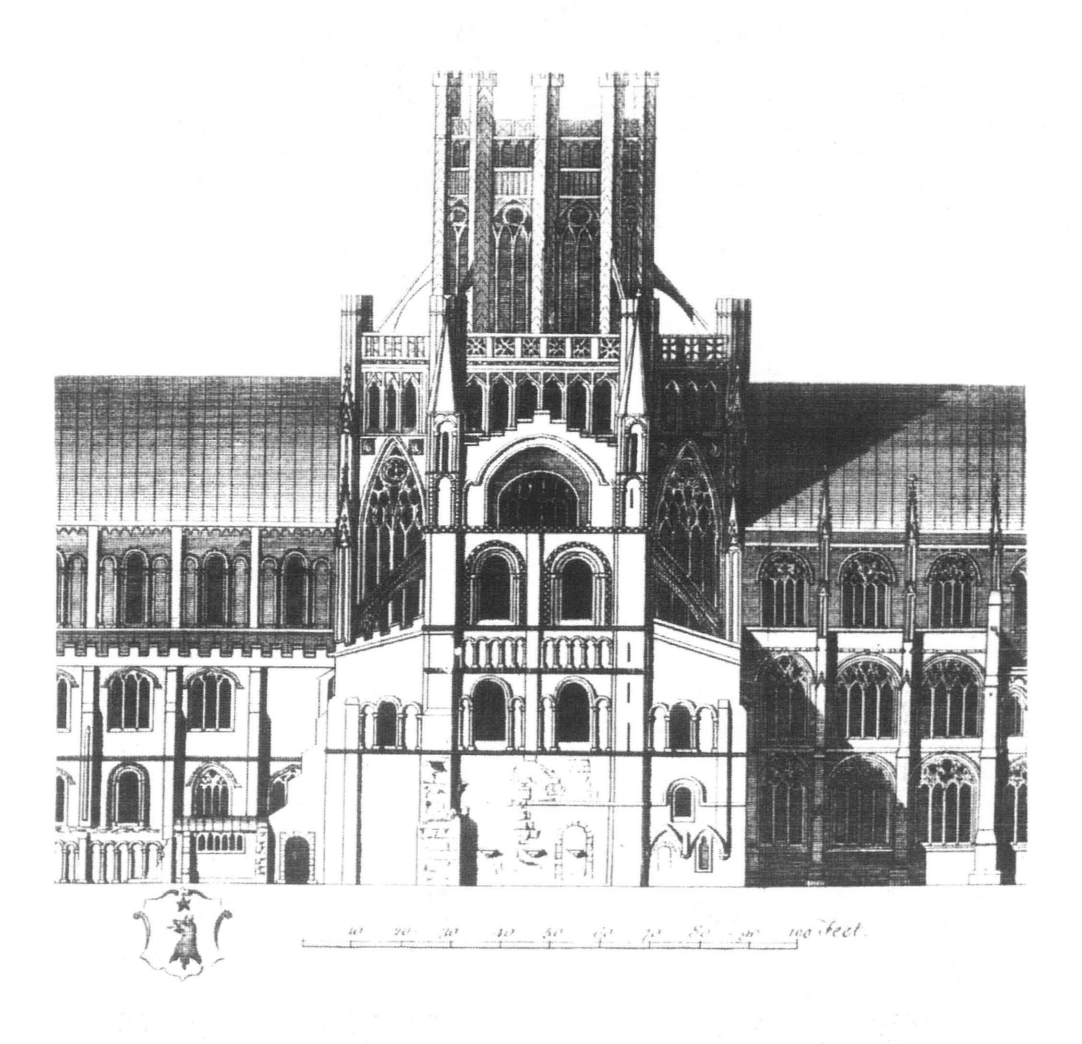


Figura 22.5

En la figura 22.6 se muestra la hipotética armadura, según Hewett,[5] de la estructura de madera original de la bóveda. (Todo este armazón está oculto desde abajo, y cubierto con un entablado y nervios no portantes, figura 22.3.) Primero se levantaron los ocho pies derechos de esquina, colocados en hendiduras verticales en los pilares de fábrica exteriores. Estos soportes se unieron después a la fábrica y se ataron con elementos horizontales, figura 22.7. A partir de esta configuración se pueden añadir ordenadamente los elementos restantes para llegar a la armadura de la figura 22.6.

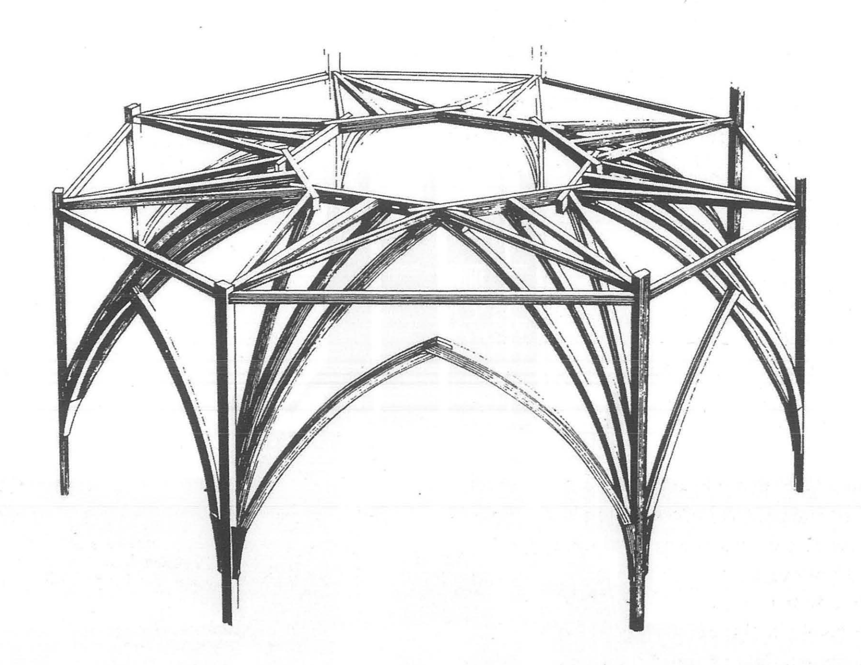


Figura 22.6

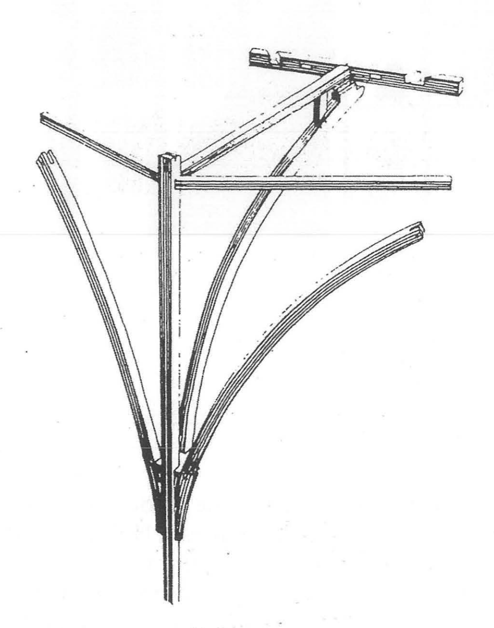


Figura 22.7

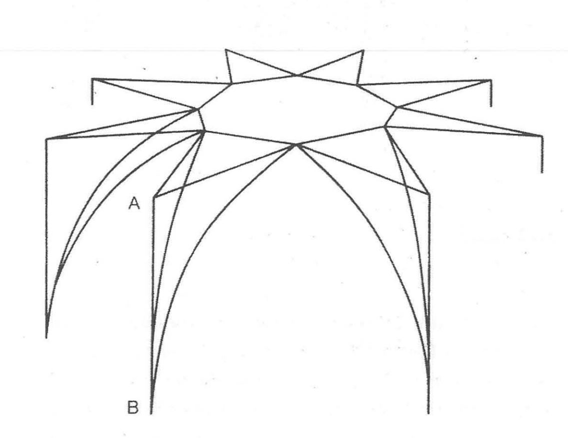


Figura 22.8

La estructura de esqueleto de la figura 22.8, que muestra los elementos principales de la estructura real, más compleja, tiene un interés teórico considerable. Föppl[6] abordó el análisis de estas «cúpulas reticuladas» (*Netzwerkkuppel*), y también se puede hallar una exposición en Timoshenko y Young.[7] Más recientemente, Pellegrino y Calladine[8] han llevado a cabo un estudio detallado de estructuras que son, simultáneamente, estática y cinemáticamente indeterminadas y que, como se verá, es pertinente en relación con el presente estudio.

Si el nudo A de la armadura espacial de la figura 22.8 no está cargado, ninguno de los tres elementos que concurren en él puede soportar carga, y se podrían suprimir sin afectar, en teoría, el funcionamiento del entramado en su conjunto. De hecho, los pilares verticales AB ya no existen en Ely, aunque las correspondientes hendiduras en la fábrica se ven claramente; los elementos horizontales siguen configurando el suelo, pero no como una parte esencial de la armadura principal.

Así, la armadura fundamental de Ely es como la que se muestra en la figura 22.9, que Föppl utiliza para realizar un estudio general de este tipo de construcciones. El cómputo de barras y nudos en la figura 22.9 (se muestra un hexágono, pero el polígono puede tener un número cualquiera de lados) indica que la armadura, considerando una estructura de nudos articulados, es isostática. Esto es correcto si el polígono tiene un número impar de lados.

Sin embargo, si el polígono tiene un número par de lados, la armadura tiene una indeterminación hiperestática y, al mismo tiempo, un grado de libertad. Calladine[9] ha generalizado la fórmula de Maxwell en la forma

$$b-3j=s-m \qquad (1)$$

donde b es el número de barras y j es el número de nudos de un entramado espacial convenientemente apoyado. En el lado derecho de esta ecuación, s es el número de indeterminaciones estáticas y m el de indeterminaciones cinemáticas. Las armaduras poligonales como la de la figura 22.9 tienen $b-3j=0$. El curioso comportamiento del polígono de lados pares se ilustra para el cuadrilátero, una vez más a partir de Föppl, en la figura 22.10; el cuadrilátero puede convertirse en un rombo tal como se muestra. En consecuencia, este tipo de estructuras con cuatro, seis u ocho lados no son buenas estructuras portantes.

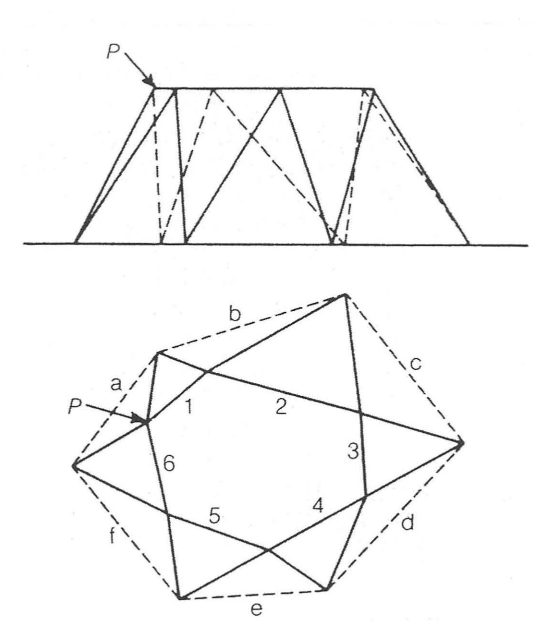


Figura 22.9

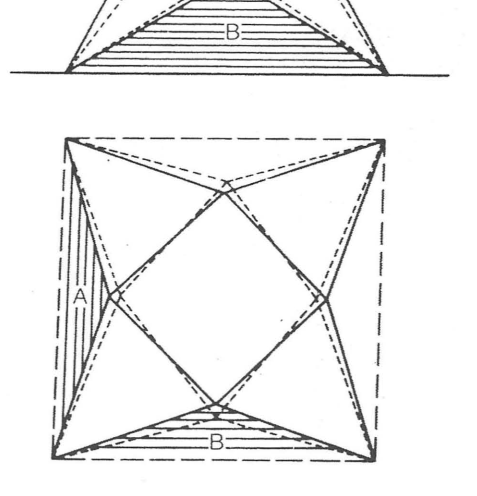


Figura 22.10

La estructura básica en Ely, figura 22.8, corresponde a una armadura extremadamente flexible, en teoría, capaz de soportar solamente combinaciones de carga muy especiales y, además, en un equilibrio muy precario.

Como primer paso del análisis de la armadura de madera de la bóveda, se supondrá que el conjunto de la superestructura octogonal aplica ocho cargas iguales P en los nudos del anillo interior (el cerco inferior) de la figura 22.8. Por razones ya comentadas, los tres elementos que concurren en A se pueden suprimir del análisis. Los nervios curvos que sostienen el cerco inferior se examinarán en detalle más adelante; su acción portante estará en una línea que une los extremos del elemento, de manera que el problema a resolver es el de hallar los esfuerzos en la armadura básica de la figura 22.11. Se observará que la acción de la superestructura *no* ha sido representada por ocho cargas iguales P, sino por cuatro cargas iguales P_L y otras cuatro cargas iguales P_S (los subíndices L y S se refieren a nudos del anillo interior soportados respectivamente desde los lados largos y cortos del octógono exterior).

Si el análisis se abordase de una manera directa, la simetría señalaría que los dos elementos portantes del nudo 1 de la figura 22.11 soportarán esfuerzos iguales L. La descomposición de los esfuerzos en un plano horizontal, en una dirección que forme ángulos rectos con el radio, muestra que los dos esfuerzos de compresión C en los elementos del cerco inferior que concurren en el nudo 1, son también iguales, como es evidente una vez más a partir de la simetría. La consideración de los nudos adyacentes muestra que los ocho elementos del cerco inferior soportan la misma carga de compresión C. Dos descomposiciones más en el nudo 1, horizontalmente en dirección radial y verticalmente, dan

$$\begin{aligned} b_L l &= C \operatorname{sen} 22{,}5° \\ 2Hl &= P_L \end{aligned} \tag{2}$$

donde l es el coeficiente de tracción del esfuerzo de la barra L, H es la altura del octógono y b_L es la diferencia en dimensión radial en el nudo 1 (es decir medida horizontalmente) entre el octógono interior y el octógono portante.

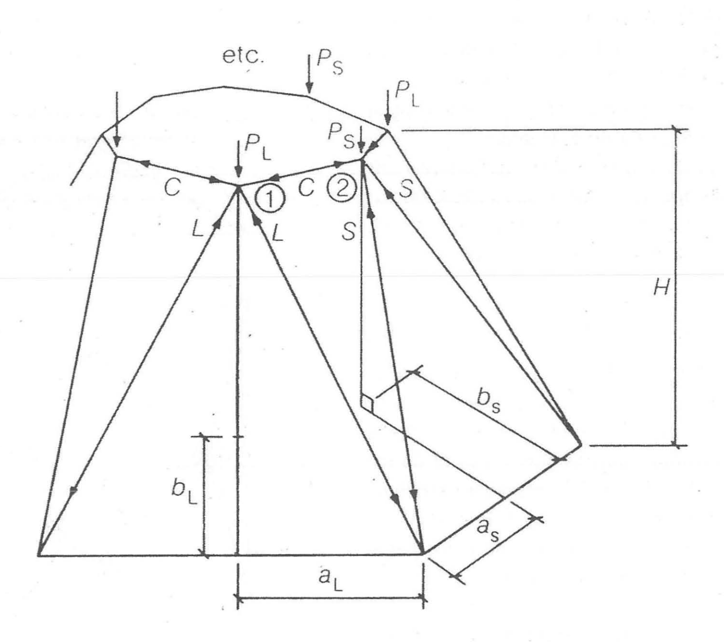


Figura 22.11

La resolución de las ecuaciones (2) da

$$P_L = \frac{2HC \text{ sen } 22{,}5°}{b_L} \qquad (3)$$

Análogamente, la consideración de equilibrio en el nudo 2 conduce a la ecuación

$$P_S = \frac{2HC \text{ sen } 22{,}5°}{b_S} \qquad (4)$$

Ahora, si W es el peso total de la superestructura

$$4(P_S + P_L) = W \qquad (5)$$

de manera que

$$P_L = \frac{\frac{1}{4} W b_S}{b_L + b_S} \qquad P_S = \frac{\frac{1}{4} W b_L}{b_L + b_S} \qquad (6)$$

Así, se ha hecho patente una primera manifestación del curioso comportamiento de la cúpula reticulada de la figura 22.11. La hipótesis directa de que la superestructura se puede sustituir por ocho cargas P iguales no es viable. La estructura requiere que las cargas dean desiguales. Para las dimensiones de Ely, las ecuaciones (6) indican que $P_L = 0{,}132W$ y $P_S = 0{,}118W$, en vez del valor $W/8$.

Esta desigualdad de cargas es consecuencia del hecho de que la estructura es un mecanismo con un grado de libertad. Las cargas iguales no se pueden sostener, e intentar aplicarlas excitaría el mecanismo inherente a la estructura, conduciendo a grandes deformaciones. En la práctica, los elementos de arriostramiento entrarían en funcionamiento hasta que las cargas que actúan sobre la estructura se dividan en proporciones tales que posibiliten el equilibrio (la acción de estos elementos de arriostramiento se comentará más adelante).

Las proporciones de equilibrio concretas de las ecuaciones (6) son valores particulares de un resultado más general. Si los nudos del anillo interior se numeran 1, 2, ... 8, entonces, la condición general de equilibrio es

$$(P_1 + P_3 + P_5 + P_7)b_L - (P_2 + P_4 + P_6 + P_8)b_S = 0 \qquad (7)$$

Ésta es, por supuesto, una ecuación de trabajo. El mecanismo dinámico (de un grado de libertad) de la armadura de la figura 22.11 implicará (en cierta medida) movimientos hacia abajo de magnitud b_L en los nudos 1, 3, 5 y 7 y movimientos hacia arriba b_S en los nudos 2, 4, 6 y 8 (cf. figura 22.10) o viceversa. Así, la armadura puede soportar una serie infinita de cargas P_1, P_2, ... P_8 siempre y cuando se satisfaga la ecuación (7), es decir, si se especifican siete de las cargas, se puede alcanzar un equilibrio precario, pero sólo para un determinado valor de la octava carga.

Hasta ahora, no se ha tenido en cuenta la propiedad de «auto-solicitación» de la armadura. En la figura 22.12 se ha dibujado el esqueleto sin cargas externas. Si se considera cada nudo por separado, es fácil hallar que la armadura puede soportar los esfuerzos mostrados. Los elementos del anillo octogonal interior están sometidos a una carga de igual valor numérico X que es, alternativamente, de tracción y compresión. (Esta alternancia es posible para un anillo con un número par de lados, pero no para uno con un número impar.) Los esfuerzos en los elementos portantes vienen dados por

$$a_L y = X \cos 22{,}5° = a_S z \qquad (8)$$

donde y y z son coeficientes de tensión, y a_L y a_S son las semilongitudes de los lados del octógono portante (véase la figura 22.11). Así, todos los esfuerzos se pueden hallar en función de X, pero el valor de X se desconoce; la estructura es hiperestática de primer grado.

Para la distribución simétrica de la carga de la figura 22.11 el valor de la indeterminación es cero; es decir, los esfuerzos en las figuras 22.11 y 22.12 se superponen para proporcionar un sistema general de

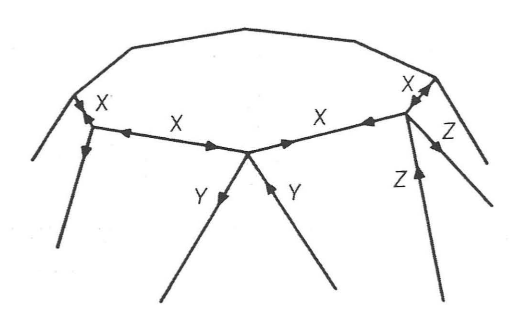


Figura 22.12

fuerzas en equilibrio, entonces (por ejemplo) las cargas en los dos soportes largos serán $(-L - Y)$ y $(-L + Y)$. Para cada par de barras de la armadura, existen pares de expresiones análogas, y un simple análisis por trabajos virtuales o de «energía de deformación» muestra que X (y por tanto Y y Z de las ecuaciones (8)) es cero.

LA ESTRUCTURA DE WALSINGHAM (HURLEY)

El octógono exterior está inscrito en un cuadrado de unos 24 m de lado. Las dimensiones de la estructura real no son regulares, y en la figura 22.13 se muestran los valores que se han utilizado en el análisis.

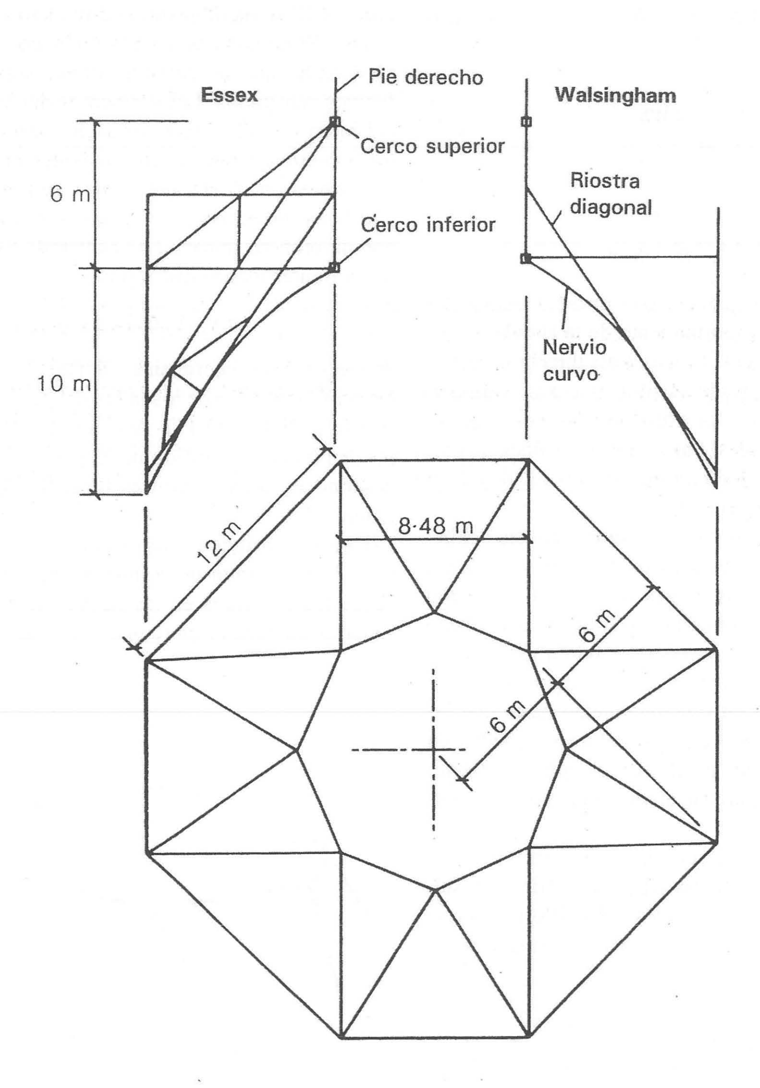


Figura 22.13

El peso total de la linterna se puede evaluar estimando las cantidades de madera, vidrio, plomo, etc. empleados en su construcción. En números redondos, un valor aceptable del peso propio total W son 2.000 kN. Así, a partir de las ecuaciones (6), se pueden hallar los valores P_L y P_S de la figura 22.11, 264 kN y 236 kN respectivamente, siendo el valor de L unos 173 kN.

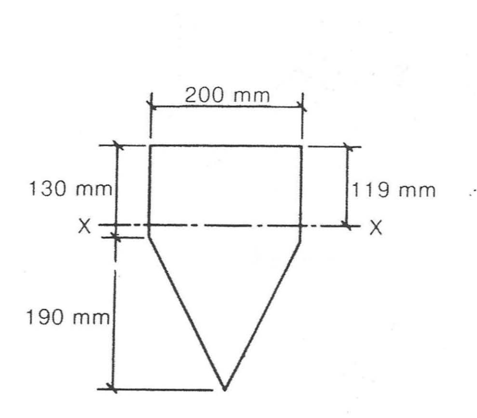
La sección transversal del nervio curvo se muestra, idealizada, en la figura 22.14. Se pueden calcular las características de la sección y, en concreto, el área de la misma es 45×10^3 mm^2 y el módulo resistente de la sección según el eje XX tiene los valores de $1{,}26 \times 10^6$ mm^3 para el lado comprimido y $2{,}12 \times 10^6$ mm^3 para el traccionado. Así, la tensión de compresión directa bajo la acción de 173 kN es inferior a 4 N/mm^2.

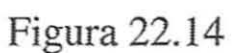
El nervio curvo funciona como se muestra en la figura 22.15, y en la sección de máxima curvatura las tensiones de flexión son 96 N/mm^2 y 57 N/mm^2, a compresión y tracción, respectivamente. Estos valores de la tensión son altos, siendo del orden de (y quizá superando) la resistencia del nervio de roble. Se puede considerar axiomático que una condición (necesaria, pero no suficiente) para que una estructura medieval se conserve es que las tensiones sean bajas, que sus valores máximos estén un orden de magnitud por debajo de la resistencia del material.

Así, la tensión de compresión directa de 4 N/mm^2, a una centésima (dos órdenes de magnitud) de la resistencia del roble, es satisfactoria y, si ésta fuera la única tensión existente, el nervio tendría un buen margen para aceptar la sobrecarga y la degradación de la propia madera. Por el contrario, los valores calculados de la tensión de flexión indican que la estructura no puede funcionar como se ha supuesto. Para soportar la carga, deben funcionar otros elementos de la armadura.

Cuando la construcción de la bóveda y el suelo habían alcanzado el estado que se muestra en la figura 22.6, se pudieron levantar los ocho grandes pies derechos de las esquinas del octógono interior. Como se muestra en el dibujo de Hewett,[10] figura 22.16, se introdujeron un segundo anillo octogonal interior, unido a estos ocho pies derechos a una altura de unos 6 m sobre el suelo (el «cerco superior» de la figura 22.13) y 16 riostras diagonales. Se añadieron otros elementos y se cubrió la techumbre (cf. figura 22.14), a través de la cual sobresalían los ocho pies derechos para configurar la linterna de vidrio que ilumina el crucero. Se levantó una bóveda de abanico cerca de la parte superior de estos pies derechos, y el conjunto de la linterna se cerró con una última techumbre de madera.

Además, para arriostrar aún más los grandes pies derechos, se añadieron arbotantes exteriores de madera. Éstos se pueden ver en el dibujo hipotético de




Figura 22.14

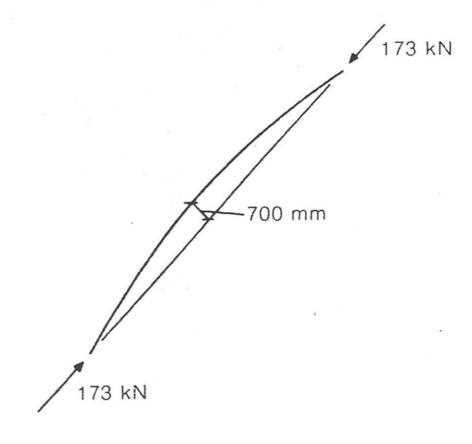


Figura 22.15

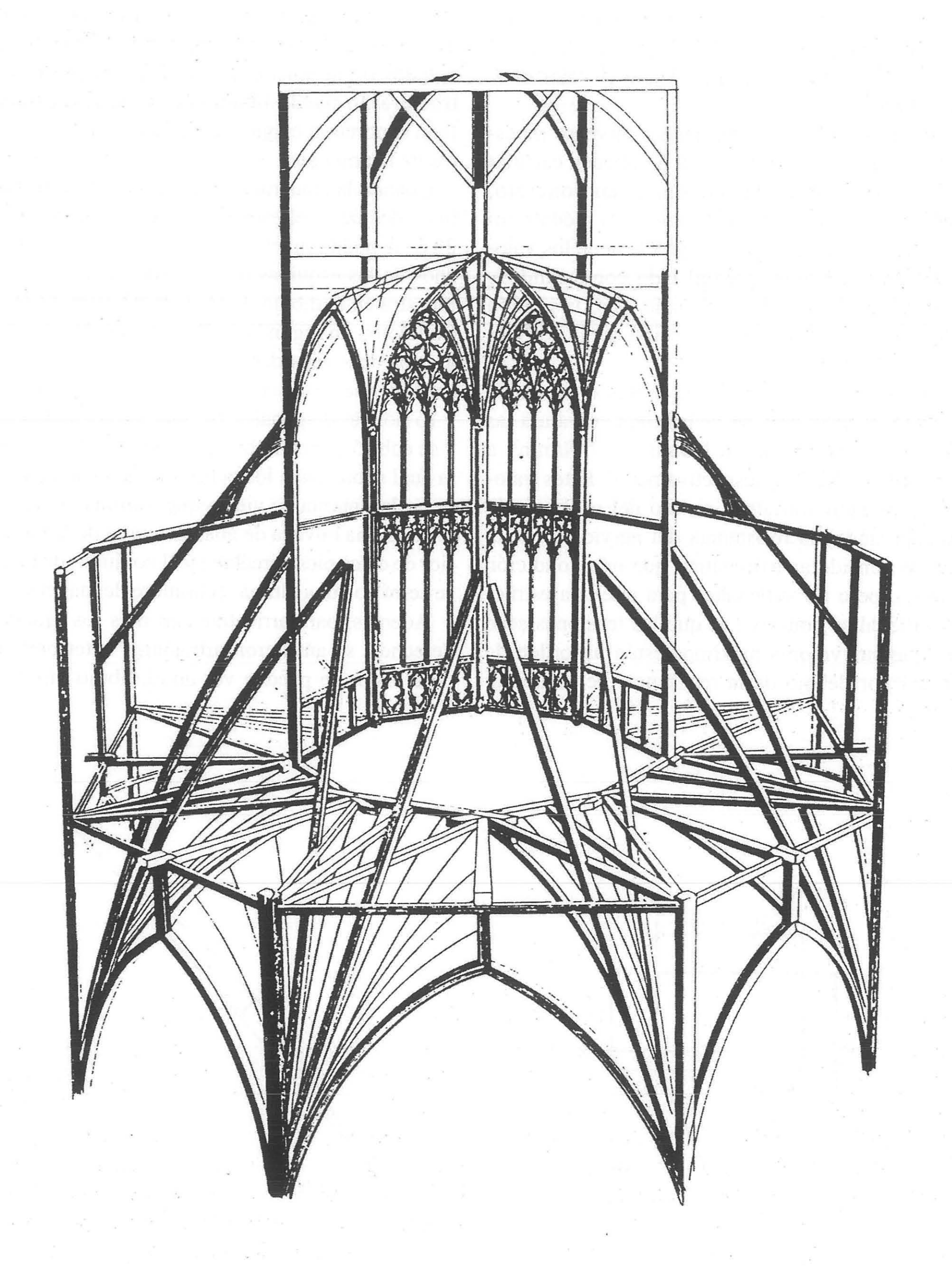


Figura 22.16

Hewett, figura 22.16, y en el de Bentham de 1756, figura 22.5, pero se han omitido en la sección transversal de 1766, figura 22.4. En la figura 22.5 no está claro cómo se conectaban los arbotantes con la armadura de madera de la bóveda; en cualquier caso, Essex suprimió los arbotantes en 1757-62.

Se descubrió, tras una inspección visual, que las 16 riostras diagonales están en contacto con los nervios curvos, tal y como aparecen dibujados en el lado de Walsingham de la figura 22.13. Se podría considerar que un modelo mejor de la acción de los esfuerzos es el ilustrado en la figura 22.17 (cf. figura 22.15). Las «líneas de empuje» se pueden incluir ahora en el grosor (320 mm) del nervio curvo y originarán una flexión escasa. Sin embargo, es preciso que la riostra diagonal, de sección aproximada 300 mm × 300 mm y longitud 11 m, proporcione un esfuerzo lateral de 46 kN. La propia riostra, sometida a esta carga, tendrá una flecha superior a 100 mm y soportará una tensión de flexión de unos 30 N/mm^2. No es sorprendente que, en el siglo XVIII, Essex considerase necesario añadir elementos de refuerzo (figura 22.13, lado izquierdo, Essex).

No obstante, las propias riostras diagonales pueden colaborar al soporte del peso de la linterna funcionando como puntales a compresión. En realidad, si se supone que las riostras absorben completamente el peso de 2.000 kN, cada par debe contribuir con una fuerza inclinada de unos 305 kN para sostener la carga de 250 kN sobre cada uno de los ocho pies derechos verticales. (La carga crítica de Euler de un madero de 11 m de longitud y sección 300 mm × 300 mm es de unos 550 kN.)

En la figura 22.13 (lado derecho, Walsingham) se observará que las riostras diagonales están ensambladas a los pies derechos a mitad de camino entre los cercos superior e inferior (el ensamblaje actualmente muestra alguna variación). Así, cada pie derecho, sometido a una carga lateral procedente del par de riostras de unas 175 kN, flectará. Los pies derechos se pueden aproximar a una sección rectangular de 560 mm × 330 mm, con un módulo resistente de unos 10 × 10^6 mm^3. El simple cálculo $Wl/4$ para la carga de 175 kN y una luz de 6 m conduce a una tensión de flexión de 26 N/mm^2, que es una vez más inaceptablemente alta como valor secular.

De este modo, el modelo básico de la figura 22.11 conduce a un conjunto de esfuerzos en equilibrio que quizá se pueden generar, precariamente, en virtud de los elementos de soporte extra de la armadura real y que, a excepción de los nervios curvos principales, son satisfactorios, figura 22.15. Los nervios deben estar reforzados por las riostras pero éstas, a su vez, estarán sobretensionadas. Por otra parte, el modelo en el que toda la carga es absorbida por las riostras diagonales origina una flexión excesiva en los ocho grandes pies derechos. En la práctica se podría imaginar que los esfuerzos de cada uno de estos dos modelos básicos se combinarán para sostener el peso de la linterna. Aún así, las tensiones no tendrán los valores bajos para los que los problemas de conservación tardan en aparecer.

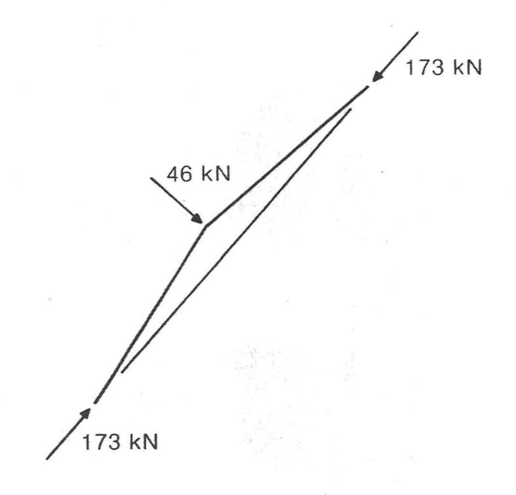


Figura 22.17

LAS REPARACIONES DE ESSEX

Efectivamente, según mencionan los documentos, ya se realizaron reparaciones menores durante los reinados de Enrique VI, Eduardo IV, Enrique VII y Enrique VIII. En 1757 Essex realizó un informe detallado del octógono en el que declaraba que toda la estructura estaba muy deteriorada e incorrectamente reparada. Las partes superiores se hallaban en un estado ruinoso, y aprovechó la oportunidad para remodelar el aspecto externo del octógono, al tiempo que suprimía (como se ha mencionado) los arbotantes externos de la linterna.

Además, Essex añadió grandes cantidades de madera en las partes inferiores de la estructura, como se puede ver en la figura 22.13, lado de Essex (cf. Bentham, figura 22.14). Añadió riostras a un nivel más alto que el original, en realidad al nivel del cerco superior, además de elementos verticales y horizontales para ayudar a apuntalar estas riostras, y reforzó las riostras originales en sus puntos débiles donde apoyaban los nervios curvos.

En esta época, Essex suprimió también los pilares verticales del muro, AB en la figura 22.8, que estaban degradados y eran estructuralmente innecesarios, así como los elementos horizontales entre los nudos A. Así, Essex reforzó las principales trayectorias del peso propio de la estructura; se podía confiar mejor en los nervios curvos principales y, al mismo tiempo, se proporcionaba un nuevo sistema de riostras diagonales.

Como se verá en las dos vistas de Bentham, figuras 22.4 y 22.5, Essex añadió pináculos de piedra en las esquinas exteriores del octógono, y remató los ocho grandes pies derechos también con pináculos.

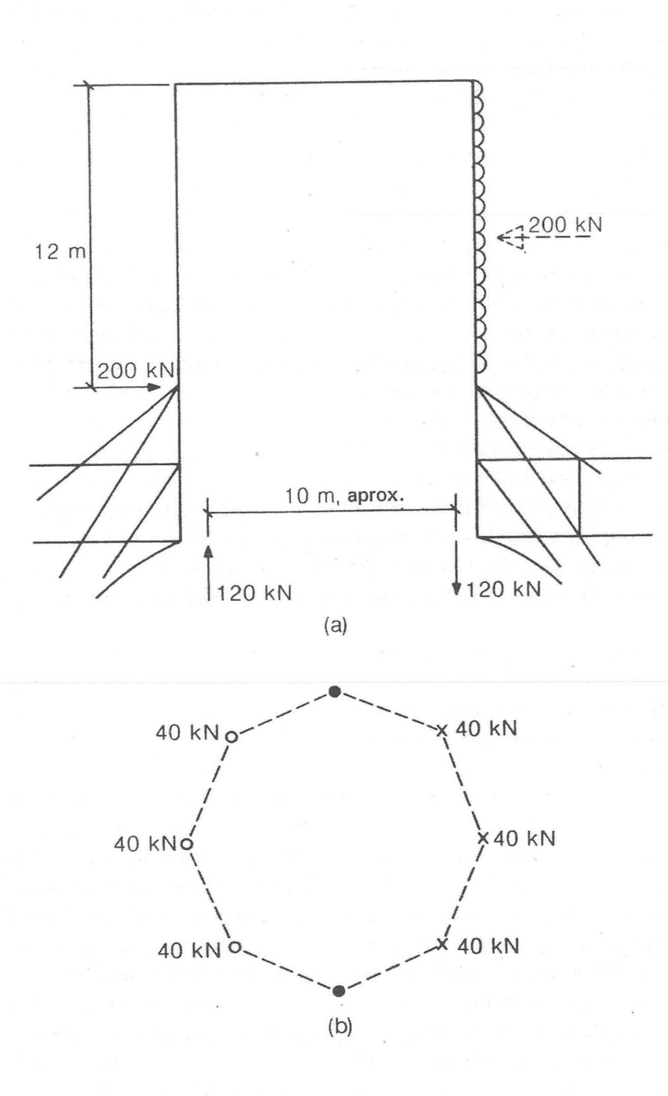


Figura 22.18

La restauración de Scott

George Gilbert Scott hizo un informe sobre la linterna de la catedral de Ely en 1862-3,[11] y manifestó su propósito de deshacer el trabajo de Essex y de restituir la linterna, en la medida de lo posible, a su estado original. Parece indudable que la intervención estuviese provocada por un necesario refuerzo estructural. Scott tenía en mente el aspecto externo del conjunto y, por ejemplo, suprimió los pináculos de los ocho pies derechos mientras que mantenía los del nivel inferior. Es más, insertó fábrica en el centro de los lados largos del octógono portante, de manera que los arbotantes restaurados pudieran apoyarse en obra sólida. (Así, el octógono exterior tiene actualmente 12 pináculos.)

Los arbotantes exteriores, junto con las riostras diagonales del nivel inferior, ayudarán a arriostrar la linterna contra el viento. Una velocidad de viento de 48 m/s produce un empuje lateral sobre la parte sobresaliente de la linterna (alrededor de 12 m) de unos 200 kN. Este empuje podría soportarse como se muestra en la figura 22.18, en la que se han suprimido los arbotantes (Essex), y donde se supone que el momento reacción lo suministrarían unas fuerzas verticales adicionales sobre los ocho pies derechos. La fuerza total necesaria suministrada por cada grupo de tres pies derechos es de unos 120 kN, es decir 40 kN en cada pie derecho. Curiosamente, esta desigual distribución de esfuerzos, que se muestra en la figura 22.18(b), no perturbará el precario equilibrio de la armadura espacial básica, como podría parecer a partir de la ecuación (7).

Las riostras diagonales deben absorber entre ellos la reacción horizontal de 200 kN. Los arbotantes restaurados de Scott absorberán gran parte de esta carga, y estos arbotantes pueden soportar fácilmente un esfuerzo del orden de 100 kN.

Conclusión

Los esfuerzos axiales originados en los elementos del octógono tienen magnitudes del orden de 300 kN. Una fuerza de 300 kN que actúa longitudinalmente en un elemento de madera de 300 mm × 300 mm originará una tensión a compresión de 3 N/mm^2 —un valor suficientemente bajo, al que corresponde una deformación de $0{,}3 \times 10^{-3}$. De este modo, si el elemento de madera tiene una longitud de 10 m, sometido a esta carga, se acortará unos 3 mm.

No obstante, si la carga de 300 kN se aplica transversalmente en el mismo madero, con una luz de 10 m y simplemente apoyado, se producirán tensiones de flexión de 170 N/mm^2 y una flecha lateral de 900 mm. Para que una armadura de madera sea eficaz y se pueda construir con la esperanza de que perdure a través de los siglos, se debe proyectar de modo que sus elementos estén cargados axialmente, evitando en lo posible la flexión.

La estructura de madera de Ely no es buena desde este punto de vista. Fue especialmente desafortunado que la armadura principal estuviera formada por una curiosa estructura básica, a la vez hiperestática y mecanismo. Aparte de esto, el error fundamental fue contar con los nervios curvos para apoyar el cerco inferior sobre el que se levantaron los grandes pies derechos de la linterna. Arquitectónicamente, el empleo de los nervios curvos conlleva una bella bóveda, en clara relación con la bóveda de piedra contigua del coro. Sin embargo, mientras el arco curvo es apropiado para bóvedas de fábrica relativamente pesadas, es estáticamente inadecuado para la bóveda de madera, más ligera. Ésto no habría tenido importancia si la bóveda de madera, al igual que la de piedra del coro, soportase sólo su propio peso. Sin embargo, la bóveda de madera del octógono debe sostener los 2.000 kN de la linterna, y unos puntales rectos habrían sido dos órdenes de magnitud más eficaces, estructuralmente, que los nervios curvos. (Desde luego, desde el punto de vista estético, los nervios rectos podrían haber sido un desastre.) Tal como es, los nervios curvos, en principio, están sometidos a grandes tensiones de flexión en la medida en que trabajan para soportar el peso de la linterna.

Walsingham (Hurley) proporcionó las riostras diagonales, figura 22.13, que también colaboran al soporte del peso de la linterna. Un error más del proyecto original fue ensamblar estas riostras en una sección sin apoyo de los grandes pies derechos, entre los cercos superior e inferior. En la medida en que las riostras ayudan a sostener la linterna, e inducen en los grandes pies derechos tensiones de flexión inaceptablemente grandes.

Estos errores de proyecto contribuyeron al estado de ruina que Essex encontró 400 años después de haberse construido la linterna. Essex trató de mejorar, en cuanto le fue posible, la falta de resistencia de los

nervios curvos, proporcionando una armadura de refuerzo, y colocó un arriostramiento diagonal adecuado que funciona al nivel del cerco superior, para estabilizar la estructura. Todas estas reformas fueron, y son, eficaces; el que suprimiera los arbotantes externos y volviera a proyectar el exterior del octógono, de una manera que resultaría inaceptable para Scott, no desmerece el hecho de que, con toda seguridad, debemos a Essex la supervivencia del octógono de madera.

Scott (con su ingeniero R. Reynolds Rowe) remodeló tanto los elementos de madera originales como los añadidos por Essex. Además, restituyó los arbotantes que Essex había suprimido. El proyecto de Walsigham era una obra maestra de la arquitectura pero, en su forma original, constituía una especie de error estructural. Essex y Scott, han proporcionado, después de varios siglos, una estructura satisfactoria para el octógono.

23

El problema de Poleni

Criterios estructurales

Está de moda considerar el cálculo de estructuras desde el punto de vista de los estados límite. La jerga tiende a oscurecer el objetivo de la actividad. ¿Cuál es el problema que hay que resolver cuando un ingeniero o arquitecto aborda el cálculo de una estructura? En realidad el empleo de los estados límite recuerda al proyectista que su estructura debe satisfacer varios, o quizá un gran número de criterios. Por ejemplo, un límite para la corrosión permisible o una restricción de la anchura de las grietas pueden jugar papeles fundamentales en el cálculo de un pórtico de acero o de hormigón respectivamente. Estos dos criterios particulares también pueden tener un papel en el cálculo de la fábrica, si bien parece razonable suponerlos de importancia secundaria, para ser reconsiderados en último término por el proyectista, y no es probable que determinen el cálculo.

Los tres criterios estructurales más importantes son los de resistencia, rigidez y estabilidad. La estructura debe ser lo suficientemente resistente como para soportar cualquier tipo de carga a la que esté sometida, incluido su propio peso, no debe deformarse excesivamente y no debe desarrollar grandes desplazamientos, ya sean locales o de conjunto. Si se pueden satisfacer estos requisitos, el proyectista puede pasar a comprobar una lista de estados límite secundarios para asegurar que su estructura es útil.

El comportamiento de la fábrica

Cuando los conceptos de resistencia, rigidez y estabilidad se aplican a la fábrica surge una dificultad inmediata y paradójica. Una estructura antigua —por ejemplo el Panteón de Roma o un templo griego— parece intuitivamente bastante resistente en el sentido de que las cargas (el peso propio y el viento), a lo largo de los siglos, no han provocado su ruina por rotura del material. Esta cuestión se tratará más adelante, pero el hecho es que las tensiones medias en una estructura de fábrica típica son muy bajas; se pueden encontrar desconchones locales pero esto no parece afectar apenas a la integridad estructural del conjunto.

Así mismo, es poco probable que el ingeniero o arquitecto, se preocupe, en primera instancia, por las deformaciones excesivas en servicio de la bóveda de una catedral gótica. Resistencia y rigidez no están en el primer planos del cálculo de una fábrica; es el tercer criterio, la estabilidad, el que es relevante, si bien de una manera curiosa. El arco de fábrica de la figura 23.1, por ejemplo, puede resistir cómodamente la acción de su propio peso y, también, una carga puntual *P*, hasta cierta magnitud. Las tensiones son bajas y

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Poleni's problem,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 84 (1988): 737-59. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

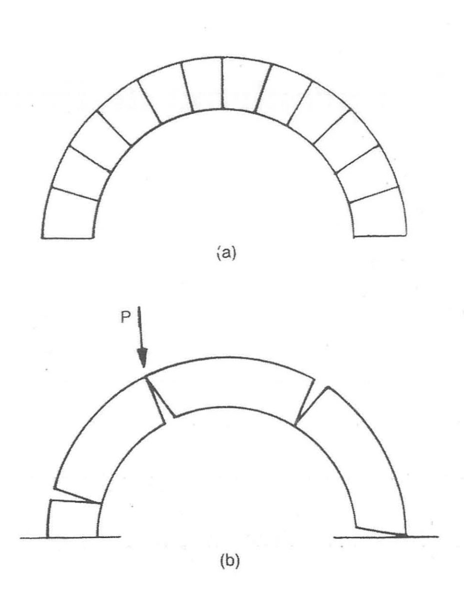


Figura 23.1
Mecanismo de colapso de un arco de fábrica

las deformaciones insignificantes, y ambas seguirán siéndolo a medida que la carga *P* aumenta. Sin embargo, para un cierto valor de *P*, el arco ya no puede contener los esfuerzos estructurales y se formará un mecanismo de colapso (el mecanismo de cuatro bielas de la figura 23.1(b)). El cómo se produce esto se tratará más adelante.

El arco de medio punto de la figura 23.1 soportará una determinada carga *P* siempre que su rosca tenga un espesor mínimo y, por tanto, proyectar un arco consiste en decidir un espesor para una luz determinada. Una vez realizado el proyecto y construido el arco, éste satisfará, ahora y para siempre, el criterio de resistencia (no habrá rotura por aplastamiento), el de rigidez (las deformaciones serán despreciables) y el de estabilidad (nunca se formará un mecanismo de cuatro bielas). El proyecto consiste, curiosamente para la mentalidad del proyectista moderno, en dar al arco las proporciones correctas.

Eran precisamente reglas de proporciones las que emplearon los constructores de la antigüedad clásica para proyectar sus estructuras, como es evidente, por ejemplo, en Vitruvio. Estas reglas nunca se perdieron;[2] sobrevivieron las Épocas Oscuras, se incluyeron en los libros secretos de las logias de canteros, y florecieron en los siglos XII y XIII en la época del gótico clásico, y más tarde, hasta que todo el sistema fue barrido por el Renacimiento.

EL ANÁLISIS MODERNO

El fin del proyecto medieval de estructuras fue anunciado por una de las *Dos nuevas ciencias* de Galileo.[3] En 1638 planteó el problema de la evaluación de la resistencia de una viga en ménsula; ¿cuál era el valor de la carga de rotura? Esta clase de pregunta se podía haber planteado antes (el tronco de un árbol atravesado sobre una zanja se romperá sometido a una carga muy pesada), pero no en el contexto del desarrollo de reglas prácticas de cálculo. Galileo deseaba determinar la resistencia de las vigas cargadas transversalmente en función de su ancho y su canto, de manera que se pudiese deducir una fórmula para calcular la resistencia de cualquier viga (de sección rectangular). Esto es un ejemplo de lo que modernamente se reconoce como proceso de cálculo (de la resistencia de una estructura).

La nueva ciencia de la mecánica estructural fue investigada afanosamente durante el siglo XVIII, cuando se buscaban soluciones a los cuatro problemas fundamentales —la resistencia de las vigas (el problema de Galileo), la resistencia de las columnas, el empuje de los arcos (contra los apoyos, por ej. las orillas de los ríos) y el empuje del terreno (contra los muros de contención). Los avances eran lentos, siendo retenidos (entre otras cosas) por la falta de un conocimiento preciso de los tensores de primer orden, es decir, los vectores. El concepto de tensión fue surgiendo lentamente pero, a su vez, éste sólo pudo desarrollarse correctamente después de la segunda década del siglo XIX, cuando se había resuelto el tensor de segundo orden (tensión).

Dos siglos después de Galileo el problema de la rotura de una viga en ménsula se había convertido en el problema de determinar el valor de la tensiones en esa viga. Codo a codo con los avances en la mecánica racional, los ensayos sobre los materiales constructivos habituales habían establecido valores de referencia de las resistencias de rotura. Era un paso natural intentar relacionar ambos valores, y tratar de establecer

que las tensiones de trabajo tuvieran un margen de seguridad adecuado al compararlos con los valores límite de los materiales utilizados. Al parecer fue Navier[4] el primero en manifestar que al proyectista, en realidad, no le interesaba el estado de colapso de su estructura (es decir, responder a la pregunta de Galileo), porque todos estaban de acuerdo en que era un estado que había que evitar. En cambio, el proyectista deseaba estar seguro de que el estado de trabajo era seguro y esta seguridad se conseguiría limitando las tensiones reales de la estructura a una fracción de sus valores de rotura. Navier daba a entender que la tarea del ingeniero es calcular este estado de trabajo, o estado real, y después utilizar sus reglas y fórmulas para proyectar la estructura. *Prima facie* esto parece un procedimiento razonable pero, si el proceso de análisis se examina con detalle, surgen dudas.

El proyectista desea en primer lugar encontrar los esfuerzos internos de su estructura (empujes, momentos flectores, etc.). Las primeras ecuaciones que escribe son las de la estática; los esfuerzos internos deben estar en equilibrio con las cargas. Si puede resolver estas ecuaciones inmediatamente, el primer paso completa el proceso (y, técnicamente, se dice que la estructura está estáticamente determinada o que es isostática). Sin embargo, normalmente, las ecuaciones del equilibrio, por sí solas, son irresolubles; la estructura está estáticamente indeterminada (es hiperestática). Hay muchos estados de equilibrio posibles, y determinar el estado real requiere el empleo de otras ecuaciones del análisis de estructuras.

Por ejemplo, el arco de la figura 23.1(a), que sólo soporta su propio peso, tiene infinitas configuraciones de equilibrio. Hooke *resolvió* el problema del arco en 1675, con su afirmación «del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido» aunque fue incapaz de proporcionar una descripción matemática de su potente teorema. Poleni[1] conocía este principio, y la figura 23.2 muestra su dibujo de una cadena que cuelga a tracción sometida a su propio peso; la misma forma, invertida, proporciona el trazado de un arco que soportará las mismas cargas a compresión. La geometría de esta línea de empujes dependerá de la longitud real de la cadena y de la distancia entre sus extremos. Así en la figura 23.3(a) se muestra una posible cadena invertida que se encuentra totalmente dentro de los límites del arco de medio punto. Para la fábrica, como se verá, los empujes tienen que estar dentro del contorno

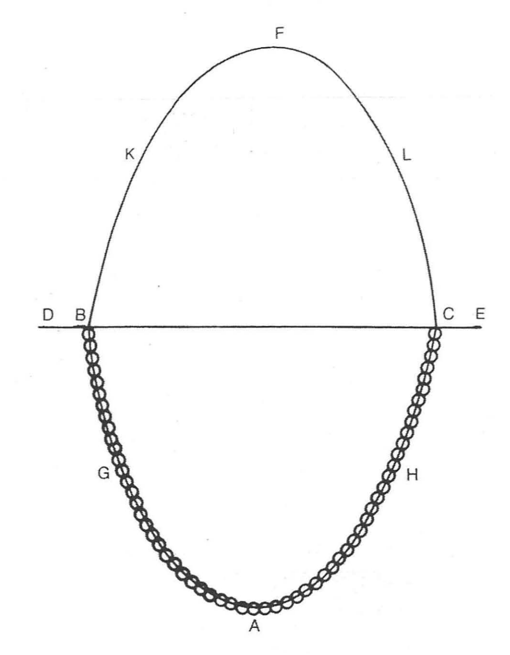


Figura 23.2
Cadena colgante de Hook

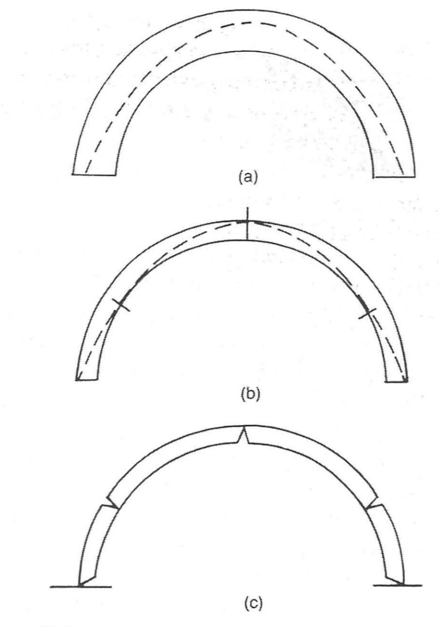


Figura 23.3
Arcos: (a) estable y (b), (c) arco de espesor mínimo

exterior de la construcción, y es evidente que, entre el intradós y el trasdós del arco de la figura 23.3(a), se podían haber trazado muchas otras catenarias.

Así, las ecuaciones de equilibrio, por sí mismas, no dan suficiente información para poder determinar la posición real de la línea de empujes de la figura 23.3(a). Es preciso utilizar las otras dos ecuaciones del análisis estructural. La primera ecuación representa un enunciado de las propiedades del material, para poder relacionar las deformaciones internas de la estructura con los esfuerzos internos. La segunda ecuación representa una afirmación geométrica y normalmente surge como una restricción interna o externa; en la figura 23.3(a), por ejemplo, el arco descansa firmemente sobre cimientos rígidos y las deformaciones internas del arco deben ser tales que se satisfagan las condiciones de contorno, a saber que los apoyos no sufren desplazamientos.

El cálculo elástico

La filosofía de Navier implica el postulado de una ley de deformación elástica y suponer ciertas condiciones de contorno que surgen al resolver el problema. De esta manera (formal) se tendrán suficientes ecuaciones para resolver un problema hiperestático; si el material del arco de la figura 23.3(a) es elástico, y los estribos rígidos, se puede calcular una posición única para la línea de empujes que equilibra las cargas (el peso propio o cualquier otra carga)

La solución de las ecuaciones estructurales para una estructura hiperestática es extraordinariamente sensible a pequeñísimas variaciones en las condiciones de contorno. Si uno de los apoyos fijos del arco de la figura 23.3(a) sufriera un pequeño desplazamiento, éste vendría acompañado por una gran alteración en la posición de la línea de empujes. (En este contexto, pequeño implica un desplazamiento que se puede incluir en el espesor de las líneas de la figura 23.3(a). La vista no detectaría ninguna diferencia entre el estado original y el desplazado.) Ahora bien, es seguro que uno de los estribos del arco sufrirá un pequeño desplazamiento (impredecible), y esto pone en cuestión toda la racionalidad del análisis elástico.

El análisis elástico trata de responder la pregunta: ¿Cuál es el estado real de la estructura? Si la estructura es hiperestática, el análisis debe tener en cuenta las propiedades del material, así como establecer algunas hipótesis sobre las condiciones de compatibilidad de las deformaciones; por ejemplo, las condiciones de contorno en los apoyos del arco. Si se supiera que los apoyos son absolutamente rígidos o fuera posible predecir su comportamiento, se podría calcular, efectivamente, el estado real de la estructura. Sin embargo, el estado real es cambiante; un viento fuerte, un ligero temblor de tierra, un cambio en el nivel freático ocasionarán, un estado de equilibrio de la estructura completamente distinto.

Fue esta situación la que observó el Comité de Investigación de las Estructuras de Acero (SSRC)[5] en una serie de ensayos sobre edificios construidos en estructura de acero, a principios de los años 30. Las tensiones (en realidad, deformaciones) medidas en la práctica no tenían casi relación con las calculadas confiadamente por el proyectista. Llegaron a la conclusión de que el problema no tenía solución —las imperfecciones prácticas de la construcción y el comportamiento eran inevitables y siempre conducirían a un estado de trabajo de la estructura impredecible. La profesión estructural se vio obligada, de hecho, a buscar un método de cálculo alternativo.

El cálculo plástico

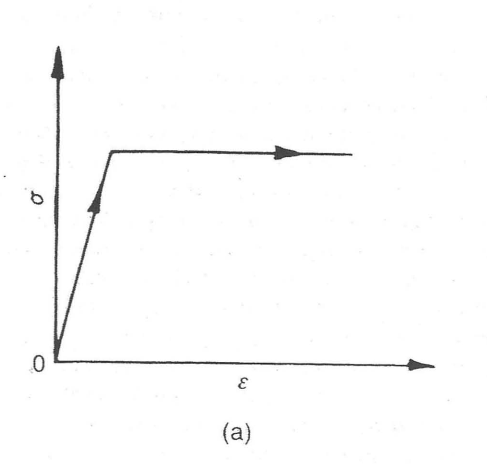
El sentido común parece indicar que un fuerte vendaval, resistido con facilidad por el edificio, que conducirá, sin embargo, a un estado de la estructura completamente diferente, no puede realmente haberla debilitado. El sentido común, en este caso, se ve apoyado tanto por la teoría como por la experiencia. Si dos estructuras aparentemente idénticas, pero que en realidad presentan pequeñas imperfecciones, distintas en cada una de ellas, de manera que sus estados tensionales iniciales son muy diferentes, se ponen en carga lentamente hasta alcanzar el colapso, las cargas de rotura (es decir, la resistencia de las estructuras) serán iguales. Fue esta observación la que condujo al desarrollo de las teoría plástica de las estructuras, aplicable a cualquier caso en el que el colapso es un proceso dúctil casi-estable y, por lo tanto, a las estructuras de acero y hormigón armado, y a cualquier tipo de construcción que utilice un material estructural habitual (no, por ej., el hierro fundido o el vidrio, que son frágiles) y que no desarrolle inestabilidades locales o generales.

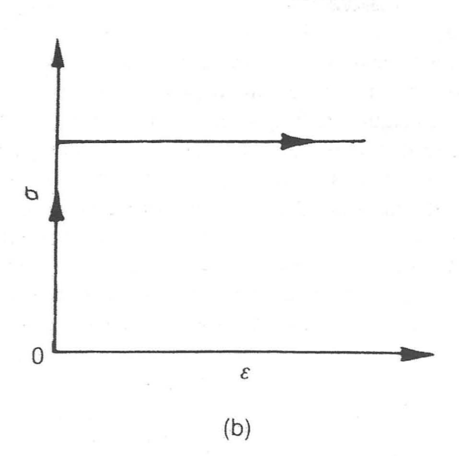
Desde luego, el proyectista plástico no imagina que su estructura realmente se hundirá. Realiza el cálculo para una cargas mayoradas con un coeficiente hipotético, y después afirma que la estructura sometida a las cargas de trabajo (más pequeñas) nunca colapsará. Esta afirmación se deriva del teorema fundamental del análisis plástico y es la herramienta clave del proyectista.

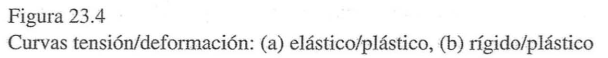
El proyectista no trabaja realmente con las cargas de rotura. Construye un estado de equilibrio con los valores de trabajo de las cargas y después dimensiona los elementos de la estructura de manera que los esfuerzos internos asociados al estado de equilibrio puedan ser soportados con seguridad. En este sentido, el proyectista plástico y el proyectista elástico han llegado a un terreno común. El último cree que ha encontrado el estado real de trabajo en equilibrio con las cargas aplicadas. Por el contrario, el proyectista plástico no intenta responder a la pregunta: ¿Cuál es el estado real? Establece un estado concreto (y, desde el punto de vista del cálculo, muy favorable) que está en equilibrio con las cargas aplicadas. Ambos proceden casi de la misma manera en el cálculo detallado de los elementos. La ruta del proyectista plástico es más directa; empleando la curva idealizada de tensión/deformación de la figura 23.4(a), en la que a un tramo elástico le sigue otro perfectamente plástico, le es más fácil predecir el estado límite de rotura que al proyectista elástico calcular el estado de trabajo real.

Las propiedades elásticas del material se han introducido, como se ha visto, para que sea posible calcular el estado real de la estructura hiperestática. Así, las propiedades elásticas están presentes en la curva de tensión/deformación de la figura 23.4(a), aunque el proyectista no hace uso de ellas. Se puede realizar, ahora, una importante simplificación; la idealización elástico/plástica de la figura 23.4(a) se puede sustituir por la idealización rígido/plástica de la figura 23.4(b). Para el proyectista plástico no se ha perdido información, porque no pretende calcular el estado elástico de trabajo, y tanto la figura 23.4(a) como la 23.4(b) se pueden utilizar para dar el mismo pronóstico sobre el estado plástico límite. Sin embargo, la curva de la figura 23.4(b) no puede proporcionar ninguna información que permita conocer el estado real de la estructura.

Lo que puede hacer el proyectista es construir una solución de equilibrio y aplicar el teorema fundamental de la seguridad del cálculo plástico. Si se puede encontrar un estado de equilibrio, es decir, aquél en el que el conjunto de esfuerzos internos esté en






Figura 23.4
Curvas tensión/deformación: (a) elástico/plástico, (b) rígido/plástico

equilibrio con las cargas externas y, además, para el que cada sección transversal de la estructura satisfaga un criterio de resistencia (por ejemplo, que las tensiones en cada sección de la estructura sean menores que el límite elástico del material), entonces, la estructura es segura. La potencia de este teorema reside en el hecho de que el estado de equilibrio considerado por el proyectista no tiene por qué ser el estado real; visto desde un punto de vista antropomórfico, el teorema de la seguridad afirma que si el proyectista puede encontrar un modo en el que la estructura se comporte satisfactoriamente, con toda seguridad la estructura puede por sí misma encontrarlo también.

Así, no es preciso intentar realizar el cálculo (por ejemplo un cálculo elástico) del estado real de la estructura y por esta razón no se pierde información sobre la resistencia de la estructura al sustituir la ley de tensión/deformación de la figura 23.4(a) por la ley rígido/plástica de la figura 23.4(b). Se observará que, según este razonamiento, el proceso del cálculo elástico es seguro. No calcula cantidades observables pero, a pesar de ello, genera una solución de equilibrio, y el proyectista garantiza que las tensiones son, en cualquier punto, menores que los valores límite. Por lo tanto, según los teoremas plásticos el método elástico es seguro.

El modo en que el proyectista plástico construye su solución de equilibrio es el siguiente. Hace que su estructura colapse sometida a los valores de trabajo de las cargas. Para el acero, esto proporcionará una serie de valores de los momentos plásticos últimos de la estructura. Entonces, el proyectista hace que la estructura construida sea más resistente por un margen convenido; que el momento plástico en cada sección sea, por ejemplo, 1,75 veces el valor necesario para el colapso debido a los valores de trabajo de las cargas. El valor 1,75 se refiere normalmente al coeficiente de la carga de rotura, pero también puede considerarse como el margen de resistencia en cada sección de la estructura construida en comparación con una estrictamente dimensionada según las cargas de trabajo. Esta filosofía plástica se puede trasladar al análisis del comportamiento de las fábricas.

EL CÁLCULO DE LA FÁBRICA

La fábrica es un material unilateral. Es un conjunto de ladrillos o piedras, labradas o no, o de barro secado al sol (adobe), aparejados en seco o con un mortero pobre, formando un todo consistente. La estructura resultante puede transmitir esfuerzos de compresión, pero sólo puede soportar pequeñas tracciones; cualquier intento de someterla a esfuerzos de tracción ocasionará la separación del conjunto. Así la curva idealizada (unilateral) de tensión/deformación será la que aparece en figura 23.5(a); a compresión existe una respuesta elástica, pero se pueden originar deformaciones de tracción con una tensión igual a cero.

La curva de tensiones/deformaciones de la figura 23.5(a) se puede introducir como una modificación que complica el proceso habitual del análisis elástico, y esto es precisamente lo que hizo Castigliano[6] a modo de ejemplo sofisticado de sus teoremas de la energía. Las tres ecuaciones (equilibrio estático, compatibilidad en las deformaciones y características del material) se pueden combinar en una expresión de la energía de deformación (estrictamente, energía complementaria) para resolver estructuras hiperestáticas. En esta formulación, o realmente en la resolución directa de las ecuaciones básicas, se necesitan las características de la sección de los elementos estructurales. Así, en la determinación de los esfuerzos de un puente de fábrica con una gran luz (Ponte Mosca, Turín), Castigliano empleó el momento de inercia de la sección transversal rectangular de la rosca del arco. Siempre que la línea de empujes se encuentre dentro del tercio central del arco, la sección total estará sometida a compresión; si la línea de empujes se encuentra fuera de este núcleo central, pero dentro del arco, aparecerán tracciones para un material elástico normal. El material unilateral de la fábrica se agrietará.

En el primer tanteo de Castigliano, la línea de empujes se encontraba realmente fuera del tercio central en ciertas partes del arco. Considerando esta primera posición de la línea de empujes como una estimación de su posición definitiva, Castigliano calculó el alcance de las grietas, la correspondiente reducción del espesor y de aquí un nuevo momento de inercia modificado para cada sección del arco. Un nuevo análisis, en el que se empleó este arco modificado condujo a una posición de la línea de empujes ligeramente distinta, y el análisis se repitió. La convergencia se produce rápidamente.

Castigliano, trabajando con un material unilateral, estaba intentando responder la pregunta de Navier:

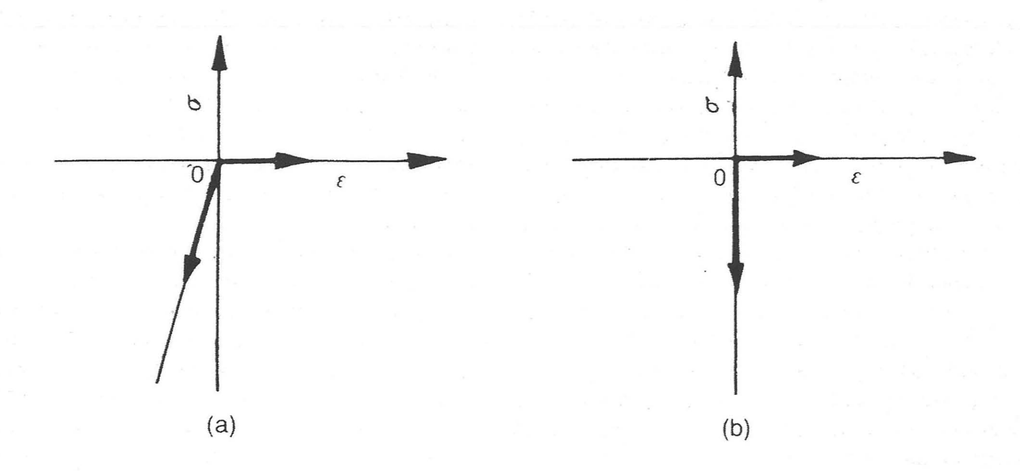


Figura 23.5
Curvas de tensión/deformación para la fábrica unilateral: (a) elástica a compresión, (b) rígida a compresión

¿Cuál es el estado real de la estructura? En su análisis, planteó la hipótesis habitual sobre las condiciones de contorno en la deformación —en este caso que los estribos eran rígidos. Por tanto, el análisis está sujeto a las mismas objeciones que un análisis elástico convencional y, en particular, tendrá poco que ver con la condición del arco si los estribos han estado sometidos a movimientos, por muy pequeños que éstos sean.

No se ha intentado hacer mediciones a gran escala de los esfuerzos internos en estructuras de fábrica para comparar con la investigación del SSRC sobre las estructuras porticadas de acero en el decenio 1930-40. Si se llevasen a cabo estos ensayos, con seguridad darían resultados idénticos a los obtenidos por el SSRC y se encontraría que los cálculos elásticos (o elásticos unilaterales de Castigliano) son pobres predictores del estado real de la estructura. Al igual que para el acero, el comportamiento de la fábrica se comprende mejor desde el punto de vista plástico.

Los teoremas plásticos para la fábrica

Es conveniente exponer los principios básicos del funcionamiento de la fábrica en relación con una estructura corriente, por ejemplo el arco de la figura 23.1, formado únicamente por dovelas. Sin embargo, las conclusiones se aplican a cualquier tipo de fábrica, aunque sea mucho más compleja como, por ejemplo, una catedral gótica.

Como ya se ha mencionado, las tensiones medias de compresión de las fábricas son, normalmente, muy bajas. En un puente de gran luz o en uno o dos elementos de una catedral (los pilares cruceros que soportan el peso de una torre) las tensiones pueden ser del orden de la décima parte de la resistencia de rotura a compresión del material. Los elementos estructurales principales estarán trabajando a aproximadamente la centésima parte de la tensión de rotura, y los elementos secundarios a la milésima. En función de estas consideraciones, se supondrá que, en general, las tensiones son tan bajas que no existe peligro de fallo del material que, por tanto, se considerará infinitamente resistente a compresión. Por otra parte, no se puede contar con que el mortero pobre o el aparejo de las piedras puedan resistir tracciones. Se supondrá que el material es unilateral, incapaz de resistir tracciones. Por último, se supondrá que la compresión entre las distintas partes de la

fábrica es suficiente como para que el rozamiento impida el deslizamiento de una parte sobre otra.

Ninguna de estas hipótesis es estrictamente verdadera; en la práctica, a veces se pueden encontrar ejemplos de su transgresión, que puede tenerse en cuenta en el análisis de la estructura. Sin embargo, estas hipótesis (resistencia a compresión infinita, resistencia a tracción nula e imposibilidad de deslizamiento) permiten traducir directamente los teoremas plásticos del acero a la fábrica.

El teorema de la «seguridad», el más importante, puede interpretarse en relación con la catenaria invertida de Hooke. La condición de equilibrio se representa por esta línea de empujes; como los esfuerzos en la fábrica deben ser de compresión, la catenaria invertida estará dentro de los límites de la fábrica. El teorema de la seguridad afirma que si es posible encontrar tal posición para la línea de empujes, esto es prueba irrefutable de que la estructura es estable y que el colapso no se producirá jamás.

Desde el punto de vista de la analogía de Hooke, la geometría del arco real debe contener al menos una de las infinitas catenarias invertidas correspondientes a una carga determinada. Una vez más, el estado real de la estructura no es relevante a la hora de determinar su estabilidad; un pequeño desplazamiento accidental de un estribo es inapreciable a simple vista (en el dibujo será del orden del espesor de una línea), y como la geometría permanece virtualmente inalterada, la estabilidad no se ve afectada.

La conclusión implícita es que el agrietamiento de la fábrica no es, en esencia, peligroso. Pequeñas imperfecciones pueden conducir a una respuesta de la estructura aparentemente drástica, y a grietas visibles que indiquen que la línea de empujes ha salido fuera del tercio central, pero todavía permanece dentro de la fábrica (piénsese en el arco de Castigliano). No obstante, es de esperar que un material unilateral como la fábrica se agriete. Siempre que los movimientos sean pequeños, estas grietas no presagian un estado de ruina de la estructura en su conjunto. Son síntomas de la natural morbidez de la fábrica. Una parte de la patología asociada se trata más adelante.

Surge la pregunta de qué afirmaciones significativas (si las hay) se pueden hacer sobre la estructura de fábrica cuando las herramientas del análisis se simplifican tanto y se descarta parte de la información. En concreto, de los tres enunciados estructurales básicos, se conservará el del equilibrio estático. Si a éste se añade la idea del material unilateral, puede aplicarse el teorema de la seguridad. La estructura nunca colapsará, a pesar de la aparición de grietas y, con independencia de pequeños desplazamientos fortuitos de los apoyos.

Aún más, el teorema de la seguridad seguirá siendo pertinente si la relación unilateral tensión/deformación de la figura 23.5(a) se idealiza como la de la figura 23.5(b); el material es rígido a compresión y no acepta deformaciones de tracción. Así, no se especifican constantes elásticas, o más bien, el módulo de elasticidad es cero a tracción e infinito a compresión y, por tanto, no es posible obtener una estimación del estado real de la estructura. Por último, como las condiciones de contorno de la estructura son, en esencia, imposibles de conocer, se considerarán desconocidas; no se harán hipótesis, por ejemplo, sobre la rigidez de los apoyos.

En consecuencia, formalmente, el análisis estructural de la fábrica se realiza utilizando como sigue los tres enunciados básicos de la teoría estructural

a) Equilibrio: el empleo de la estática establece que la estructura es permanentemente estable aún cuando su estado real difiera ocasionalmente.
b) Comportamiento del material: el material es unilateral, y se idealiza rígido a compresión; por tanto no se puede calcular una respuesta elástica.
c) Compatibilidad de deformaciones: como no se va a calcular el estado real de la estructura, no se necesitan las ecuaciones relativas a las deformaciones. En cualquier caso, el análisis se llevará a cabo suponiendo que se desconocen las condiciones de contorno.

Con estas tres condicions restrictivas, resulta que se pueden hacer afirmaciones significativas sobre la seguridad de una estructura de fábrica y, aún más, se puede intentar interpretar los defectos que, en la práctica, manifiestan ciertos elementos estructurales.

El coeficiente geométrico de seguridad

La línea de empujes dibujada en la figura 23.3(a) es sólo una de las infinitas líneas de este tipo. Si el peso del arco se distribuye uniformemente, la forma de la línea de empujes es la de la catenaria, que desde luego es diferente de la forma circular del arco de medio punto. Con todo, el arco de la figura 23.3(a)

tiene un espesor suficiente como para contener distintas líneas de empujes. Para el arco de medio punto hay un espesor mínimo (poco más del 10% del radio) que contendrá justo una catenaria; un arco con esta proporción se ha dibujado aproximadamente a escala en la figura 23.3(b). No se puede construir un arco más delgado sin que la línea de empujes salga fuera de la fábrica, lo que implicaría tracciones en contra de la hipótesis unilateral de la figura 23.5(b). El arco de la figura 23.3(b) está a punto de colapsar mediante la formación de un mecanismo de cinco bielas, figura 23.3(c); cualquier ligera asimetría (de la geometría o de las cargas) hará desaparecer una de las articulaciones de los apoyos y convertirá el mecanismo en uno normal de cuatro bielas.

El arco de la figura 23.3(b) se puede incluir dentro del arco de la figura 23.3(a) lo que conduce al concepto de un coeficiente geométrico de seguridad, definido por la relación entre los espesores de los dos arcos. Si este coeficiente fuese 3, por ejemplo, la línea de empujes del arco de la figura 23.3(a) podría estar contenida dentro de su tercio central (su núcleo central de inercia que es, desde luego, un concepto puramente elástico); si el coeficiente fuese 2, la línea de empujes estaría contenida dentro de un arco de espesor mitad de la real, etc. (los valores prácticos para el coeficiente geométrico de seguridad parecen estar alrededor de 2).

El concepto de un coeficiente geométrico en la construcción de fábrica sustituye por tanto al concepto de coeficiente de resistencia en la aplicación de la teoría plástica a las estructuras de acero o de hormigón. En el cálculo de un pórtico con un coeficiente de 2, se calcularía el valor del momento plástico último para que el colapso se produzca exactamente con las cargas de trabajo, y la estructura real se construiría duplicando su resistencia. En el cálculo de una fábrica con un coeficiente de 2, el espesor se calcularía para que colapsara exactamente debido a las cargas de trabajo, y la estructura real se construiría con el doble de espesor.

Se pueden hacer otras afirmaciones numéricas. Por ejemplo, las dos posiciones de la línea de empujes de la figura 23.6 son ciertamente las posiciones extremas, cada una de ellas corresponde a un valor calculable de la componente horizontal del empuje. Estos dos valores del empuje horizontal representan los límites entre los que se debe encontrar siempre su valor real, de manera que el proyectista puede calcular el estribo con suficiente confianza.

Así, a pesar de las restricciones aparentemente extremas del análisis, es posible hacer afirmaciones categóricas. En primer lugar, se puede calcular un valor numérico que represente, geométricamente, la seguridad de una construcción de fábrica. En segundo lugar, es posible determinar cantidades estructurales significativas para el proyecto (por ejemplo el valor del empuje en estribos) que se hallen entre límites calculables.

Estudio de algunas patologías

Una estructura realizada con un material rígido/unilateral (la curva de tensión/deformación de la figura 23.5(b)) no se puede deformar sin agrietarse. Es interesante intentar predecir la situación de las grietas que pueden aparecer como consecuencia de pequeños movimientos del entorno que soporta la estructura. A la inversa, es interesante hacer un análisis de

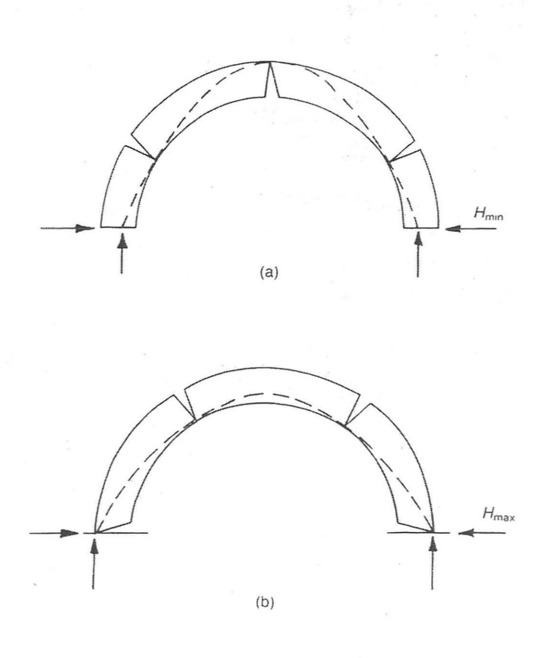


Figura 23.6
Posiciones extremas de la línea de empujes

la patología de la estructura agrietada e intentar deducir los movimientos del entorno.

El arco

A modo de ejemplo sencillo, se podría suponer que el arco escarzano de la figura 23.7(a), se construye, perfectamente, sobre cimbras. Cuando se retiran las cimbras el arco empuja contra los estribos y éstos, inevitablemente, se separan. Para adaptarse al incremento de la luz, el arco debe agrietarse, y lo hará según la configuración de la figura 23.7(a). Ésta será la respuesta esperada a un pequeño pero desconocido movimiento de los estribos hacia afuera; el arco triarticulado resultante es estable, isostático, y está empujando contra los estribos con un empuje mínimo, ahora calculable.

Si el arco fuese apuntado, figura 23.7(c), la línea de empujes no podría «alcanzar» el trasdós de la clave, figura 23.7(d), y la única articulación central sería sustituida, en teoría, por dos articulaciones ligeramente separadas. En la práctica, una ligera asimetría hará que sólo se forme una de las dos articulaciones próximas a la clave. Como todos los arcos empujan, y todas las márgenes de los ríos ceden, cuando se pasa por debajo de un puente de fábrica, es muy habitual ver una única grieta que corre a lo largo del cañón de la bóveda en, o cerca de, la coronación.

La bóveda de crucería

Una mera extensión de estas ideas básicas sobre los arcos conduce a la comprensión de la mecánica de las bóvedas.[7] Como primer paso hacia esta comprensión, la figura 23.8(a) muestra la sección transversal de una bóveda de cañón cilíndrica, dibujada más o menos a escala (por ejemplo, una bóveda de 0,3 m de espesor con una luz de 15 m). Se supone que la bóveda se sostiene por medio de estribos exteriores, con o sin arbotantes sobre las naves laterales. Tal y como se ha dibujado, la bóveda es demasiado delgada para soportar su propio peso. El espesor mínimo del 10% del radio, sin margen de seguridad (figura 23.3(b)) implica que la bóveda debería tener un espesor de más de 0,75 m. Por tanto, la figura 23.8(a) muestra un relleno sobre los riñones del cañón, que permite que los esfuerzos de la bóveda tengan un camino para «escaparse» de la bóveda propiamente dicha.

El sistema de contrarresto exterior cederá ligeramente, de forma casi inevitable, debido a los empujes

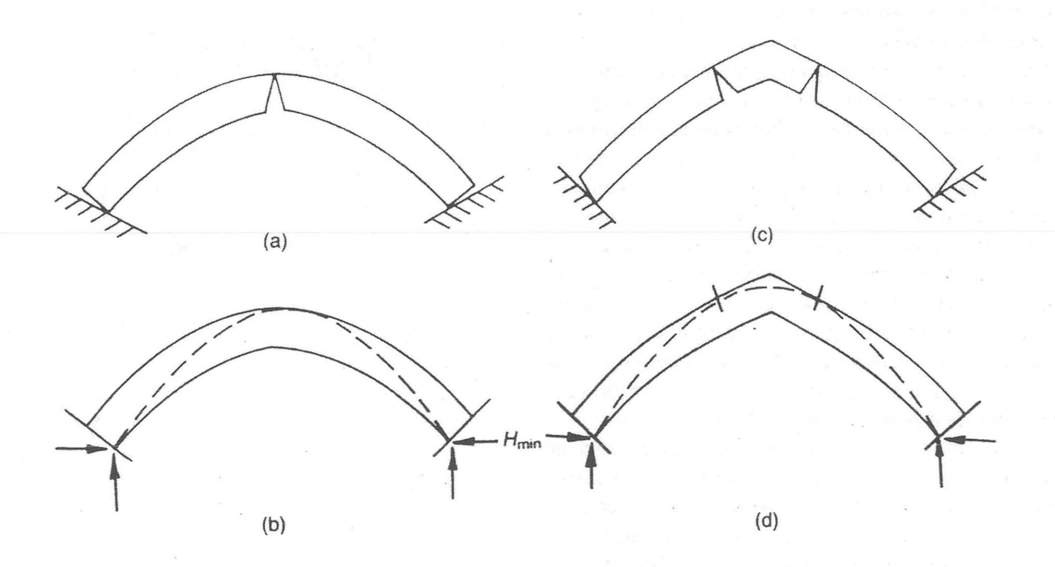
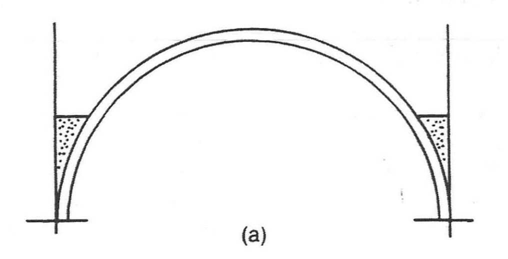


Figura 23.7
Agrietamiento de arcos debido al incremento de la luz



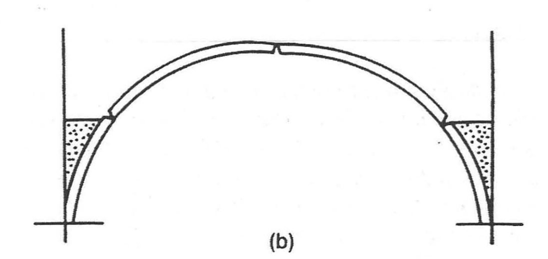


Figura 23.8
Bóveda de cañón cilíndrica: (a) sin deformar, (b) agrietada

de la bóveda y, durante los primeros años de vida de la estructura, se producirán movimientos. Los movimientos de los estribos cesarán virtualmente cuando el terreno debajo de la cimentación se haya consolidado debido a las cargas. La correspondiente configuración de grietas de la figura 23.8(b) ya se ha comentado (cf. figura 23.7(a)). Si la bóveda tuviese una sección apuntada, la grieta próxima a la clave estaría desplazada con respecto al centro; cf. figura 23.7(c). La figura 23.9, de Pol Abraham,[8] muestra un dibujo de las típicas grietas de esta clase cerca de la coronación de una bóveda cuatripartita ligeramente apuntada. Éste es el primer tipo de defecto crónico que, en la práctica, manifiestan las bóvedas de fábrica, pero en la figura 23.9 se pueden ver también otras grietas.

La bóveda de la figura 23.8 es fundamentalmente bidimensional, en el sentido de que se supone que la sección transversal es la misma a todo lo largo de la longitud de la iglesia. La figura 23.10 muestra, esquemáticamente, un tramo cuadrado de una bóveda cuatripartita formada por la intersección de dos cañones cilíndricos. La figura 23.10(a) muestra un alzado de la bóveda, mirando hacia el oeste a lo largo de la iglesia; el relleno, que tiene la misma función que antes, está colocado en los senos conoidales de la bóveda (cf. la planta de la figura 23.10(d)). Se supone que la bóveda se extiende a varios tramos, como se indica en la planta. Si ahora, el sistema de contrarresto de la bóveda cede ligeramente, el cañón en dirección este/oeste se agrietará como antes, figura 23.10(b), y aparecerá una única línea de articulación en, o cerca de, la clave; este primer tipo de defecto

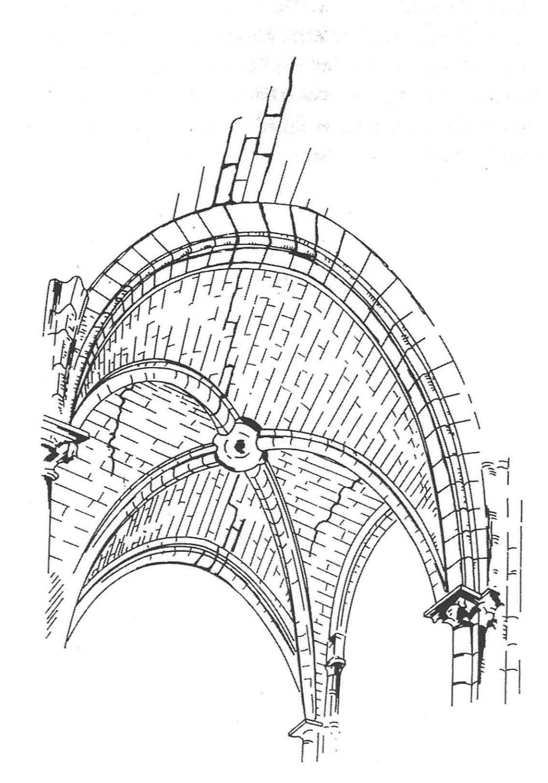


Figura 23.9
Bóveda cuatripartita agrietada (según Abraham)

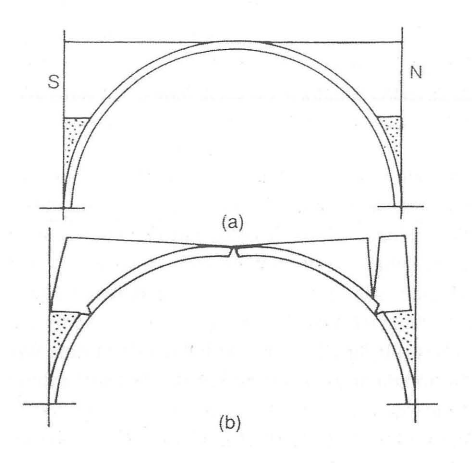
crónico, se verá desde el interior de la iglesia. El cambio en la geometría se adapta mediante la rotación de las tres articulaciones, con el consiguiente descenso de la coronación de la bóveda.

Sin embargo, el cañón que va de norte a sur se ve afectado por una fuerte restricción geométrica. La línea de clave, horizontal, de este cañón se construyó para la dimensión original de la luz, pero ahora ésta ha aumentado. En el plano del sistema de contrarresto la discrepancia de medidas es cero, pero crece hasta hacerse máxima en la clave, tal y como se indica en la figura 23.10(c). El efecto general de este desacuerdo es evidente en el alzado de la figura 23.10(d); desde el lado izquierdo (sur) de la planta de la figura 23.10(d) se verá que esta incompatibilidad geométrica se puede absorber por medio de una apertura entre la bóveda y el muro.

No obstante, esto pondría a la fábrica del cañón norte-sur, contiguo al muro, en un estado de deformación crítico. En el lado derecho (norte) de la planta de la figura 23.10(d) se ha dibujado un tipo de agrietamiento que permite a la bóveda cambiar de forma en piezas monolíticas más o menos libres de deformaciones. Una segunda grieta (la grieta de Sabouret en la clasificación de Pol Abraham, según el arquitecto francés[9] que llamó la atención sobre su importancia) se ha abierto paralela a la grieta del muro (cf. figura 23.9). La grieta de Sabouret y la grieta del muro aislarán una parte de la bóveda norte-sur, y ésta podrá funcionar, entonces, como un arco simple que va de este a oeste y se tiende más o menos entre los senos contiguos de la bóveda; no obstante, en la práctica, el ancho de este arco aislado dependerá también de otros factores como, por ejemplo, la forma de la sección transversal principal de la bóveda.

Así, las grietas próximas a la clave indican la presencia de líneas de articulación en esa zona de la bóveda; a través de estas articulaciones se transmiten esfuerzos de compresión que, de hecho, actúan aproximadamente en dirección perpendicular a la articulación. Por el contrario, las grietas del muro y las de Sabouret representan una separación total de la fábrica y, a veces, se puede introducir en ellas la mano. A través de estas grietas no se puede transmitir ningún esfuerzo; los esfuerzos de compresión discurren paralelos a ellas.

El comportamiento representado en la figura 23.10 corresponde a una bóveda de crucería cilíndrica cuatripartita ideal con tramos cuadrados. La patología general de todas las bóvedas es del mismo tipo, y se puede observar en bóvedas de arista y nervadas de tramos rectangulares y, también, en las bóvedas de abanico. El aislamiento de varios paños de la bóveda



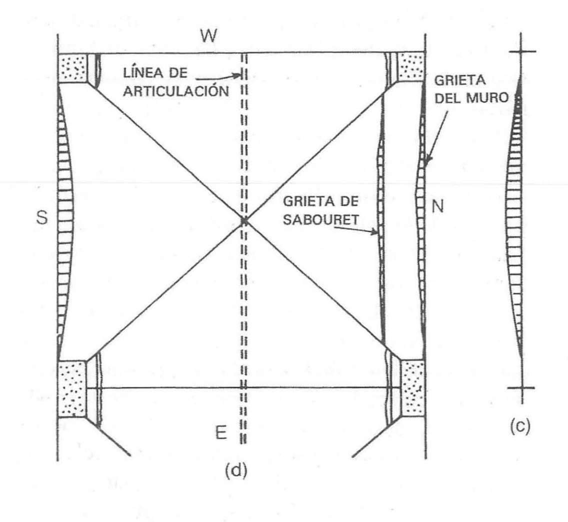


Figura 23.10
Esquema de bóveda cuatripartita

mediante grietas lleva a una inmediata comprensión cualitativa de la forma de transmisión de los esfuerzos, que se puede complementar mediante cálculos más o menos precisos de sus magnitudes.

La cúpula

El informe de Poleni de 1748[1] se encargó para dar razón del estado de agrietamiento de la cúpula de San Pedro, Roma (proyectada por Miguel Angel en 1546, construida después de su muerte por Fontana y della Porta alrededor de 1570). La cúpula mostraba numerosas grietas meridionales, que iban desde la base hasta casi la coronación, y las preguntas que había que responder, entonces y ahora, eran: ¿Cuál es el significado de estas grietas? ¿Son peligrosas?

Poleni proporciona una reseña completa del estado de los conocimientos sobre la construcción de fábrica a mediados del siglo XVIII. Como ya se ha mencionado, figura 23.2, conocía la catenaria de Hooke y demuestra una sorprendente pre-percepción del teorema de la seguridad en su afirmación explícita de que la estabilidad de la estructura está asegurada si se puede demostrar que una línea de empujes se encuentra totalmente dentro de la fábrica.

Poleni observó que las grietas de San Pedro ya habían dividido la cúpula en porciones con forma aproximadamente de husos esféricos (gajos); con el fin de analizarla, dividió la cúpula, hipotéticamente, en 50 de estos husos. Consideró, entonces, la estabilidad de un arco bidimensional compuesto por dos gajos que se apoyaban mutuamente en la coronación; la mitad de uno de estos arcos se muestra esquemáticamente en la figura 23.11. A partir de un dibujo de la sección transversal de la cúpula, Poleni calculó el peso de un gajo, dividiéndolo, para ello, en 16 segmentos y teniendo en cuenta el peso de la linterna. Después, ensartó 32 pesos en un hilo flexible, cada peso en proporción a un segmento; de esta manera experimental encontró la forma de la cadena colgante. Esta línea de empujes, superpuesta al dibujo original, se encontraba realmente dentro de los límites de la fábrica de la cúpula. Poleni llegó a la conclusión, correcta, de que la cúpula hipotéticamente dividida era estable y que, *a fortiori*, la cúpula original, agrietada o no, también era estable.

Efectivamente, Poleni había encontrado una solución de equilibrio para la cúpula en la que la tensión anular es cero. Considerando los gajos conceptualmente separados había encontrado un modo en el que toda la cúpula podía satisfacer las condiciones de equilibrio (aunque, como se verá, es preciso modificar la solución en las proximidades de la coronación, si la cúpula tiene un óculo). Para llegar a comprender el comportamiento de la fábrica de la cúpula, se puede emplear la misma técnica y, al igual que el arco circular proporciona cierto conocimiento sobre el comportamiento de cualquier arco, la cúpula esférica de espesor constante merece un atento estudio.

La figura 23.3(b), por ejemplo, muestra un arco de anchura uniforme con un espesor mínimo. Un arco

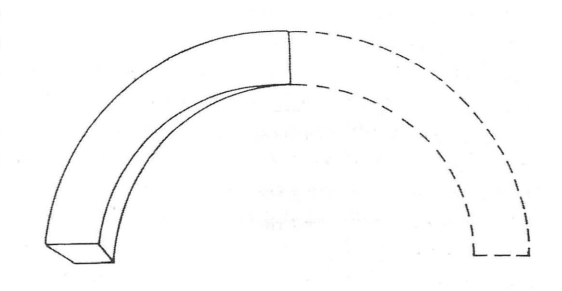


Figura 23.11
Arco bidimensional de «gajos» cortado de una cúpula

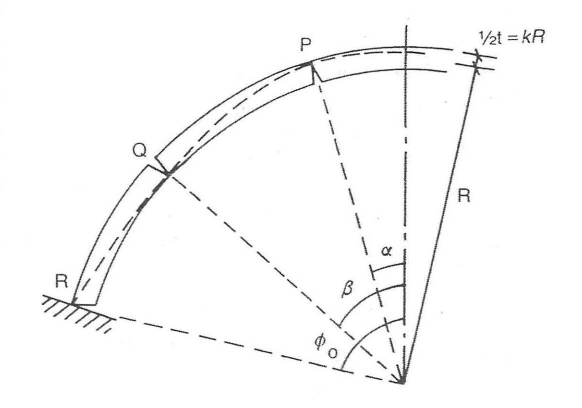


Figura 23.12
Espesor mínimo de un arco «gajos»

formado por dos gajos opuestos, figura 23.11, se puede considerar de la misma manera casi bidimensional, pudiéndose calcular el correspondiente espesor mínimo de la cúpula. La figura 23.12 muestra el arco de dos gajos de espesor mínimo en el momento de colapso, con articulaciones en P, Q y R.

El correspondiente estado de colapso para la cúpula completa se muestra en la figura 23.13 y se verá que la porción PP cerca de la coronación de la cúpula sigue siendo coherente (cf. figura 23.15), mientras que las articulaciones en P, Q y R aseguran que la cúpula se ha dividido a sí misma en husos, de modo que no se pueden producir tensiones anulares. Por el contrario, aunque el análisis se ha llevado a cabo para gajos delgados, la porción PP de la cúpula puede desarrollar las habituales tensiones meridionales y anulares, y de hecho tendrá que hacerlo si la cúpula tiene un óculo o si, como en el caso de San Pedro, soporta una linterna. El ejemplo del Panteón, que tiene un óculo, se analizará más adelante.

Para la cúpula completa de espesor constante, que no tenga un óculo o una linterna, el espesor mínimo necesario para la estabilidad disminuye, como cabría esperar, a medida que el ángulo de apertura ϕ_0 se reduce (figura 23.12). Para $\phi_0 = 51{,}8°$ los puntos P y Q coinciden y el espesor es cero, lo que corresponde al hecho bien conocido de que, en las cáscaras delgadas de revolución tanto las tensiones meridionales como las anulares son de compresión en la coronación, como también lo son para ángulos bastante separados de la coronación. La figura 23.14 muestra el espesor mínimo necesario para la estabilidad en función del ángulo de apertura ϕ_0. Para ángulos ϕ_0 menores que 51,8° una cúpula esférica de fábrica podría construirse, en teoría, con un espesor infinitamente pequeño. Una cúpula semiesférica tiene que tener un espesor mínimo de poco más del 2% del diámetro. Por supuesto, las cúpulas reales tienen un espesor

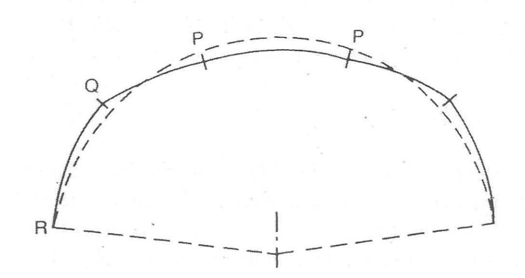


Figura 23.13
Estado de colapso correspondiente a la figura 23.12

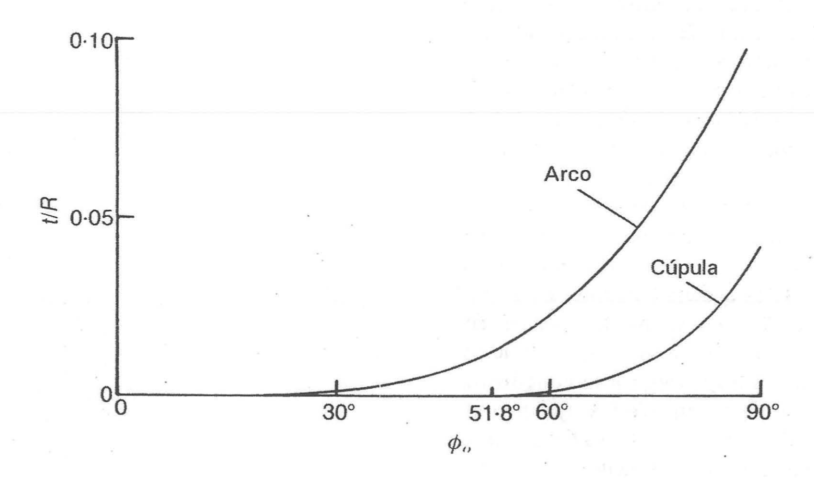


Figura 23.14
Espesores mínimos de arcos circulares y cúpulas esféricas

mucho mayor que este mínimo y, además, muchas no se aproximan a la semiesfera. La cúpula de San Pedro tiene un espesor de, aproximadamente, el 5% del diámetro, mientras que la del Panteón de Roma es del 3,3% aproximadamente. Es posible investigar la configuración esperable de grietas en este tipo de cúpulas.

Como en los ejemplos anteriores del arco simple y la bóveda de crucería, se supondrá que la estructura que soporta la cúpula cederá ligeramente debido a los empujes originados por la propia cúpula. El desajuste geométrico se compensará, como es habitual, mediante la formación de grietas; en la figura 23.15 se ha representado esquemáticamente una configuración simétrica de grietas para una cúpula completa. Las grietas meridionales nacen de la base y suben hacia la clave, pero hay un casquete central sin agrietar (cf. la zona PP de la figura 23.13). Por debajo de este nivel, el movimiento de la estructura de apoyo hacia afuera asegurará la formación de los husos o gajos en los que se puede basar el análisis.

En la figura 23.16 se muestra una sección transversal parcial. Si esta figura se compara con la figura 23.12, se puede observar que la articulación en Q se manifiesta en la base. Es posible escribir una ecuación intrínseca directa, si bien de cierta complejidad, a partir de la cual se puede determinar el ángulo α (que separa el casquete sólido de la cúpula de los gajos) en función del ángulo de apertura β y del espesor $t = 2kR$, donde R es el radio de la cúpula. Para los ángulos de apertura ϕ mayores que, aproximadamente, 65°, pero que dependen ligeramente del espesor t, la línea de empujes es tangente al intradós en Q, y la articulación ya no se forma en la base del huso (cf. figura 23.6(a) para el arco bidimensional).

La ecuación, de cierta complejidad, se puede resolver numéricamente, y en la figura 23.17 se han dibujado los resultados, a partir de los cuales se puede leer el valor de α que define la zona sin agrietar de la cúpula, para cualquier valor de la esbeltez adimensional $k(=t/2R)$. En San Pedro, por ejemplo, donde $\phi = 90°$ y $k \approx 0{,}05$, la curva superior da $\alpha = 24°$; las inquietantes grietas meridionales que condujeron al informe de Poleni deberían ascender unos 66° desde la base de la cúpula; este valor concuerda perfectamente con los dibujos de Poleni.

La figura 23.17 se ha calculado para la cúpula esférica de espesor constante, y tan sólo se aproxima a la cúpula de San Pedro. Sin embargo, los resultados parecen aplicables, lo que un análisis más detallado del Panteón apoya. Esta estructura romana de hormigón se muestra en sección en la figura 23.18. La cúpula tiene un óculo de unos 9 m de diámetro y puede idealizarse como una cúpula esférica con un radio medio de 22,4 m y un espesor de 1,50 m. Así, el valor de k en la figura 23.17 es aproximadamente de 0,033 y si la cúpula fuese realmente semiesférica α sería alrededor de 28°.

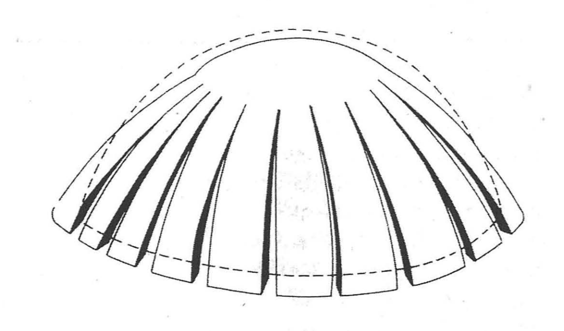


Figura 23.15
Ilustración esquemática del agrietamiento de una cúpula debido al incremento de la luz

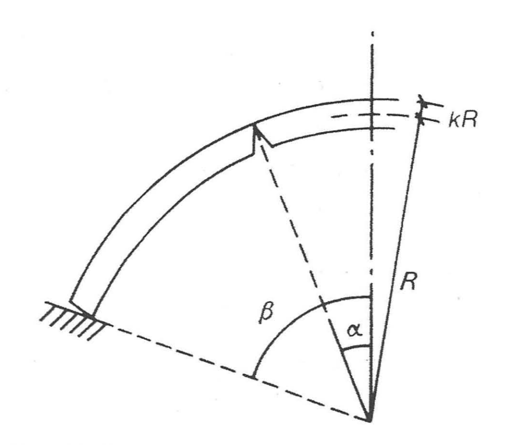


Figura 23.16
Sección transversal de la cúpula de la figura 23.15

Este valor de 28° concuerda con el valor de aproximadamente 26° que se halla construyendo gráficamente la línea de empujes. La figura 23.19 muestra la línea de empujes (línea continua) dibujada hasta unos 60° desde la coronación; el ángulo de apertura de 60° corresponde al fuerte incremento del espesor en la unión de la cúpula con el tambor circular que la soporta (figura 23.18).

La figura 23.19 muestra otra línea de empujes (línea de trazos) para la cúpula con un óculo central. La extensión de las grietas ($\alpha = 26°$) permanece casi invariable y el informe de Terenzio de hace 50

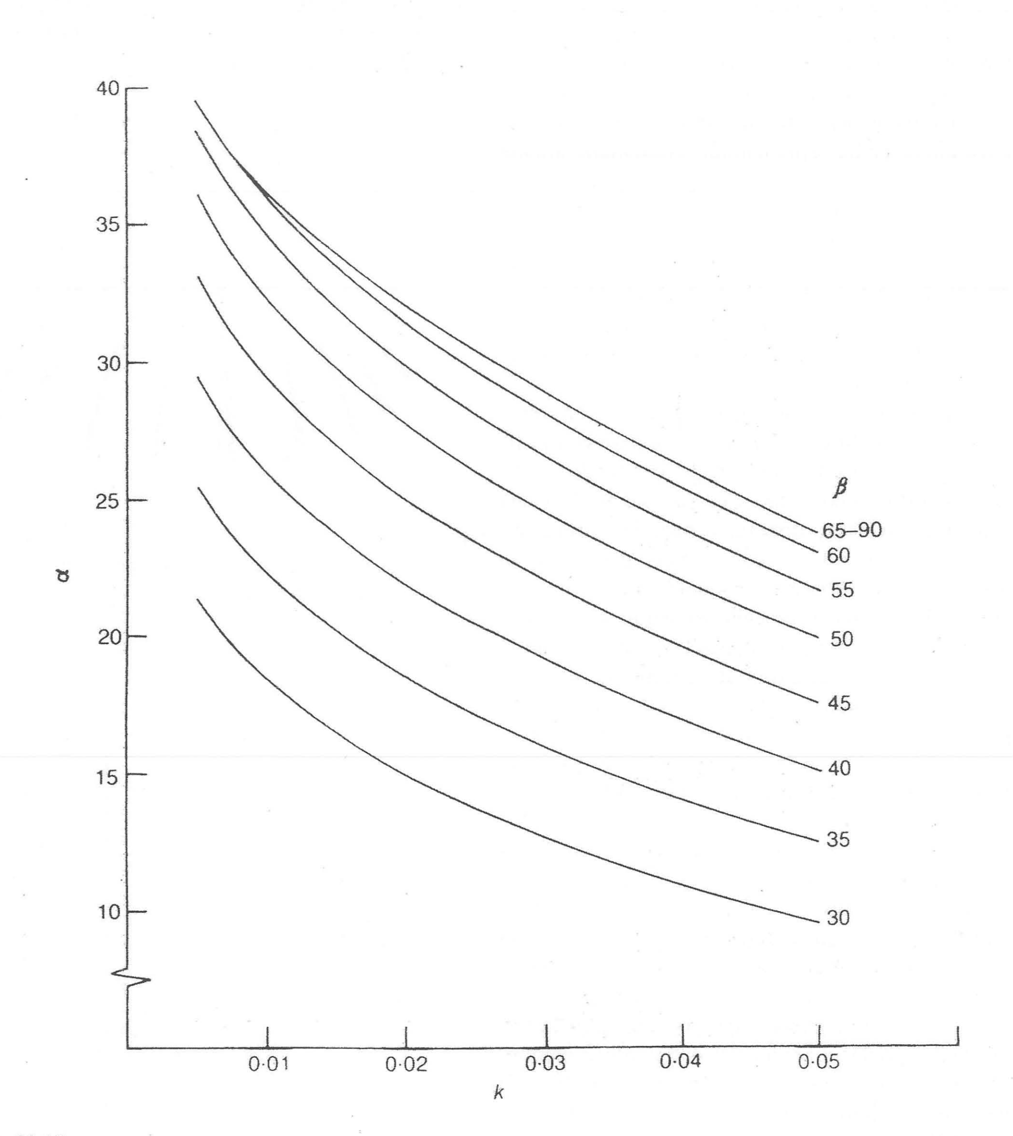


Figura 23.17
Extensión de las grietas en una cúpula esférica (cf. figuras 23.15 y 23.16)

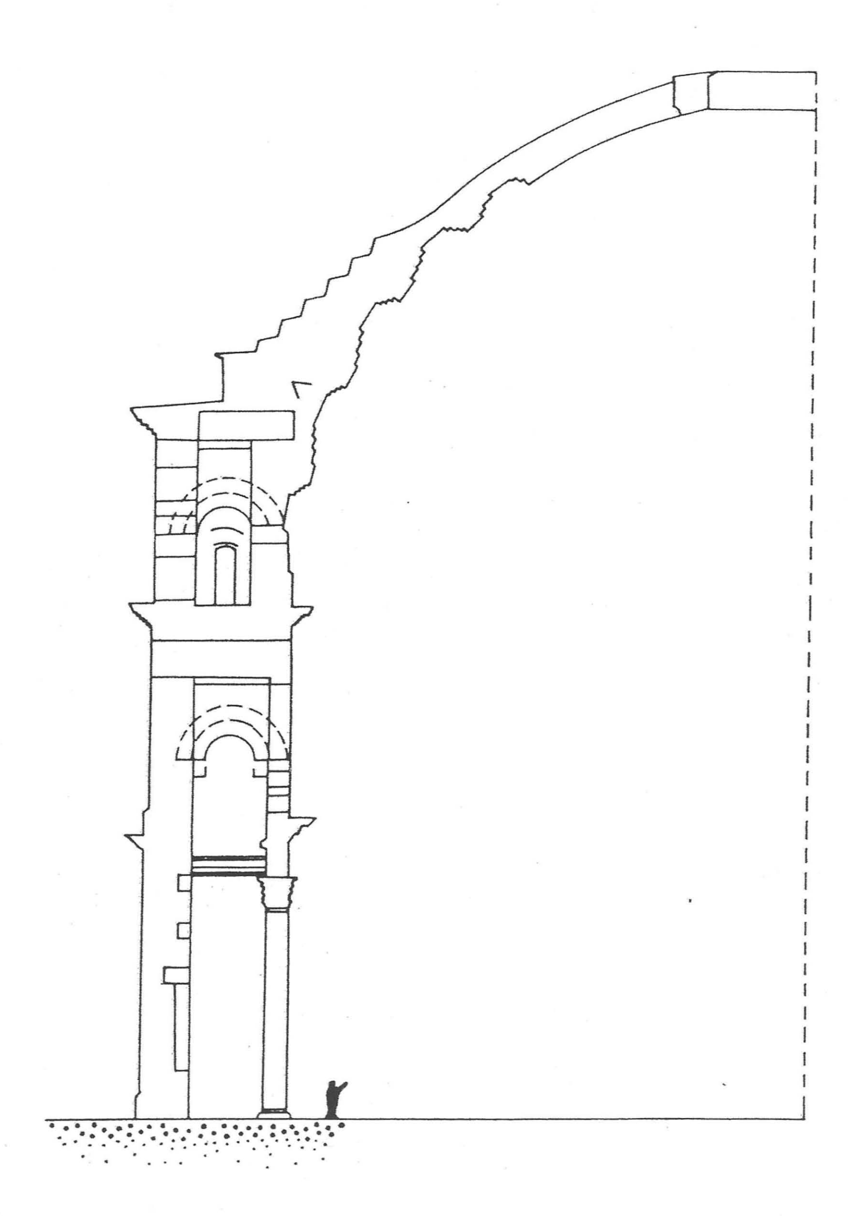


Figura 23.18
Sección transversal del Panteón de Roma

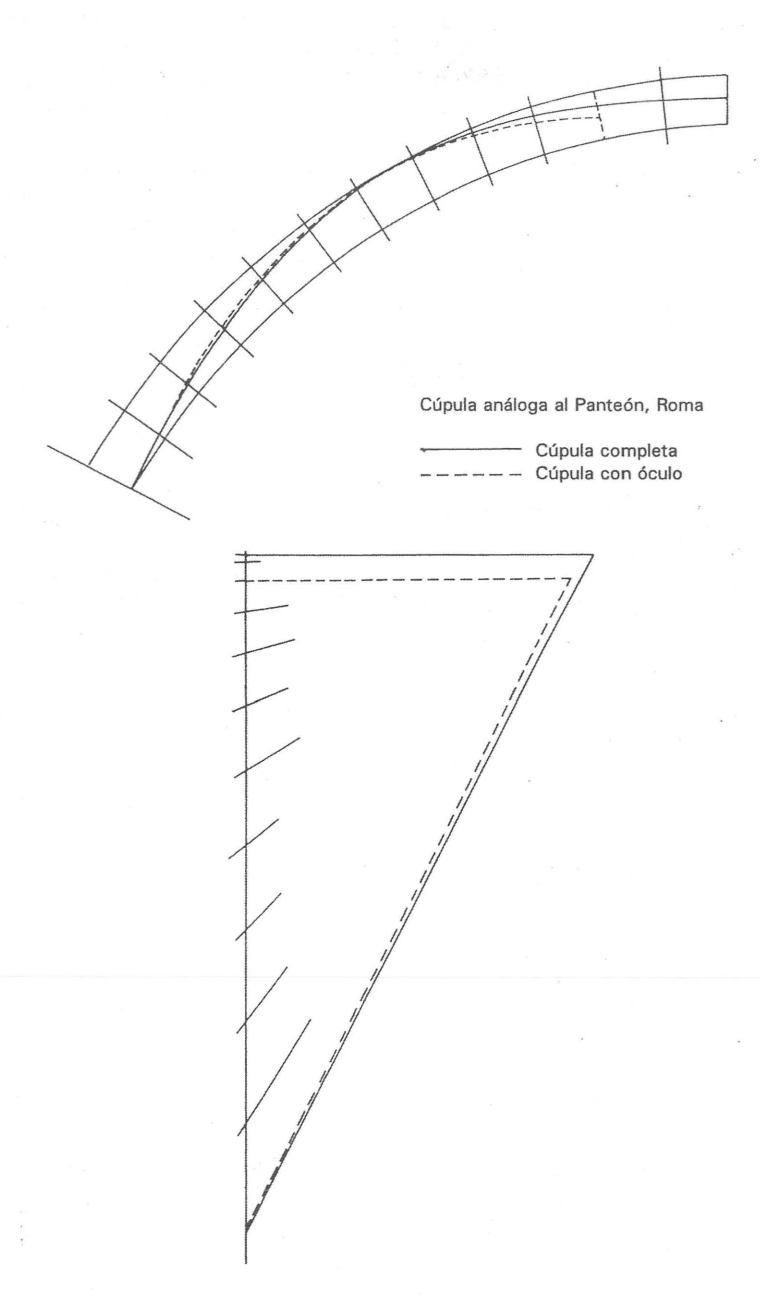


Figura 23.19
Líneas de empujes de una cúpula análoga a la del Panteón

años,[10] como señalan Mark y Hutchinson,[11] afirma que las grietas en la dirección meridional se extienden hasta una media de aproximadamente 57° por encima del arranque (es decir $\alpha = 23°$). Así, tanto el estudio de la cúpula completa sin óculo como los cálculos recogidos en la figura 23.17, predijeron con bastante exactitud la extensión de las grietas de la cúpula real.

Las líneas de empujes de la figura 23.19 corresponden a los esfuerzos en los husos definidos por la extensión del agrietamiento, es decir para ángulos entre 26° y el de apertura de 60°. Para ángulos menores la línea de empujes de la cúpula entera representa una de las posibilidades de equilibrio, pero, como se ha señalado, el casquete de la cúpula permanece en un estado coherente, sin agrietamiento (cf. figura 23.15). La línea de empujes de trazos para la cúpula con óculo no tiene sentido para la porción de casquete que tiene ángulos meridionales menores que 26°. Las tensiones meridionales deben tender a cero en el borde del óculo, y el casquete central sólo se puede mantener en equilibrio si se originan tensiones anulares de compresión. No obstante, este equilibrio de «membrana» es posible realmente para el casquete; la línea de empujes de trazos de la figura 23.19 es válida debajo del casquete para el gajo producido por el agrietamiento.

En todo este análisis del agrietamiento de las cúpulas se ha supuesto que el movimiento hacia afuera de la periferia es uniforme. En la práctica, por supuesto, los movimientos de borde serán marcadamente irregulares. En la figura 23.20 se muestra una cúpula ideal del habitual material rígido/unilateral, en la que tres cuartos de la periferia se mantienen fijos mientras el otro cuarto ha sufrido un pequeño desplazamiento hacia afuera. El ligero cambio en la geometría hará que se formen gajos en un cuarto de la cúpula (en la práctica, por supuesto, con una configuración irregular), sin perjudicar la estabilidad de los tres cuartos de cúpula restantes, que permanecen intactos.

La configuración de las grietas de la figura 23.21 de la cúpula de Santa Maria del Fiore de Florencia[12,13]

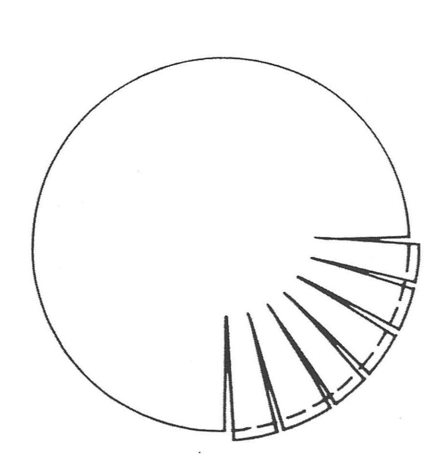


Figura 23.20
Agrietamiento parcial de una cúpula (esquema)

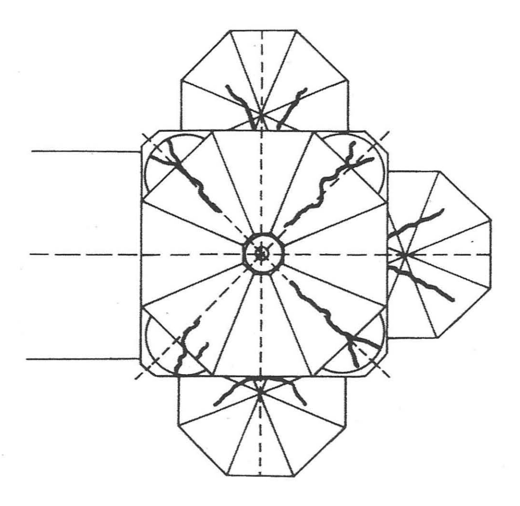


Figura 23.21
Grietas de la cúpula de Santa María del Fiore, Florencia (según Blasi y Ceccotti)

señala realmente donde han tenido lugar los movimientos. La cúpula octogonal de Brunelleschi está estribada al norte, sur y este por ábsides cupuliformes, y al oeste por la nave de la catedral. Sin embargo, entre estos cuatro puntos cardinales, la cúpula tiene un apoyo menos resistente y se han originado movimientos hacia afuera en la periferia. Las grietas apuntan hacia la zona donde se han producido los movimientos.

Conclusión

El equilibrio proporciona una potente clave para desvelar los secretos del comportamiento estructural. A pesar del deliberado rechazo de un análisis «elástico» que podría conducir al cálculo del estado real de la estructura, el empleo solamente de la estática puede facilitar, por una parte, buenas estimaciones de variables estructurales y, por otra, el comprender el significado de los agrietamientos de las fábricas. Poleni, midiendo el esfuerzo con el que su cadena experimental tiraba de los apoyos, fue capaz de estimar el empuje que la cúpula transmitía al tambor que la soporta. Pudo explicar la configuración de las grietas observadas y extrajo la conclusión correcta de que las grietas no afectan a la estabilidad de la cúpula. Sobre todo, Poleni sabía que era fundamental asegurar una geometría correcta a la construcción de fábrica. Las logias medievales también lo sabían, sin el apoyo de la mecánica racional de Poleni. A las reglas medievales, que se pueden remontar a la práctica romana, se llegó por prueba y error, pero estaban encaminadas, precisamente, a relacionar las proporciones de las diferentes partes de una estructura. Como tales, eran, fundamentalmente, el tipo de reglas correcto.

24

El mantenimiento de edificios de fábrica: la contribución del ingeniero

¿Por qué tiene que participar un ingeniero en el mantenimiento de edificios históricos? No es sencillo responder a esta pregunta. Visualmente siempre es patente cuando un ingeniero interviene: puede verse cómo se recalzan los cimientos, o cómo se introducen refuerzos de acero en estructuras de fábrica en la proximidad de grietas, actividades claramente relacionadas con la ingeniería. Pero la mera observación de una actividad no responde necesariamente a la pregunta de por qué ésta se realiza. ¿Son peligrosas las grietas? ¿Ponen los asentamientos en peligro la estabilidad global de la estructura?

Desde luego, aunque las grandes estructuras de fábrica precisan una vigilancia y mantenimiento más o menos continuos, no es para verificar su estabilidad (puesto que son extremadamente estables), sino para asegurarse de que la piedra no se altere excesivamente, de que el agua no penetre, de que las grietas no continúen abriéndose, etc... Esta inspección insistirá sobre la existencia de asentamientos, sobre la deformación global de la estructura, sobre la presencia de agrietamientos. Los pequeños defectos «cosméticos» se remediarán de inmediato, pero parece que con cierta regularidad se emprenden intervenciones estructurales de más envergadura. En la segunda mitad del siglo XVIII, por ejemplo, nuevamente cien años más tarde, y de nuevo, en la actualidad, a finales del siglo XX, se registran grandes trabajos de restauración.

Quizá sea la moda la que impulsa a una sociedad a un interés renovado en su legado cultural, a intervalos de más o menos cien años. Este interés vehemente relajará el control del gasto; con dinero podrá buscarse consejo especializado, y los expertos normalmente aconsejan gastar más dinero. El mismo hecho de que un ingeniero participe suele conducir a que se realicen obras de ingeniería.

La típica, e incluso arquetípica, pregunta que se le formula al ingeniero es: ¿Es peligrosa esta grieta? Ésta fue la pregunta que se le formuló a Poleni en relación con la cúpula de San Pedro, en Roma, a mediados del siglo XVIII, y a la que, en 1748, respondió valientemente: no. Por primera vez se realizaba una propuesta de no-intervención; naturalmente, no se le creyó (todo el mundo podía ver las grietas de la cúpula) y se emprendieron trabajos de ingeniería.

El ingeniero moderno, cuidadoso, no aconseja las intervenciones brutales. Ante una grieta, efectuará cálculos basados en los últimos descubrimientos de la ciencia estructural, intentando precisamente decidir qué acción emprender. Estos cálculos numéricos se basarán en una inspección del propio edificio, e intentarán dilucidar el sistema de esfuerzos en su interior. Es decir, ¿cómo soporta la estructura sus cargas (sean éstas debidas a peso propio, al viento o a

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The care of Masonry Buildings: The Engineer's Contribution,» *Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings* (C.A. Brebbia, ed. Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1989). Traducción de Jorge Conde Conde.

un terremoto)? Habiendo determinado el sistema de fuerzas, el ingeniero pasará al reino todavía más remoto de las tensiones, esas cantidades abstractas obtenidas por cálculo, que no pueden medirse nunca, pero sí sin embargo compararse con la resistencia límite del material del edificio.

Haciendo estos cálculos el ingeniero trata de convencerse de que la estructura satisface todos y cada uno de los tres criterios estructurales, que se refieren a la resistencia, rigidez y estabilidad. La estructura debe ser lo bastante resistente como para soportar cualquier carga que se le imponga, no debe deformarse indebidamente, y no debe desarrollar grandes desplazamientos inestables, ni locales ni globales.

Intuitivamente una estructura antigua (por ejemplo, el Panteón de Roma, un templo griego o una catedral gótica) parece ser suficientemente resistente; las cargas a que han estado sometidas a lo largo de los siglos no han producido el fallo por rotura del material. Si bien pueden verse a veces desconchones o aplastamientos locales, éstos no parecen afectar a la integridad estructural del conjunto. De hecho, las tensiones medias en estructuras de fábrica son muy bajas en comparación con la resistencia del material (las tensiones bajas son una característica de cualquier estructura, ya sea de madera o de piedra, destinada a perdurar a lo largo de los siglos).

De igual forma, es improbable que el ingeniero se preocupe por deformaciones indebidamente grandes en, por ejemplo, la bóveda de una catedral gótica. El paso de los años puede haber conducido a deformaciones más o menos amplias de la bóveda, pero aún es estable; el ingeniero puede caminar por su trasdós sin producir deformaciones apreciables. La resistencia y la rigidez no son relevantes en el cálculo de las estructuras de fábrica.

Es el tercer criterio estructural, la estabilidad, el que es importante, aunque se satisface de una forma un tanto curiosa. Resulta que lo único necesario para asegurar la estabilidad de una estructura de fábrica es que las fuerzas actúen en el interior de la fábrica. Así, para el arco adovelado de la figura 24.1, puede imaginarse que cada dovela se encuentra en equilibrio entre su propio peso y las reacciones con sus vecinas. Las posiciones de estas reacciones definen una «línea de empujes» del arco, quedando la estabilidad asegurada si dicha línea se encuentra por completo dentro de la fábrica.

De este modo, el ingeniero calculará las fuerzas estructurales para determinar una línea de empujes; comprobará, entonces, que la línea de empujes se encuentra dentro de los límites de la fábrica. Esta precisamente fue la intención de Poleni, quien sabía que el cálculo de la línea de empujes no era sencillo. Conocía, sin embargo, la afirmación de Hooke: «Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido». La figura 24.2 reproduce una de las ilustraciones de Poleni; la forma de un cable cargado a tracción (catenaria) es la misma que la de un arco que soporta idénticas cargas a compresión.

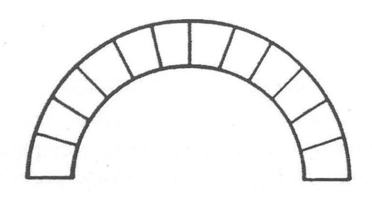


Figura 24.1

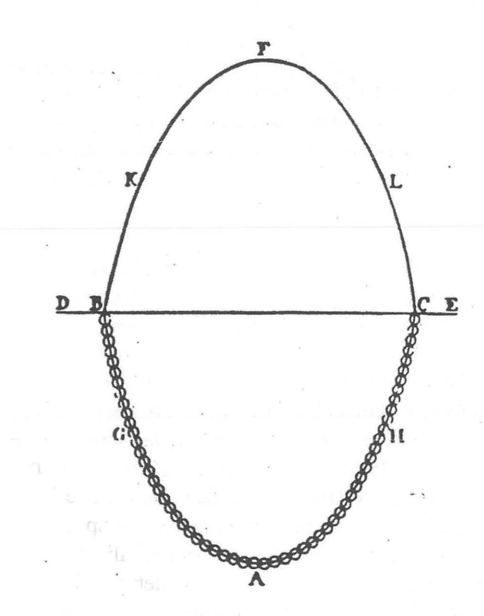


Figura 24.2

Así, los pesos de las dovelas del arco de la figura 24.1 conducirían a una catenaria de una cierta forma; dicha forma se muestra invertida como línea de empujes en la figura 24.3(a). La línea de empujes se encuentra dentro de los límites de la fábrica; esto demuestra que el arco es seguro. Poleni empleó precisamente esta técnica en su análisis de la cúpula de San Pedro. Halló experimentalmente la forma de la catenaria para un arco bidimensional que ideó como analogía (legítima) de la cúpula. El hecho de que esta catenaria así obtenida estuviese contenida (como línea de empujes) en el perfil de la cúpula, era la prueba de que la cúpula era estable a pesar de las grietas, y como tal fue presentada por él.

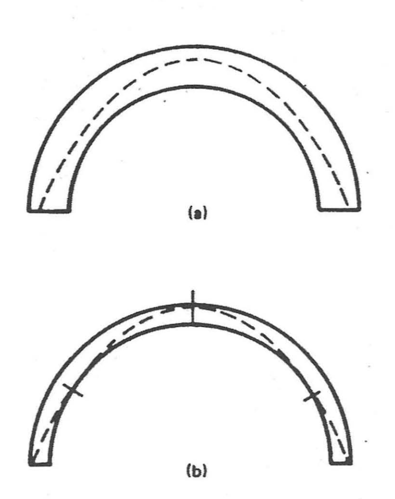


Figura 24.3

Se apreciará que la forma de la línea de empujes para el arco de la figura 24.3(b) es idéntica a la obtenida para el arco de la figura 24.3(a). El arco de la figura 24.3(b) es, sin embargo, más esbelto y, de hecho, ha sido dibujado de manera que contiene justo las fuerzas estructurales. Un arco de este espesor estaría teóricamente en el límite de la estabilidad; cualquier alteración accidental de la geometría, cualquier leve asimetría en las cargas, llevaría a que los empujes dejasen de estar contenidos en la fábrica.

Se ha llegado, por tanto, a un concepto de seguridad basado en una geometría satisfactoria; el arco debe tener espesor suficiente como para contener la línea de empujes y, desde luego, podría decirse que el arco de la figura 24.3(a) tiene un «coeficiente geométrico de seguridad» cercano a 2, comparando su espesor con el del arco «mínimo» de la figura 24.3(b). Las ideas de seguridad basadas en tensiones se han dejado momentáneamente aparte; las tensiones medias en los dos arcos de la figura 24.3 son pequeñas. Lo que cuenta es la forma del arco en comparación con la forma dictada por las fuerzas estructurales (la línea de empujes).

El arco es una estructura sencilla cuyo comportamiento es fácil de ver, y que puede usarse como modelo para ensayos de laboratorio. El problema que se plantea el ingeniero es encontrar las fuerzas internas equivalentes para una estructura real compleja, pongamos por caso una catedral gótica. Lo que busca (y veremos que su objetivo es por una parte equivocado, y por otra inalcanzable) es una representación del estado real de la estructura. Puede proceder, como Poleni, experimentalmente, pero también tiene a su disposición todo el aparato de la moderna teoría de estructuras.

Si sigue el camino del cálculo, la primera ecuación que escribirá será la de equilibrio estático. Si puede resolver dicha ecuación directamente, entonces el problema principal está resuelto (técnicamente, la estructura es isostática). Sin embargo, en general, las ecuaciones de equilibrio son en sí mismas irresolubles; la estructura es estáticamente indeterminada (hiperestática). Hay múltiples estados posibles de equilibrio, y para determinar el estado real se precisa el uso de otras ecuaciones del análisis estructural.

Por ejemplo, la línea de empujes de la figura 24.3(a) es tan sólo una de las infinitas posibles, cada una de las cuales representa un posible estado de equilibrio del arco. Si la cadena de la figura 24.2 se acorta o se aumenta ligeramente la luz, la forma invertida resultante todavía se encontrará contenida en la fábrica de la figura 24.3(a). Para determinar la posición «real» deben usarse las otras dos ecuaciones del análisis estructural. En primer lugar, debe hacerse una hipótesis sobre las propiedades del material, de modo que las deformaciones del arco puedan relacionarse con las tensiones internas. En segundo lugar, debe relacionarse el arco deformado con condiciones de contorno mediante una hipótesis geométrica

global; en la figura 24.3(a), por ejemplo, puede pensarse que el arco se asienta firmemente en una cimentación rígida siendo nulos los desplazamientos de los apoyos, cualesquiera que sean las deformaciones del arco.

El método elástico postula una ley elástica (lineal) de deformaciones, así como la formulación de ciertas condiciones de contorno. De esta forma disponemos de ecuaciones suficientes para la solución del problema hiperestático; puede encontrarse una posición única para la línea de empujes del arco de la figura 24.3(a). Pero la solución de las ecuaciones estructurales para una estructura hiperestática es extremadamente sensible a variaciones mínimas de las condiciones de contorno. Si uno de los estribos fijos de la figura 24.3(a) experimentara un pequeño desplazamiento esto se vería acompañado de un cambio enorme en la posición de la línea de empujes. (Pequeño en este contexto significa un desplazamiento contenido dentro del espesor de las líneas de la figura 24.3(a); el ojo no detectaría diferencia alguna entre el estado original y el desplazado.)

Es seguro que alguno de los estribos del arco sufrirá un pequeño desplazamiento (impredecible), y esto, entonces, pone en duda todo el fundamento del análisis elástico. No existe una respuesta sensata a la pregunta: ¿Cuál es el estado real de la estructura? Si se supiera que los estribos se iban a comportar de un cierto modo predecible, entonces las condiciones de contorno podrían quizá especificarse; si se supusiera que el módulo de elasticidad de la piedra es uniforme, o, lo que es más, si pudieran tenerse en cuenta las diferentes elasticidades de la piedra y del mortero (como intentó Castigliano), quizá podrían asignárseles constantes elásticas. En este caso podría calcularse el estado «real» de la estructura; sin embargo, de hecho, las cantidades empleadas en el análisis no pueden conocerse con un grado de precisión suficiente como para que los resultados de los cálculos sean fiables.

Más aún, los valores supuestos son efímeros; un fuerte viento, un ligero temblor de tierra, un cambio del nivel freático, conducirán a un estado totalmente distinto de la estructura. De hecho, el análisis elástico calcula tan sólo uno de los infinitos estados de equilibrio posibles de una estructura hiperestática; el estado calculado no puede observarse en la práctica, como prueban los numerosos ensayos realizados en estructuras reales. Así, cualquier método de análisis basado en conceptos elásticos que afirme proporcionar resultados que representen de alguna manera el estado «real» de la estructura, debe ser mirado con gran desconfianza.

Cualquier método que suponga la asignación de un valor numérico al módulo de Young es, por definición, un método elástico. Implicará hipótesis sobre las propiedades elásticas relativas de las partes colindantes de la estructura; probablemente pasará por alto coacciones internas a la deformación, tales como el contacto imperfecto entre sillares vecinos que produce espacios vacíos en la estructura; y, probablemente, ignorará los pequeños movimientos reales de la cimentación. Por eso, los elementos finitos elásticos, constituyen una herramienta muy imperfecta para el análisis de las fábricas; los ensayos sobre modelos elásticos adolecen de los mismos defectos. Además, la fábrica es en esencia un material unilateral, con un comportamiento satisfactorio a compresión, pero incapaz de soportar tracciones; un modelo fotoelástico que muestre tensiones de tracción y compresión, es, por tanto, una mala representación de la realidad.

Si los métodos elásticos están bajo sospecha, ¿cómo debe actuar el ingeniero? Incluso si las ecuaciones elásticas son irrelevantes, el sentido común parece señalar que un fuerte vendaval, soportado fácilmente, que ha llevado la estructura a un estado totalmente distinto, no puede haberla debilitado. El sentido común se ve, en este caso, confirmado por la teoría y la práctica. Si dos estructuras aparentemente idénticas, pero con pequeñas imperfecciones que conducen a estados tensionales distintos, se cargan paulatinamente hasta el colapso, la carga última (es decir, la resistencia de la estructura) resulta ser la misma para ambas.

Este descubrimiento fue lo que condujo a la llamada teoría plástica de las estructuras, aplicable a cualquier caso donde el estado de colapso es un proceso dúctil, casi estable (y, por tanto, a estructuras porticadas de acero y hormigón armado, y también a la fábrica, pero no a estructuras hechas de hierro fundido o cristal, por ser materiales frágiles). El proyectista que emplea el método plástico no considera, sin embargo, que su estructura vaya a colapsar. Realiza un cálculo límite hipotético dentro del marco conceptual de los teoremas del análisis plástico, y tiene la certeza de que ese cálculo es seguro.

En particular, el proyectista define un estado posible de equilibrio para la estructura bajo la acción de las cargas, y comprueba, entonces, que las dimensiones reales de la estructura permiten transmitir sin peligro los esfuerzos internos asociados con el estado de equilibrio. En este aspecto pisa un terreno común con el proyectista elástico. Éste piensa que ha establecido el estado real de la estructura, mientras que aquél no intenta encontrar la solución real, contentándose con elegir una de las infinitas soluciones posibles. Después operan ambos de la misma manera para la comprobación detallada de la estructura.

El enfoque «por equilibrio» del análisis estructural no es una herramienta tan burda como puede parecer a primera vista. Si bien se abandona la búsqueda del estado real de equilibrio, no obstante pueden acotarse los valores de magnitudes estructurales importantes. Por ejemplo, si se acorta mucho la cadena de la figura 24.2, no habrá forma de ajustar la correspondiente catenaria invertida dentro de los límites del arco de la figura 24.3(a), lo mismo ocurrirá si se alarga demasiado. Las posiciones límite de la línea de empujes se ilustran en la figura 24.4; cada una corresponde a un estado distinto de equilibrio, con esfuerzos diferentes colaborando para mantener el equilibrio del arco. Los esfuerzos pueden calcularse, resultando, por ejemplo, que el empuje sobre el estribo está acotado superior e inferiormente.

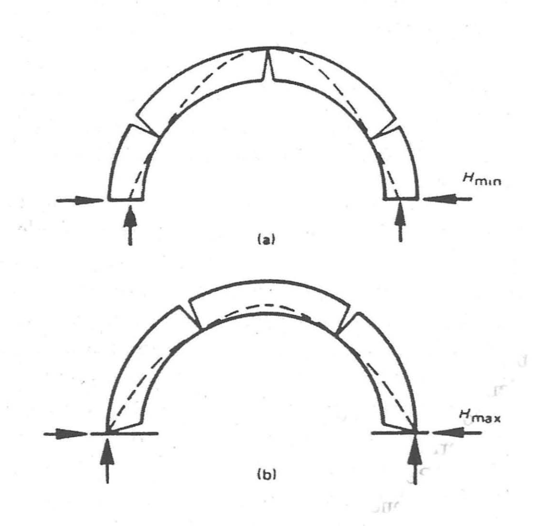


Figura 24.4

El analista «por equilibrio» puede, de hecho, deducir un sistema de esfuerzos para su estructura y, a continuación, empezar a hacer algunos juicios técnicos básicos. A partir de los valores del empuje del arco sobre los estribos pueden acotarse las tensiones en la cimentación, pudiendo aplicarse la mecánica del suelo para precisar si esta zona necesita algún refuerzo (con recalces o micropilotaje, por ejemplo).

De igual forma, puede hacerse una buena estimación de los valores de las tensiones en la estructura; como se ha dicho, en una estructura antigua éstos son habitualmente muy bajos, pero pueden obtenerse indicaciones sobre la necesidad de estudios locales. Sin embargo, habitualmente, el ingeniero se contentará con que no exista riesgo de colapso global producido por tensiones elevadas.

Sobre todo, el análisis por equilibrio conduce al concepto de «seguridad geométrica» de la estructura. ¿Están los esfuerzos internos contenidos holgadamente en la estructura? En tal caso, la estructura es segura contra pequeños, pero hostiles, movimientos del entorno, contra sobrecargas imprevistas, y, por supuesto, contra irregularidades constructivas. Cuanto más holgadamente estén contenidos los esfuerzos en la estructura, más segura será ésta. Estas precisiones son cualitativas, pero pueden asignarse valores numéricos precisos a los coeficientes geométricos de seguridad.

Sobre una base tan general como la teoría del equilibrio referida a construcciones en materiales unilaterales (fábrica), el ingeniero puede comenzar a interpretar lo que encuentra en la práctica. Por ejemplo, al pasar bajo un puente de fábrica es posible que vea una grieta a lo largo del intradós del arco cercana a la clave; deducirá, entonces, que los estribos del puente han cedido ligeramente, la luz del puente ha aumentado mientras que el empuje sobre el estribo ha bajado hasta alcanzar su valor mínimo, y se ha formado una articulación en la clave como la de la figura 24.4(a). A la pregunta «¿Es esta grieta peligrosa?», la respuesta es: no, no en sí misma. La articulación por agrietamiento en la clave indica que los estribos cedieron, seguramente hace mucho tiempo. Si no hay señales de movimientos recientes, la conclusión de Poleni es correcta; la estructura está en una situación estable, y no se precisa intervención alguna (puede que las grietas tengan que resanarse para impedir la entrada de agua, pero no para reforzar la construcción).

Las conclusiones extraídas de este sencillo ejemplo de una grieta en un arco pueden extrapolarse a estructuras mucho más complejas. Las típicas grietas de la figura 24.5, por ejemplo, son el resultado de una apertura casi habitual del sistema de contrarresto de una catedral gótica o románica; las grietas cercanas a la clave son rótulas similares a las dibujadas en la figura 24.4, pero las grietas de Sabouret, paralelas a aquéllas y situadas a uno o dos metros de los laterales de la bóveda, suponen una separación total de la fábrica (situándose sobre el trasdós de la bóveda, puede llegar a verse el suelo de la catedral a través de la grieta). De igual forma, las grietas a lo largo de los meridianos observadas por Poleni en la cúpula de San Pedro, naciendo en el tambor y desvaneciéndose hacia la linterna, provienen de una apertura de la cúpula en su base. En todos estos casos, las estructuras son seguras si los movimientos que produjeron estos defectos han finalizado.

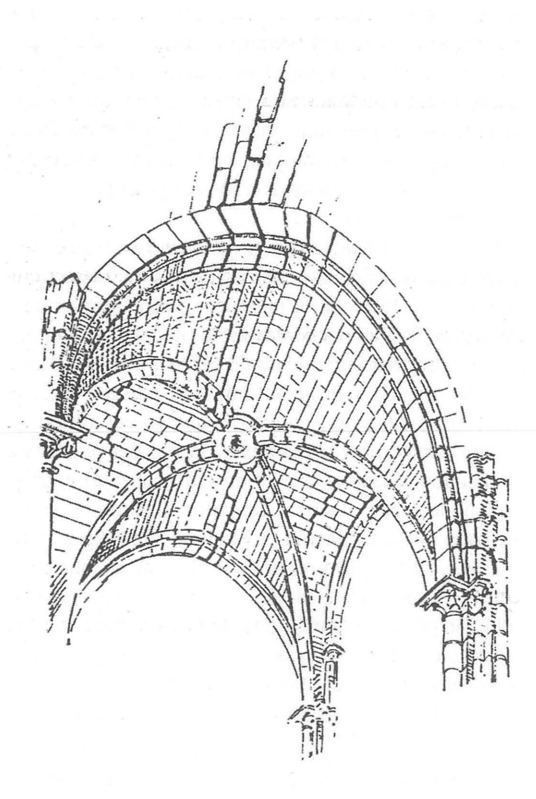


Figura 24.5

Así, surge un primer precepto que guía al ingeniero en la intervención sobre la estructura de un edificio histórico. *Consiste en no intervenir, en dejarlo como estaba, a menos que existan evidencias de que la intervención es necesaria.* Más exactamente:

1. Si en la estructura hay evidencia de deformaciones progresivas, o se sabe que en el futuro cargas permanentes pueden actuar para provocar dichos movimientos, o que los estribos continúan cediendo, entonces es preciso tomar medidas para estabilizar la geometría global de la estructura en su estado actual (no hay necesidad de devolver la geometría a una supuesta perfección inicial).
2. Si, por el contrario, no hay ninguna evidencia de dichos movimientos y parece, por poner un ejemplo, que el terreno ha consolidado bajo los cimientos, la estructura puede dejarse segura en su estado permanentemente deformado, pero estable.

Un tercer principio puede añadirse a estos dos para tener en cuenta un posible defecto oculto, un ejemplo del cual puede producirse en la construcción de un grueso muro de carga medieval. Normalmente, el muro tendrá dos paramentos bien construidos, pero el relleno de mampostería y cascote puede haberse degradado; las tensiones medias de cálculo son bajas, pero en realidad las cargas son transmitidas por los paramentos, pudiendo aparecer tensiones peligrosamente elevadas.

3. Las fábricas y rellenos de mampostería que estén sueltos deben consolidarse hasta alcanzar una resistencia suficiente (que no necesariamente tiene que ser tan alta como la de una fábrica bien aparejada).

Si se siguen estos tres principios pueden evitarse algunos trabajos de restauración innecesarios. Los principios suponen una fe en la estructura en sí misma, sin por ello incurrir en una fantasía antropomórfica. Desde luego, la esencia del enfoque «por equilibrio» es tan reconfortante como modesta. Si el ingeniero inteligente puede encontrar una forma en que la estructura pueda soportar holgadamente las cargas, entonces puede estar seguro de que la estructura en sí misma es, al menos, tan inteligente como él; encontrará por sí sola una situación igual o más holgada.

25

La aguja de Hemingbrough

La iglesia de Santa María en Hemingbrough (Yorkshire, East Riding) tiene un tamaño sorprendentemente grande para un pequeño pueblo; fue, de hecho, una colegiata bajo la autoridad del abad y los monjes de Durham. La altura de la torre central del siglo XIII, unos 18,5 m, guarda proporción con la masa general del edificio, pero la altura total hasta el extremo de la aguja es de 54,4 m (figura 25.1). La aguja en sí fue añadida en la primera mitad del siglo XIV y nace a un nivel ligeramente inferior al antepecho de la torre; mide 37,5 m, dos tercios de la altura total de la iglesia. El impacto visual es curioso, si bien Pevsner piensa que la composición «rompe felizmente todas las normas de la proporción armónica».

La aguja ha sido reparada recientemente por las siguientes razones: (a) necesidad de mantenimiento general, (b) ligera erosión de las superficies internas de los muros que forman las caras de la aguja octogonal y (c) aparición de daños en la sillería de los últimos metros de la punta de la aguja. Los daños eran apreciables a simple vista desde el suelo; con los prismáticos se podía observar que muchas juntas se habían abierto perdiendo el mortero, y que algunos sillares se habían desplazado. Este problema ya ha sido resuelto, y no es objeto de este artículo describir la reparación, que es elemental, sino discutir las causas fundamentales que producen tales daños en las agujas.

El desarrollo analítico que presentaremos para ello utiliza parámetros generales, de modo que luego se puedan hacer cálculos introduciendo las dimensiones de cualquier aguja en particular. No obstante, daremos también algunos ejemplos utilizando los parámetros (poco habituales) de Hemingbrough. Como se ha indicado, la altura de la aguja es de 37,5 m, y el «diámetro» de su base (una medida bastante imprecisa para una aguja cuya sección horizontal es un octágono, como comentaremos más adelante) es de 5,5 m. Por ello, el semiángulo α de un cono circular recto con estas dimensiones vendría dado por $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}0733$ (un ángulo de poco más de 4°).

El espesor nominal de la aguja es de 8 pulgadas ó 200 mm. La relación entre diámetro y espesor es por tanto de 27,5. Ungewitter[1] establece como regla empírica que esta esbeltez debería tener un valor entre 24 y 30 para agujas construidas con piedra poco resistente, aunque el uso de una piedra de buena calidad permite alcanzar valores entre 30 y 36. Comentaremos más adelante el significado de estas cifras.

Finalmente, se precisan dos parámetros de carga. La estabilidad general de una aguja depende principalmente de su capacidad para resistir la acción del viento, y se supondrá un valor relativamente bajo del peso específico del material, $w = 16{,}7$ kN/m^3. Un valor de cálculo razonable para la presión de viento en el caso de la aguja de Hemingbrough sería $q = 1{,}5$ kN/m^2.

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Hemingbrough Spire,» *Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings II*, Vol.1: *General Studies, Materials and Analysis* (C.A. Brebbia *et al.* eds. Southampton, Boston :Computational Mechanics Publications, 1991). Traducción de Fernando Inglés Musoles.

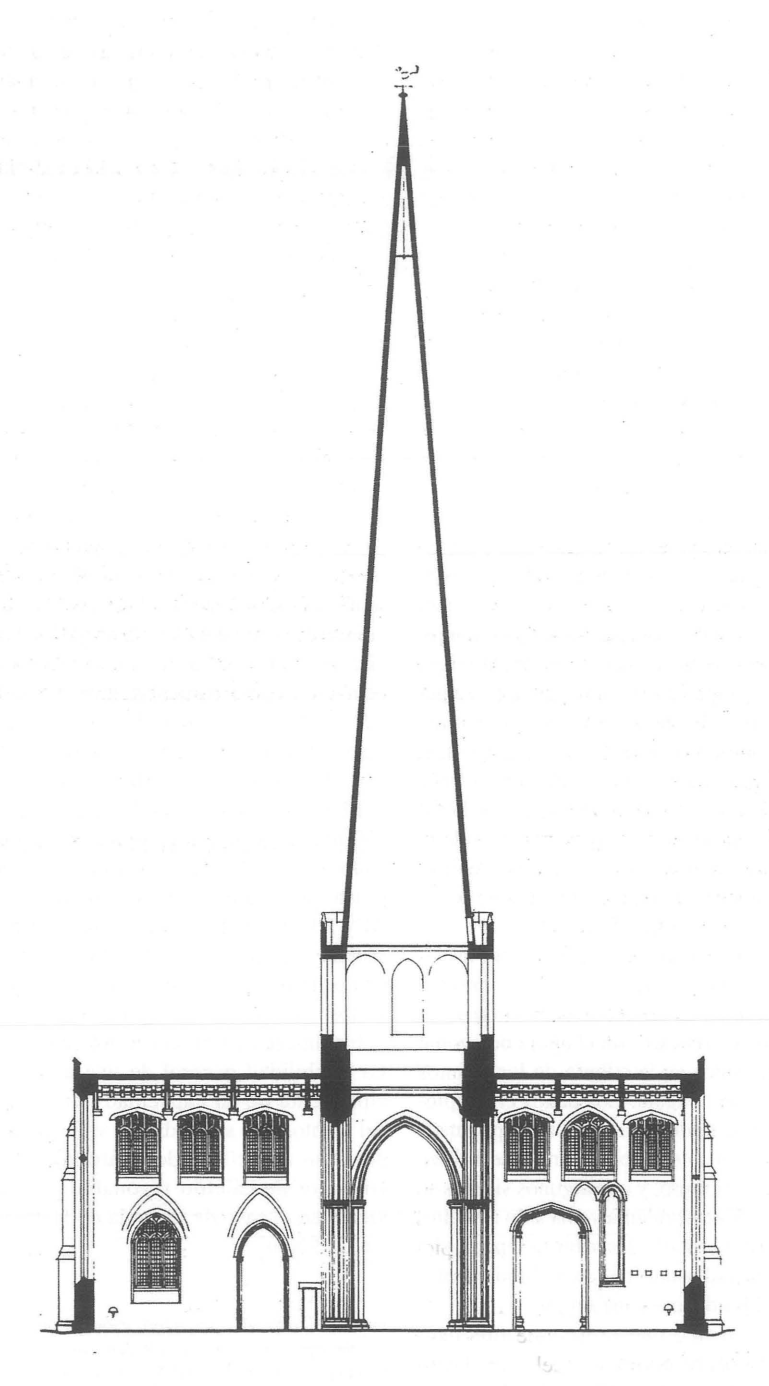


Figura 25.1
Santa María en Hemingbrough. Sección transversal hacia el este, según un dibujo de Peter W. Marshall (RIBA)

EL COMPORTAMIENTO DE LA FÁBRICA

La fábrica es un material unilateral. Se trata de un conjunto de ladrillos, piedras o incluso adobes secados al sol, aparejados en seco o con morteros pobres para formar un conjunto compacto. La estructura resultante puede transmitir esfuerzos de compresión, pero apenas resiste pequeños esfuerzos de tracción.

La tensión media de compresión que resulta de las soluciones habituales en obras de fábrica tiene valores extremadamente bajos. En ocasiones se puede observar una rotura local del material, pero su influencia en la integridad del conjunto es insignificante; la propia resistencia del material no es en sí mismo un parámetro importante en el diagnóstico general de una estructura de fábrica. Antes bien, este diagnóstico debe hacerse fundamentalmente en términos de la geometría de la estructura.

Parece obvio intuitivamente, por ejemplo, que las paredes de una aguja de fábrica no pueden ser demasiado delgadas porque en caso contrario se hundirían, no por fallo del material, sino por razón de algún tipo de inestabilidad. Más aún, debería aplicarse a este espesor mínimo un coeficiente geométrico de seguridad. Haciendo una sencilla analogía, la forma más adecuada para un arco que soporte una carga vertical uniformemente repartida sobre la superficie horizontal de una calzada es la de una parábola. No obstante, un arco parabólico de espesor muy pequeño quedaría a merced de cualquier variación accidental de la carga o de su geometría; el espesor real de un arco de fábrica de directriz parabólica debe ser tal que contenga «holgadamente» la correspondiente línea parabólica de empujes.

El primer paso en la evaluación detallada de una estructura de fábrica consiste, pues, en encontrar un sistema de fuerzas de compresión que esté en equilibrio con la carga especificada y quede contenido dentro de las superficies que delimitan la fábrica. En general, habrá varios sistemas que cumplan dichas condiciones, y el estado real de una estructura estará determinado por numerosos factores, muchos de ellos desconocidos, tales como la variación de las propiedades del material de una a otra piedra, los asientos casi imperceptibles de la cimentación, y así muchos más. Esta ausencia de información no debe preocupar al analista; el teorema fundamental del análisis estructural dice que sólo es necesario encontrar uno de los posibles estados satisfactorios. Si el analista puede llegar a encontrar uno de tales estados, entonces será la propia estructura la que con toda seguridad encuentre también una forma de permanecer estable.

En este artículo se desarrollan más adelante este tipo de estimaciones del estado de equilibrio, con el fin de obtener los valores básicos de los parámetros necesarios para la estabilidad de una aguja. No obstante, comenzaremos planteando un problema fundamental relacionado con la estabilidad del cono.

EL CONO CIRCULAR RECTO Y MACIZO

Para estudiar la estabilidad general del extremo de una aguja octogonal plantearemos como modelo de la construcción real el comportamiento de un cono circular recto, figura 25.2(a). En particular, estudiaremos su estabilidad bajo carga de viento.

Beckmann[2] ha llamado la atención sobre el hecho de que un cono macizo de altura suficientemente pequeña H vuelca siempre bajo la acción del viento; la razón resulta evidente si se expresan analíticamente el momento estabilizador y el momento de vuelco. En la figura 25.2(b), el peso del cono es:

$$W = w \frac{1}{3} \pi R^2 H \tag{1}$$

donde w es el peso específico del material.

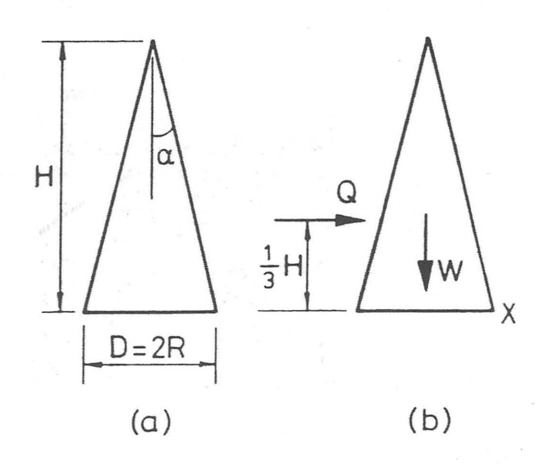


Figura 25.2

La fuerza del viento Q está determinada por el área eficaz sobre la que incide la presión unitaria del viento q, y su valor es

$$Q = qRH \qquad (2)$$

En la ecuación (2) debería haber, por supuesto, un factor que reflejara el hecho de que la aguja es octogonal y no circular, que la ornamentación de las aristas puede distorsionar el flujo de aire, etc., pero eso no afecta al presente razonamiento. Análogamente, la altura $^1/_3H$ señalada en la figura 25.2(b) dependerá de los detalles específicos de la construcción. No obstante, el momento que tiende a volcar el cono alrededor del punto X tendrá la forma de $^1/_3HQ$, mientras que el momento estabilizador es RW; para que el cono sea estable,

$$R\left(w\frac{1}{3}\pi R^2 H\right) > \frac{1}{3}H(qRH) \qquad (3)$$

Utilizando la relación $R/H = \text{tg}\,\alpha$, la expresión (3) se convierte en:

$$H > \frac{q}{\pi w \text{tg}^2\alpha} = H_0 \qquad (4)$$

El vértice de una aguja de fábrica es, por supuesto, macizo, y tiene interés introducir los parámetros de Hemingbrough en la desigualdad (4). Empleando q=1,5 kN/m^2, w=16,7 kN/m^3, tg α=0,0733, se obtiene el valor de H_0=5,3 m. Se observará que en la expresión (2) se ha omitido una constante del orden de las unidades; no obstante, estos cálculos indican que un cono circular recto de algo menos de 5 m de altura, situado en Hemingbrough a unos 50 m por encima del suelo, donde la presión unitaria de viento es de 1,5 kN/m^2, puede llegar a volarse en una tormenta.

En la práctica, pues, se deben construir los últimos metros de una aguja de fábrica de modo que las hiladas de piedra estén atadas entre sí y puedan resistir de ese modo los esfuerzos de tracción generados por la acción del viento. (Los daños observados en Hemingbrough se originaron a partir de un fallo de dicha trabazón. En la práctica, se pueden conectar las hiladas de piedra con clavijas metálicas, que hoy en día se suelen hacer de acero inoxidable.)

La aguja de Hemingbrough es excepcionalmente esbelta, dado su semiángulo de cerca de 4°, y en consecuencia, la altura crítica de estabilidad es bastante grande. Con los mismos parámetros de carga, la altura crítica de agujas con semiángulos de 5°, 6° y 7,5° se reducen a 3,7 m, 2,6 m, y 1,6 m, respectivamente. No hay grandes dificultades constructivas con estas longitudes de menor orden, pero en Hemingbrough se utilizó una solución especial, empleada también en otros lugares. La barra que soporta la veleta en el eje de la aguja se debe prolongar hacia abajo una cierta distancia por razones de anclaje y de hecho, sirve para contribuir al refuerzo de las hiladas de fábrica. En Hemingbrough se alargó esta barra y se colgó un peso de su extremo inferior, suspendido libremente en el hueco interior de la aguja, precomprimiendo de ese modo la fábrica maciza del vértice.

Efectivamente, si se añade una carga W' al peso W de la figura 25.2(b), entonces la desigualdad (3) necesaria para la estabilidad se convierte en:

$$R(W + W') > \frac{1}{3}HQ \qquad (5)$$

de donde

$$W' > \frac{1}{3}qH^2 - \frac{1}{3}w\pi \text{tg}^2\alpha H^3 \qquad (6)$$

Para que la desigualdad (6) se cumpla siempre, hay que observar que el segundo término tiene un valor máximo para $H = {}^2/_3H_0$, y se puede calcular así el correspondiente valor de W'. Si se colocara realmente una carga de valor W' el viento no produciría esfuerzos de tracción en ningún punto del extremo de la aguja.

Empleando de nuevo los parámetros básicos de cálculo, se puede deducir que el valor de W' en Hemingbrough es 2,1 kN. Como no se ha empleado en estos cálculos ningún coeficiente de seguridad, en la realidad se utilizó un bloque de hormigón de aproximadamente el doble de peso.

El cono hueco

Para una longitud de aguja razonablemente grande con paredes de espesor constante t el peso W viene dado por (cf. ecuación (1)):

$$W = w\pi H^2 t\,\text{tg}\alpha\,\text{sec}\alpha \qquad (7)$$

Para la estabilidad, se sustituye la desigualdad (3) por

$$R(w\pi H^2 t\,\text{tg}\alpha\,\text{sec}\alpha) > \frac{1}{3}H(qRH) \qquad (8)$$

es decir,

$$t > \frac{q}{3\pi w \ \mathrm{tg}\alpha \ \sec\alpha} \qquad (9)$$

A efectos de estabilidad se requiere un peso mínimo, es decir, un cierto espesor mínimo t, y este espesor es independiente de la altura real de la aguja.

Para Hemingbrough, el valor mínimo de t a partir de la desigualdad (9) es de 0,13 m, a comparar con el espesor real de 200 mm. Se ha omitido en estos cálculos el peso del extremo macizo de la aguja; por otra parte, no se ha aplicado ningún coeficiente de seguridad y por ello, el espesor real de la aguja parece adecuado. Para las agujas habituales, menos esbeltas que la de Hemingbrough, la expresión (9) exigirá menores espesores y se puede concluir que, en general, las agujas normales de paredes delgadas con dimensiones habituales no corren el riesgo de vuelco bajo la acción del viento.

Por otra parte, parece que tales agujas cónicas también son correctas en detalle como lo son en su conjunto. Hemos analizado la aguja en general, pero es preciso comprobar si los esfuerzos son de compresión en todas las secciones. Para establecer sistemas internos de tensiones se puede utilizar la teoría de la membrana aplicada a las cáscaras[3] y en el caso del cono circular recto, las ecuaciones resultan particularmente sencillas. Parece evidente que el peso propio produce únicamente tensiones de compresión; el peso es resistido por compresión longitudinal a lo largo de las generatrices y por compresión anular en cada sección horizontal, tal y como se indica en la figura 25.3. El valor de la tensión de compresión en la dirección de las generatrices viene dado en la base de la aguja por

$$\sigma = \frac{1}{2} wH\sec^2\alpha \qquad (10)$$

y para Hemingbrough ($H = 37{,}5$ m.) su valor numérico es de 0,31 N/mm^2. Este valor máximo bajo peso propio supone, desde luego, una baja tensión de servicio para la fábrica.

No obstante, las fuerzas horizontales de viento producirán esfuerzos adicionales de compresión en el lado a sotavento y de tracción en el lado a barlovento de la aguja, que hay que añadir a las tensiones principales de compresión por peso propio. Se puede utilizar de nuevo la teoría de la membrana[3] para estimar el valor de las tensiones derivadas del viento; empiezan a aparecer tensiones netas de tracción cuando la

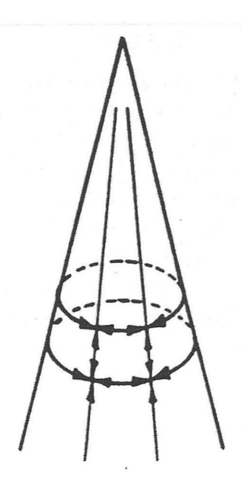


Figura 25.3

fuerza de viento es de casi la mitad del valor necesario para volcar la aguja. Así, cabe esperar que una aguja tan esbelta como la de Hemingbrough desarrolle un régimen de tracciones locales bajo la acción del viento máximo; otras agujas menos esbeltas seguirán estando a compresión.

Finalmente, para concluir este análisis sobre el cono circular hueco, sólo se producirá un pandeo elástico local de la superficie si el espesor es realmente muy pequeño (del orden de 1 milímetro más o menos en el caso de una aguja de dimensiones comparables a la de Hemingbrough).

La aguja octogonal

Un círculo de diámetro D estará contenido entre dos octógonos regulares separados por una distancia t, si $D\,\mathrm{sen}^2(\pi/16) < t$, es decir, si $D/t < 26$. Gran número de agujas satisfacen esta condición (compárese con la regla de Ungewitter entre 24 y 30) y en todos esos casos, los resultados obtenidos para el cono circular recto confirman la estabilidad de la aguja octogonal. Se puede imaginar el cono contenido en el interior de la fábrica real y, en consonancia con ello, las soluciones de membrana para el cono pueden considerarse

como estados satisfactorios de equilibrio para la aguja real.

Como alternativa, los esfuerzos de membrana dibujados en la figura 25.3 para una superficie cónica de suave curvatura pueden «agruparse» en el caso de la aguja octogonal formando fuerzas inclinadas a lo largo de las aristas y fuerzas horizontales de carácter discreto, figura 25.4; se ha sustituido idealmente la aguja por una estructura de esqueleto con paneles «cuadrados» (trapeciales en realidad). Con toda seguridad, el sistema indicado en la figura 25.4 puede satisfacer la condición de equilibrio y de hecho, se podría quizá eliminar el material de relleno de los recuadros trapeciales, en cuyo caso no aparecerían esfuerzos adicionales.

Se han construido agujas eliminando de esta manera una gran cantidad de material; hay ejemplos de ello en Ulm, Regensburg, Colonia y otros lugares. La figura 25.5 muestra la aguja de Freiburg im Breisgau (primera mitad del siglo XIV). Una consecuencia inmediata de este orden de ideas es que un daño accidental sobre una aguja octogonal normal de paredes macizas (por ejemplo un sillar perdido por golpe de impacto, o por degradación, que deje un agujero en la superficie) es difícil que ocasione daños en la aguja en su conjunto.

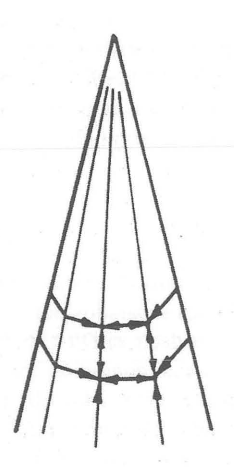




Figura 25.4

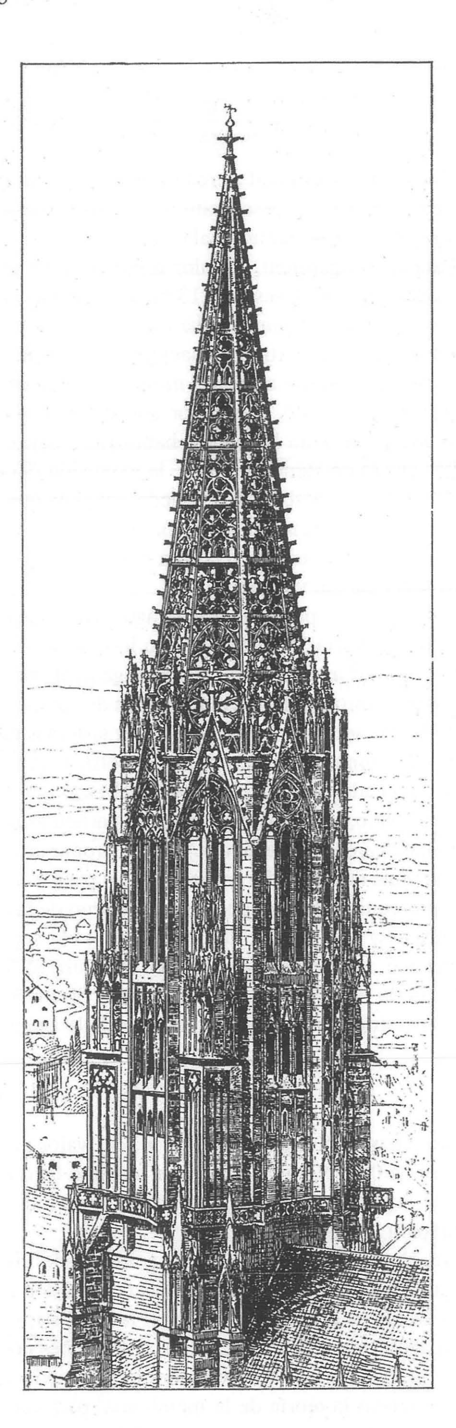


Figura 25.5
Freiburg im Breisgau

El modelo de equilibrio de la figura 25.4 sugiere un análisis aproximado del comportamiento del material que efectivamente pudiera estar presente en los paneles trapeciales. Parece evidente que si el panel de relleno fuera demasiado delgado, existiría el peligro de que cayera hacia dentro. La figura 25.6 muestra una rebanada de fábrica de dicho panel, inclinada un ángulo α, el semiángulo de la aguja; se supone que la longitud l corresponde a la distancia entre los lados horizontales del trapecio. La carga P procede del peso de todo el material de la aguja que carga por encima de la sección considerada. La reacción R la «recoge» el nervio horizontal que encuadra el trapecio. Para la condición límite de la figura 25.6(b), un simple análisis estático permite obtener la expresión

$$t = \frac{1}{2}\frac{l^2}{D}\operatorname{tg}\alpha \qquad (11)$$

El análisis se basa por supuesto en la hipótesis de que el material es unilateral; no pueden entrar en juego esfuerzos de tracción que eviten la aparición de las articulaciones.

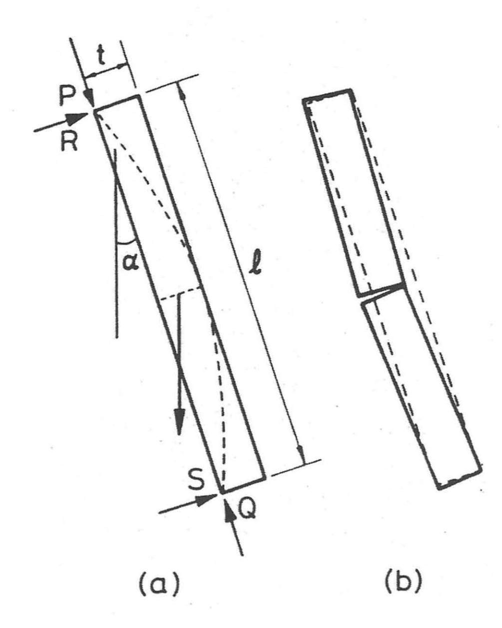


Figura 25.6

La ecuación (11) tiene una forma simple y aparentemente correcta, de modo que basándose en otros supuestos (que son en cierto modo arbitrarios y no se pueden justificar estrictamente) se puede deducir una regla numérica del tipo «Ungewitter». Si se iguala la dimensión l con $^1/_2D$, considerando trapecios de forma cuadrada, la ecuación (11) dará una esbeltez D/t (= 8cotg α) para la cual la rebanada está a punto de caerse. Como se ha indicado antes, una rebanada como la del ejemplo estaría a merced de imperfecciones accidentales, por lo que en tales fórmulas se debería utilizar un número menor de 8 para tener en cuenta un cierto factor geométrico de seguridad. Teniendo bien presente que la elección de $l = {}^1/_2D$ es arbitraria y considerando los valores habituales de espesor de paredes, se puede proponer la siguiente regla definitiva:

$$\frac{D}{t} = 3\operatorname{cotg}\alpha \qquad (12)$$

Si la regla es correcta, un valor satisfactorio de D/t para la aguja de Hemingbrough (con α de casi 4°) es 41; los valores correspondientes para $\alpha = 5°$, 6° y 7,5° son 34, 29 y 23, a comparar con el intervalo de Ungewitter entre 24 y 30 (o de 30 a 36 para piedra más resistente).

Conclusión

La fórmula de la ecuación (12) es una regla geométrica de proporción, apropiada para el proyecto de fábricas con tensiones bajas. La esbeltez D/t es función del ángulo de la aguja y la fórmula supone quizá un avance respecto a la esbeltez tradicional constante; pone de manifiesto que las agujas esbeltas pueden tener paredes delgadas. (En una aguja determinada se puede reducir el espesor de paredes conforme el diámetro decrece hacia el vértice.)

Las agujas delgadas tienen mayor probabilidad de vuelco a viento, y la ecuación (9) da el espesor mínimo (sin multiplicar por coeficiente alguno) necesario para la estabilidad de conjunto. Para cualquier aguja en particular puede que haya que tener en cuenta ambas ecuaciones (9) y (12).

El vértice macizo de una aguja de fábrica es particularmente vulnerable a la acción del viento y siempre necesita ser reforzado.

26

Cómo proyectar una catedral: fragmentos de la historia de la ingeniería

El álbum de Villard de Honnecourt (c. 1235 y posteriores) refuta de una vez por todas cualquier idea sobre que la construcción de catedrales era una tarea de aficionados.[1] El libro está escrito para profesionales expertos. La figura 26.1, por ejemplo, muestra una de las páginas. El epígrafe central hace referencia a un levantamiento: Pa(r) chu p'nton le hautece done toor —*Par ce moyen on prend la hauteur d'une tour* (cómo medir la altura de una torre). Los estándares de alineación, nivelación y verticalidad en la construcción de las catedrales góticas eran excepcionales. A la derecha de la figura, se muestra el replanteo de una arcada —cómo colocar dos pilares a la misma altura sin plomada o nivel. A la izquierda se puede encontrar una espléndida broma medieval: Par chu tail om vosure pendant —*Par ce moyen on taille une voussure pendant* (cómo construir una clave pinjante).

Villard fue un maestro. ¿Por qué entonces no ha tenido reconocimiento público? ¿Por qué no hay calles o satélites con su nombre? La respuesta es que Villard era en realidad un arquitecto menor, como Vitruvio. Lo único que tienen ambos en común es que parte de sus preciosos manuscritos se ha conservado por casualidad; por lo demás no se sabe nada de su obra. Incluso el legado escrito de Villard se ha deteriorado; en el siglo XV existían cuarenta y un folios, por ambas caras; ahora sólo se conservan treinta y tres. Lo que está claro (y Frankl lo expone más alla de toda duda)[2] es el firme hilo que une a Villard con Vitruvio —explícitamente, se encuentra en los autómatas (el águila que vuelve la cabeza al diácono que lee la Palabra de Dios) e implícitamente en las reglas numéricas de proporción.

Villard trata otros temas además de la *maçonnerie.* Dibuja armaduras de madera, da ejemplos de los «ingenios» empleados en el ejercicio de la profesión y expone reglas geométricas de construcción, al igual que Vitruvio. Gran parte de las láminas las dedica al retrato, con caras góticas y ropajes de carácter escultórico. Los leones que aparecen en estos bocetos son imaginados; «dibujados del natural», dice Villard, aunque es obvio que ningún león auténtico le sirvió realmente de modelo. También abundan los pájaros, perros, caballos, y avestruces. Probablemente Villard no vio jamás ninguno de estos animales, pero había viajado —por ejemplo a Hungría, un gran viaje para un joven campesino que había sido aprendiz en Picardía— y en estos viajes recopiló para su logia los nuevos y extraordinarios inventos de la «edad de oro» del gótico, que duró siglo y medio, desde 1140 (iglesia abacial de Saint Denis) hasta 1284 (hundimiento de Beauvais).

Villard era, de hecho, arquitecto e ingeniero a la vez. En esta época, la persona que se encargaba de construir la catedral era un «maestro de obras» que

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «How to design a cathedral: fragments of the history of structural engineering,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Civil Engineering* 92 (1992): 24-29. Traducción de María Teresa Valcarce Labrador.

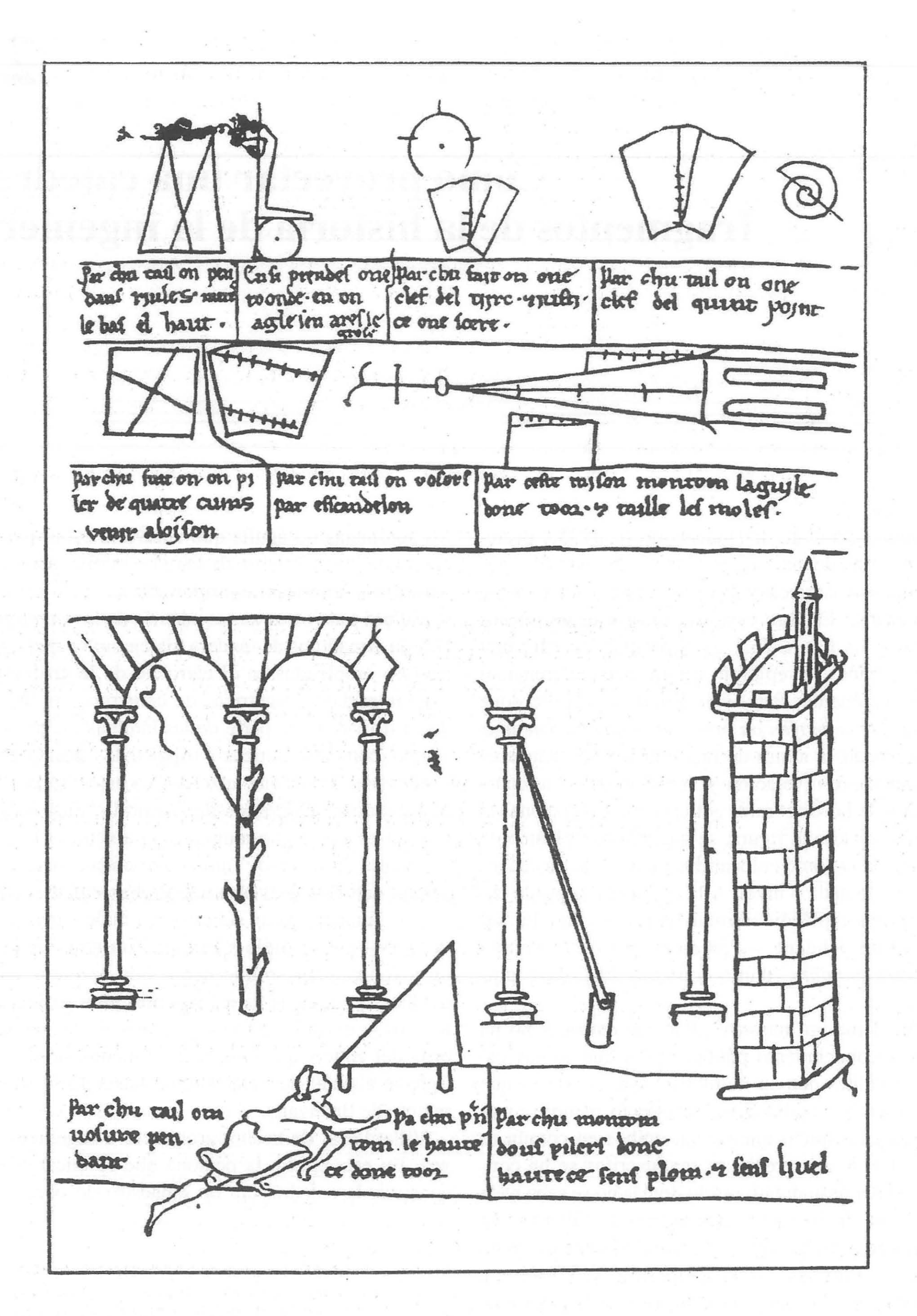


Figura 26.1
Página del álbum de Villard de Honnecourt

había superado la larga formación de aprendiz, oficial y capataz, había alcanzado el grado de maestro y había sido uno de los pocos maestros destacados que se había reintegrado al cuarto de trazas antes de, por último, conseguir el control de una obra importante. Esta trayectoria educativa contrasta fuertemente con la de la práctica moderna, basada en el concepto renacentista del arquitecto «caballero», que necesita un asesor técnico para sus estructuras, por poco complejas que éstas sean. El árbol genealógico del ingeniero de estructuras moderno tiene sus raíces en el gótico (y antes); el del arquitecto moderno en el Renacimiento.

Esta división no existía en el siglo XIII, y tampoco en el VI, cuando Justiniano empleó a dos griegos notables, Antemios e Isidoro, para proyectar Santa Sofía. Entonces, el arquitecto sabía cómo construir en el más amplio sentido técnico, así como proyectar su edificio «arquitectónicamente». La cuestión se vuelve confusa debido a las evidencias visuales; por ejemplo, las enormes diferencias formales entre las grandes catedrales góticas del gran «anillo» alrededor de París. Los documentos sobre la prueba pericial realizada en Milán durante el gótico clásico condujeron a Ackerman a la tentadora conclusión de «...que la estructura juega un papel secundario en el proceso de creación».[3] Esta conclusión puede ser (quizá) cierta para parte de la fábrica de Milán; cuando puede considerarse verdadera para *cualquier* catedral, es que la transición del Gótico al Renacimiento ha empezado. Harvey ha tratado este tema:

> Las reglas del gótico eran tan complicadas que nadie que no hubiera realizado un largo aprendizaje y pasado varios años de práctica podía dominarlas; por el contrario las reglas de Vitruvio eran tan fáciles de comprender que hasta los obispos podían entenderlas, y los príncipes podían probar su habilidad realizando sus propios proyectos.[4]

El empleo de las modernas teorías del análisis estructural lleva a pensar que el problema del proyecto de las estructuras de fábrica es fundamentalmente geométrico. El cálculo de las tensiones es secundario, y es la forma de la estructura lo que rige la estabilidad. Todos los escritos sobre construcción, antiguos y medievales, que se conservan tratan, precisamente, de geometría; desde el punto de vista del técnico moderno, las reglas antiguas y medievales eran esencialmente correctas. Los arquitectos que trabajaban según estas reglas, sin duda entendían intuitivamente las fuerzas y las tensiones resultantes, pero esto no habría tomado una forma útil para el proyecto, y no existen vestigios en los documentos, en los más de dos o tres milenios durante los que existieron, de ideas de este tipo.

En cambio, parece probable que el proceso de proyecto haya avanzado por prueba y error, recopilando la experiencia del pasado y aventurándose, con más o menos timidez, en lo desconocido y, también, mediante el uso de modelos. Un modelo a gran escala servía para muchas cosas: para mostrar el proyecto al que lo encargaba, para resolver problemas de estereotomía y, por último, para comprobar la estabilidad de la estructura acabada a tamaño real.

La recopilación de la experiencia anterior se podía realizar verbalmente o mediante dibujos. Los capítulos 40, 41 y 42 del Libro de Ezequiel, por ejemplo, recogen con enorme minuciosidad las dimensiones de puertas, patios, vestíbulos, celdas, pilastras, etc. de un gran templo; parte de un manual de construcción del año 600 a.C. parece estar contenido en los libros del Antiguo Testamento. Los versículos 3 y 5 del capítulo 40 de Ezequiel son de gran interés;

> ...Vi a un hombre...que sostenía un cordel de hilo de lino y una pértiga de medir... La longitud de la pértiga...era de seis codos; teniendo en cuenta el codo largo que tenía una extensión de un codo y una mano.

Las dimensiones que se dan en el manual se expresan en codos y palmos. El codo hebreo (unas 17,7 pulgadas ó 45 cm) se dividía en 6 palmos; el codo «real» —un codo y un palmo— era por tanto de unas 20,7 pulgadas ó 52,3 cm, muy parecido a la medida griega de 7 palmos. Lo que sostenía el hombre del Libro de Ezequiel era la «gran medida», sin cuyo concurso no se podía proceder en una obra antigua o medieval. Esta medida tenía una longitud de 6 codos, estaba sin duda subdividida en palmos, y por tanto se podía usar para fijar las principales dimensiones de los espacios, así como las pequeñas divisiones individuales, utilizando tan sólo los números consignados diligentemente en los libros de Ezequiel. Una vez que dichos números habían sido registrados, ya fuese en un manual o en un dibujo, se podían transferir a la obra, donde la gran medida se había construido físicamente.

La característica fundamental de la gran medida consistía en que era parte del edificio. No era un «patrón» absoluto; si al principio se establecía con un tamaño ligeramente menor, daba lugar a un edificio más pequeño a partir de la misma planta. Todo esto también aparece en el tratado de Vitruvio, escrito cinco siglos más tarde, formando el primero de sus seis conceptos principales de la teoría de la arquitectura, la *ordinatio*.[6] La exégesis de Frankl pone de manifiesto que la *ordinatio* no es otra cosa que la propia gran medida; la *ordinatio*, dice Vitruvio, se construye a partir de la *quantitas* y la *quantitas* son módulos tomados a partir del edificio. Para aclarar esto, Frankl utiliza el ejemplo de un escultor que crea una figura humana. La figura puede estar hecha a cualquier escala, pero sea cual fuere el tamaño elegido, la relación entre una parte de la escultura (p. ej. la cabeza) y otra cualquiera (p. ej. la mano) será siempre la misma. Una vez fijado el tamaño de una parte de la estatua —por ejemplo el pie— el resto de las partes se pueden expresar a partir de ese pie; esta unidad de medida es el módulo o *quantitas*.

Hoy día, en que cada trabajador de una obra está familiarizado con el sistema decimal y tiene su metro plegable normalizado, subdividido en centímetros y milímetros, todo esto parece innecesariamente complicado. Sin embargo los edificios griegos, romanos y medievales no se construyeron empleando un patrón normalizado, sino con una gran medida local establecida al comienzo del proyecto. Las plantas se replanteaban con esta gran medida, y todos las dimensiones del edificio —la altura de una columna, su anchura, los intercolumnios— se expresaban en base a los módulos que constituían la *ordinatio*.

Ahí surge un problema, intelectualmente fascinante pero sin consecuencias prácticas para los versados en la notación decimal, que concierne al replanteo de las dimensiones que no se podían expresar en módulos. Los números racionales se pueden medir con subdivisiones del módulo, pero no importa el tamaño de las subdivisiones del mismo, los números irracionales, que al parecer obsesionaron a los matemáticos griegos, no se pueden medir así. Vitruvio sabía perfectamente que la raíz cuadrada de 2 es irracional y que no se puede expresar como un «número» de una gran medida. Sin embargo, también era consciente de que esta dimensión se puede obtener, y dio la construcción para duplicar el cuadrado, seguida inmediatamente de una exposición sobre el triángulo pitagórico de proporción 3:4:5.

Esta preocupación por los números es el quid de los «secretos» recopilados por los canteros medievales: los intereses de Vitruvio son los mismos que los de Villard. Para el lector moderno, el manuscrito de Villard es exasperante; fue escrito para los que ya conocían los principios del diseño gótico y, por tanto, silencia temas de fundamental interés. Los dibujos y textos se refieren, por una parte, a la documentación de edificios nuevos o interesantes (algunos vistos por Villard en sus viajes) y por otra, a problemas de geometría.

Las plantas de las grandes iglesias son sorprendentemente modernas; un arquitecto de hoy día las puede leer al instante. La figura 26.2, por ejemplo, muestra los planos de una iglesia existente (Saint-

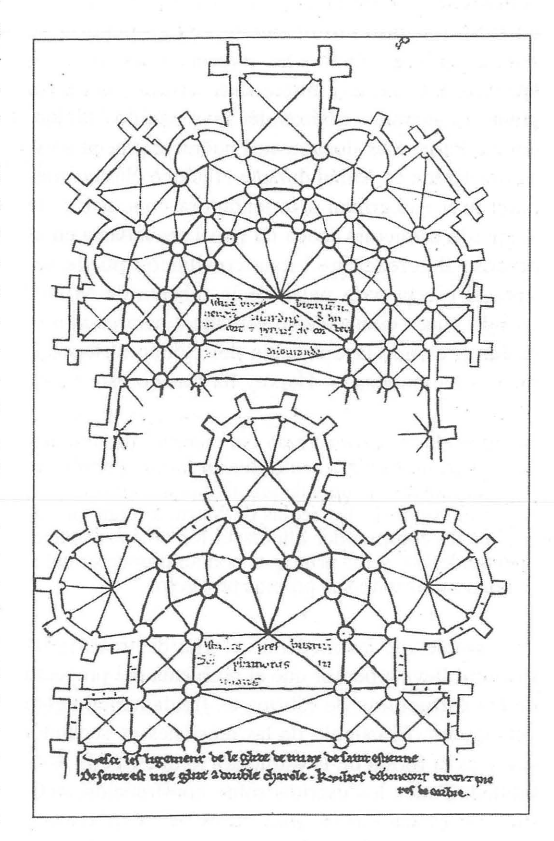


Figura 26.2
Planta de la iglesia de Saint-Étienne, Meaux

Étienne, Meaux, en la parte inferior de la figura). La planta de la parte superior es un nuevo diseño, proyectado por Villard y un maestro local, Pierre de Corbier, *inter se disputando*; muestra la compleja e ingeniosa disposición de las bóvedas para un doble deambulatorio alrededor de un coro que presenta un remate circular.

Por el contrario, los alzados parecen completamente fuera de escala, y dan una importancia exagerada a motivos arquitectónicos concretos. Son como esos dibujos contemporáneos en los que una mano sostiene una lupa estilizada que amplia una parte de la obra. Este es precisamente el propósito de Villard y un arquitecto medieval no tendría ninguna dificultad con estos alzados. Una vez fijada la planta y establecido un conjunto de números con los que, mediante proporciones, se podían construir las dimensiones de cada elemento de la iglesia, no existía ambigüedad alguna para los detalles verticales. La figura 26.3 muestra la planta de una de las torres de la catedral de Laon, tomada, como dice Villard «a un nivel por encima de las primeras ventanas», es decir a una altura exactamente por encima de la mitad de la del dibujo (siglo XIX) de la figura 26.4. Se puede comparar éste con el alzado de Villard, figura 26.5, para mostrar su exagerado detalle (y su falta de conocimiento de la perspectiva). Nadie ha dado todavía una explicación satisfactoria para la mano.

En el tratado de Villard abundan los ejemplos de problemas métricos prácticos, tanto sobre el levantamiento de planos como sobre detalles del corte de la piedra (cómo encontrar el radio de un fuste cuando el centro es inaccesible, cómo hallar la mitad del área de un cuadrado). Son secretos de este tipo los que probablemente se daban a los nuevos miembros de una logia de canteros; sin ellos no podían iniciar el aprendizaje de su oficio.

En la construcción de la catedral de Milán los problemas métricos llegaron a ser cruciales. La catedral se comenzó en 1386, poco más de cien años después del final del gótico clásico, las dificultades en la construcción condujeron a dos pruebas periciales perfectamente documentadas, en 1392 y en 1400. El diseño original era *ad quadratum*; es decir, la altura de la obra en la parte superior de la bóveda más alta debía ser igual a la anchura total de la nave central y las cuatro naves laterales; la sección transversal debía inscribirse en un cuadrado. En 1391 la obra había avanzado hasta el punto en que se habían terminado

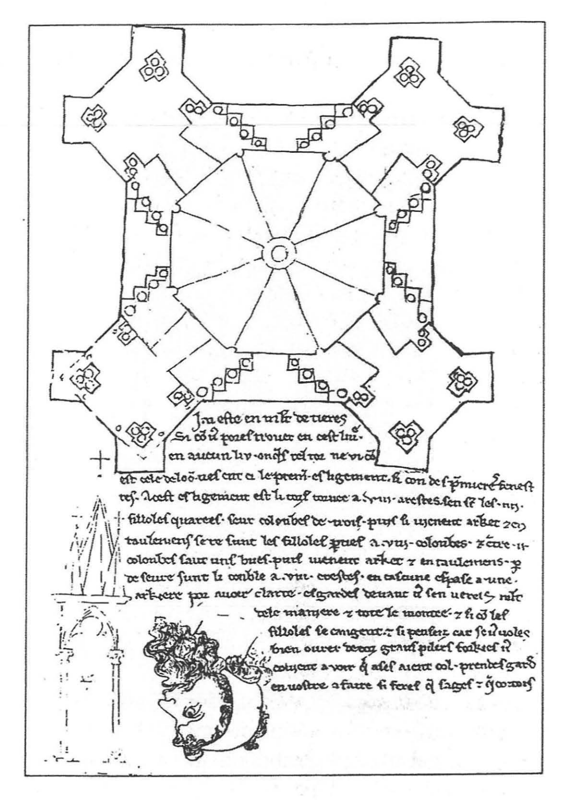


Figura 26.3
Planta de la torre de la catedral de Laon

los pilares en toda su altura, manifestándose dudas sobre la intención inicial. La logia de Milán pidió consejo a la de la catedral de Colonia, pero finalmente aceptó las recomendaciones de Stornaloco, un matemático de Piacenza.

La anchura libre (interior) de la catedral de Milán es de 96 braccia (el braccio, el «codo» milanés mide poco menos de 2 pies, ó unos 0,6 m.). Stornaloco propuso que la altura debía ser de 84 braccia, es decir, la construcción debía ser *ad triangulum*, y tener una sección transversal que se inscribiese en un triángulo casi equilátero. Es precisamente este tema de la aproximación sobre el que la logia de Milán necesitó el consejo de un matemático. Un verdadero triángulo equilátero de 96 braccia de base tiene una altura irracional, no medible con la gran medida, de aproximadamente 83,1 braccia. Stornaloco propuso que esta cifra se redondease hasta 84 braccia.

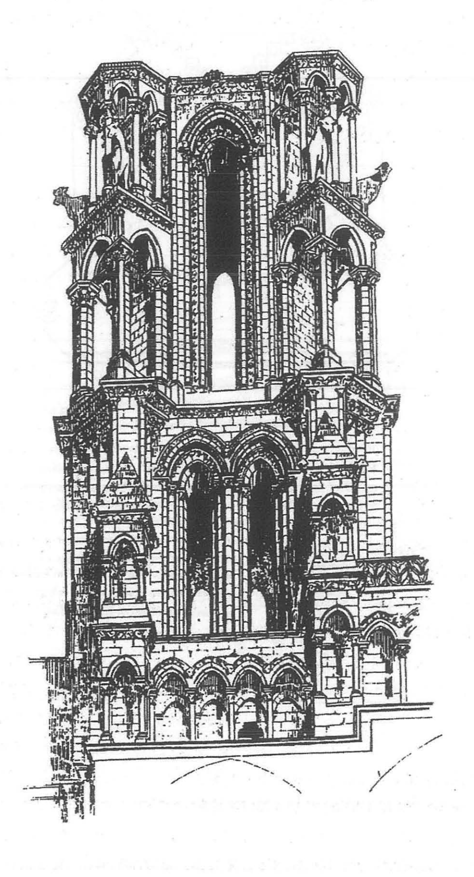


Figura 26.4
Dibujo de la torre de la catedral de Laon

Figura 26.5
Torre de la catedral de Laon, según Villard de Honnecourt

En resumen, la gran medida para la planta de Milán es de 8 braccia y la denominación *ad quadratum* significa que la misma gran medida de 8 braccia era la destinada inicialmente al alzado. La propuesta de Stornaloco de los 84 braccia no sólo eliminaba la irracional raíz cuadrada de 3, sino que además, en la práctica, fijaba una gran medida de 7 braccia para el alzado. La propuesta fue muy discutida y condujo a una nueva polémica en la que intervino Heinrich Parler de Ulm, que deseaba volver a la forma *ad quadratum*; por otra parte, los expertos italianos deseaban reducir la gran medida del alzado aún más, hasta 6 braccia. En este caso, aceptaron la cifra de Stornaloco de 28 braccia para la altura de los pilares de las naves laterales (reducidas a 27,5 braccia para ajustarse con más precisión al valor equilátero de unas 27,7 braccia) pero por encima de este nivel, la obra se terminó con una gran medida vertical de 6 braccia. Como la gran medida horizontal seguía siendo igual a 8 braccia, las medidas por encima del nivel de los pilares eran «pitagóricas».

Por tanto, la prueba pericial trataba de establecer la *ordinatio* de la obra, de modo que las piedras se pudieran cortar para que encajasen perfectamente en las dimensiones del conjunto, y que la dimensión de cada elemento de la obra se pudiese disponer en

relación con las grandes medidas. Es muy interesante el hecho de que para las dimensiones horizontales se utilizase la *ordinatio* de 8 braccia, para la parte inferior de las dimensiones verticales la de 7 braccia y para la superior la de 6.

La construcción avanzó con cierta tranquilidad hasta 1399, en que una controversia mayor condujo a otra prueba pericial. En esta ocasión, acudieron Giovanni Mignoto (en realidad Mignot) de París y Giacomo Cova de Brujas; al año siguiente se unieron a ellos 8 arquitectos italianos para constituir una comisión de investigación en toda la regla.

Mignot comenzó, entre 1399 y 1400, redactando una lista de 54 puntos con los defectos que encontraba en la obra de Milán. La segunda parte de la lista consta esencialmente de trivialidades, pero incluso la primera mitad, más importante, está ordenada de manera curiosa. Junto a objeciones que, si son correctas, son de la máxima importancia —como por ejemplo que los estribos eran insuficientes— hay otras de diversa consideración —que los doseles sobre las figuras escultóricas estaban muy altos o que los capiteles y las basas de los pilares no tenían las proporciones correctas. Los defensores italianos de la obra concedieron a estos temas la misma importancia y se ocuparon de ellos con la misma seriedad. Mignot no quedó satisfecho con las respuestas, y parece que los italianos estaban inventando argumentos para apoyar sus opiniones, en vez de apelando a un fundamento para el debate, más racional y objetivo.

Mignot se destacó como un profundo erudito, versado en teoría de la construcción, hasta el punto en que los italianos de mala gana tuvieron que recurrir a la sentencia *scientia est unum et ars est aliud*. Aquí no se debe realzar la traducción de *scientia* con el concepto moderno de ciencia; *scientia* significaba la teoría expresada en las reglas que conocía el arquitecto. Análogamente *ars* no implica una especial noción estética; es el arte de la cantería, es decir, la práctica de la construcción; ése es su significado. Con su aserto de que «la teoría es una cosa y la práctica otra» los italianos estaban diciéndole a Mignot que estas reglas teóricas eran muy sutiles, pero que ellos, en la práctica, realmente sabían construir una catedral.

La respuesta de Mignot, *ars sine scientia nihil est* (la práctica no es nada sin la teoría), parece anunciar el amanecer de una nueva época de la arquitectura. En realidad no era nada de eso. Mignot poseía un libro de reglas con las que dirigía los proyectos de las grandes iglesias; esta era su *scientia*. Había aplicado estas reglas a la obra de Milán y según ellas, la encontró defectuosa. Probablemente tenía un conjunto de reglas más amplio o incluso unas reglas mejores que las de los italianos, pero parece claro a través de los documentos de la prueba pericial que el mismo Mignot no entendía su propia erudición. La mezcla de criterios «estéticos» y «estructurales» implica que no comprendía, en profundidad, ningún tipo de regla; solamente sabía que las reglas se habían trasgredido. El libro de Mignot había sido recopilado probablemente dos siglos antes, a mediados del gótico clásico, y había permanecido en la logia como un conjunto de preceptos obsoletos cuya finalidad cada vez era más confusa.

Los italianos tuvieron la última palabra. La logia de Milán rechazó tenazmente el consejo foráneo sobre los principales problemas constructivos y la catedral se edificó de acuerdo con sus propias reglas. La catedral se ha conservado durante casi seiscientos años.

La referencia en el juicio al *ars* y la *scientia* se hace eco de Vitruvio.[6] En el primer capítulo, Vitruvio expone la diferencia entre *fabrica* y *ratiocinatio*, y subraya que ambas son imprescindibles para la formación del arquitecto. Vitruvio se leyó a lo largo de todo el medievo, y se copió una y otra vez para utilizarlo en las escuelas monacales y las logias de canteros. La logia de París de Mignot y la de Milán habían formado arquitectos educados tanto en la práctica como en la teoría.

Es irónico que Vitruvio, recordado en las logias y encerrado, aunque alterado, en las reglas de proporción de los arquitectos góticos, se volviese a descubrir en el mundo secular de los príncipes, estudiosos y caballeros, y condujese a ese Renacimiento de la arquitectura en Italia que desplazó al gótico de una vez por todas. Los *Diez Libros* de Alberti, terminados en 1452 y publicados en 1485, afianzaron la autoridad de Vitruvio y subrayaron, sobre todo, la importancia de la proporción para construir un edificio correcto y bello. Brunelleschi había medido con exactitud los edificios de la Roma clásica; con la invención de la imprenta, se hizo posible publicar un Vitruvio ilustrado. Con las reglas en una mano y las ilustraciones en otra; no es de extrañar que un hombre culto pudiese, con éxito, probar su habilidad con la arquitectura, sin el inconveniente de tener que aprender realmente a construir.

27

Torres inclinadas

La contemplación de la caída de las 13.000 toneladas de un edificio de fábrica produce una cierta fascinación. Desde luego, la ruina del Campanile de Venecia el 14 de julio de 1902 mereció en su momento todo tipo de comentarios y análisis exhaustivos,[1] especialmente porque la fase final duró 3 días y 19 horas, desde el momento en que se supo que la torre caería hasta que realmente así sucedió. De hecho, el derrumbamiento fue observado detenidamente, pero al parecer no fue acompañado por ningún tipo de inclinación de la torre: antes bien, lo único que se observó fue que las grietas se ensanchaban; el montón final de escombros ofreció muy pocas pistas sobre la causa del fallo.

Es igualmente fascinante observar torres inclinadas y sin embargo estables; hablaremos más adelante de ellas. Quizá la más famosa sea el campanile de Pisa, pero hay muchos otros ejemplos en Italia, especialmente en Venecia y en las islas de la laguna. Una torre inclinada es evidencia de algún tipo de fenómeno geotécnico; los cimientos han cedido para dar lugar a la inclinación. Sin embargo, las torres pueden presentar problemas sin necesidad de inclinarse, y hay muchos ejemplos de derrumbamientos ocurridos a los pocos años de la terminación de las obras, por ejemplo en Winchester, Gloucester y Worcester, y en Beauvais (dos veces). En ocasiones ha habido que apuntalar apresuradamente, como en el caso de los espectaculares arcos cruzados de Wells o los estribos inclinados en el interior de Gloucester.

En mecánica del suelo, la escala de tiempos para la consolidación de los terrenos es de alrededor de un decenio para un recuadro de 10 a 15 metros de lado. Puede observarse que aquellas torres que han sobrevivido este periodo inicial han experimentado asientos de hasta 300 mm con relación a la fábrica circundante; el asiento fue aparentemente uniforme durante sus primeros 20 años, alcanzando tras ello la seguridad razonable de una existencia estable. Algunas, sin embargo, no lo consiguieron; la torre del crucero de Ely se derrumbó en 1322, dos siglos después de su construcción (siendo sustituida a continuación por el cimborrio octogonal actual) y la torre del crucero de Chichester se arruinó en 1861, después de siete siglos de una existencia aparentemente tranquila.[2]

Ninguna de estas torres, ni las que cayeron ni las que siguen en pie, había sufrido desplomes. Parece que los asientos diferenciales han podido producir otro tipo de daños y a este respecto, las fisuras verticales que sabemos que aparecieron en el Campanile de Venecia podrían facilitar alguna pista. Efectivamente, el examen de los cimientos después del derrumbamiento de 1902 reveló que era muy poco probable que el fallo geotécnico fuera causa de la ruina; aunque la tensión media del terreno era bastante alta,

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «Leaning Towers,» *Meccanica* 27 (1992): 153-9. Traducción de Fernando Inglés Musoles.

de unos 600 kN/m^2, la arcilla compactada había soportado satisfactoriamente la carga durante varios siglos. El Campanile había estado en pie durante más de mil años, aunque los archivos antiguos hablan varias veces de incendios y destrucciones parciales. Más recientemente, la estructura fue sacudida por el rayo en 1388, y de nuevo en 1417 y en 1489; en esta última ocasión quedó prácticamente arruinada.[3] El rayo volvió a dañar gravemente la torre en 1548, 1565 y 1653; en 1745 quedó casi destruida y hubo que reparar 37 grietas. Sufrió posteriores daños por las tormentas en los años 1761 y 1762; no obstante, en 1766 se instaló un pararrayos de Franklin y el Campanile continuó con una existencia más apacible hasta 1902. (Un pararrayos similar fue instalado en 1769 en la catedral de San Pablo, de Wren.)

Una cuestión de gran interés es saber cómo puede el rayo llegar a producir daños en una torre de fábrica e incluso ocasionar su ruina. La respuesta hay que buscarla a partir de la consideración de la fábrica como material unilateral. (No se analizarán aquí todas las consecuencias teóricas de las propiedades unilaterales de la fábrica.) En términos generales —no demasiado rigurosos— resulta apropiado, además de prudente, considerar la obra de fábrica como un conjunto de piedras en seco (o ladrillos u otro material similar), en ocasiones labradas y aparejadas entre sí, colocadas unas sobre otras para formar una estructura estable. Puede que se haya utilizado un mortero para rellenar los intersticios, pero normalmente se tratará de morteros ya pobres en origen que se habrán degradado con el tiempo y, por ello, no se puede considerar que añadan mayor resistencia a la construcción. De hecho, la estabilidad del conjunto está asegurada por la compactación de los diversos elementos por la acción de la gravedad; la fábrica admite un estado general de compresiones pero sólo resiste pequeñas tensiones de tracción.

En consonancia con esta visión elemental de las obras de fábrica, se supondrá que las tensiones de compresión son muy bajas —de forma que no hay peligro de rotura por aplastamiento del material— y que no pueden desarrollarse tensiones de tracción (este es el modelo unilateral; el material puede resistir compresiones, pero tiene una resistencia nula a tracción). Es evidente que esta visión del material es imprecisa. Por ejemplo, es fácil imaginar un muro de piedra en seco en el que efectivamente los sillares se pueden desmontar pero, en ausencia de interferencias de este tipo, la forma estructural se mantendrá. Los sillares, sin embargo, deben tener una geometría determinada y ser capaces de resistir fuerzas laterales como consecuencia de su traba o de la fricción; cualquier intento de construir un muro de paredes verticales a base de pequeñas partículas (por ejemplo, de arena) fracasará. La cohesión depende de que los componentes de la estructura de fábrica tengan resistencia a tracción de forma individual, aunque la estructura en su conjunto carezca de ella.

Con frecuencia, los muros medievales tienen grosores de hasta 2 ó más metros. Los bloques de piedra utilizados en edificación solían tener una dimensión principal de unos 300 mm, aunque en ocasiones se utilizaban también perpiaños de mayor tamaño —por ejemplo para levantar una pared de 500 mm de grueso— con el fin de dotar a la estructura en su conjunto de la cohesión necesaria. Es raro encontrar en la construcción medieval sillares de más de 500 mm, lo que supone una fracción del tamaño de los monolitos griegos; todo el arte del gótico estriba en la erección de enormes estructuras utilizando sólo pequeños bloques. Por ello, la estructura de un muro de 1 m o más de espesor consta normalmente de una hoja exterior y otra interior de fábrica bien aparejada, con un núcleo central relleno de fábrica toscamente labrada (mampuestos, ripios) y argamasa. En este relleno central pueden aparecer grietas, y las dos hojas exteriores del muro tienen tendencia a separarse. Se puede considerar una torre de planta cuadrada como compuesta por cuatro muros de tales características; las hojas interiores quedan constreñidas unas por otras para permanecer más o menos en su posición, pero nada evita el movimiento de las superficies externas de la torre, salvo la resistencia interior a tracción. Es por esa razón por la que es habitual ver chapas de hierro en las esquinas de muchas torres existentes, a distintos niveles, y tirantes interiores anclados a estas chapas que arriostran las caras exteriores en las cuatro esquinas de la torre.

El citado fenómeno de agrietamiento vertical se produce paralelamente a la superficie del muro. También pueden aparecer grietas verticales en un plano perpendicular, atravesando el grosor de la pared. Un material sin resistencia a tracción tampoco tiene resistencia a cortante y ese tipo de agrietamiento vertical puede ser ocasionado por pequeños asientos diferenciales de la cimentación que se producen durante el proceso de consolidación del

terreno en la primera década después de la terminación de la obra. La figura 27.1 muestra esquemáticamente la planta de la esquina de una torre, en la que las grietas del relleno de mampostería se cruzan con grietas de «asiento» del tipo indicado. Se puede observar que la esquina ha quedado separada; si dicha esquina soporta una carga importante, habrá un riesgo evidente de inestabilidad.

El informe del profesor Willis[2] pone de manifiesto que algo parecido debió preceder a la ruina de la torre del crucero de Chichester en 1861. De igual forma, en la esquina del Campanile había existido una grieta vertical de ese tipo a lo largo de más de un siglo, y fue precisamente el ensanchamiento de esa grieta durante los últimos cuatro días lo que llevó al hundimiento final.

Hay que señalar que hay otra posibilidad de que se produzcan grietas verticales en un muro. El bien conocido «ensayo brasileño» para probetas cilíndricas de hormigón se basa en el hecho de que las tensiones verticales de compresión aplicadas a un bloque de material pueden producir también tensiones horizontales de tracción. Así, si los muros de 2 metros de grueso del Campanile están sometidos en su base a una tensión vertical de compresión de digamos 1,5 N/mm^2, podrían haberse producido las correspondientes tensiones de tracción. De hecho, la grieta existente que condujo al colapso conectaba una serie de ocho ventanas situadas en la esquina de la torre, de modo que sí había un fácil recorrido a lo largo del cual abrirse una fisura.

Se formen como se formen estas grietas, por asentamientos o por deformaciones de tracción generadas por la gravedad, parece factible en cualquier caso que puedan producir elementos de la torre localmente inestables y provocar en su caso la ruina general. Este derrumbamiento puede ser evitado como en el ejemplo citado de Wells, donde se construyeron a tiempo los oportunos contrarrestos; por el contrario, la torre de 153 metros del crucero de Beauvais, terminada en 1569, se derrumbó en 1573 trece días después de que se iniciaran los trabajos para ponerla a salvo. Los asientos uniformes no tienen por qué producir grietas peligrosas y así, una torre que haya superado el periodo inicial de consolidación —de alrededor de un decenio— puede llegar a ser relativamente segura. No obstante, la modificación del nivel freático puede conducir de nuevo a un periodo posterior de «alto riesgo», y los hundimientos de Chichester y Ely podrían haberse iniciado por una interferencia de este tipo.

Las grietas verticales se mojan en las tormentas y pueden convertirse en excelentes conductores de la electricidad para los cerca de 30.000 amperios asociados a la caída de un rayo. El incremento de temperatura asociado puede llegar a ser de 15.000°C y las presiones generadas por la producción prácticamente instantánea de vapor pueden dañar gravemente el conjunto de la fábrica de una torre.[3] (De la misma forma, el canal de la albura, por donde se conduce la savia, actuando como un conductor, puede producir la explosión de un árbol.)

En el caso del Campanile en 1902, la causa inmediata del derrumbamiento no fue la caída de un rayo. Más bien parece que fue alguna grieta —o grietas— existente la que se abrió inexorablemente hasta el punto en que la torre se hizo inestable. Alban Caroe[4] propuso una razón alternativa del fenómeno, aunque no da una explicación detallada que apoye su hipótesis. En un breve capítulo sobre campanarios, espadañas y campanas en su libro sobre iglesias antiguas, hace la siguiente afirmación: «De vez en cuando se plantea la necesidad de disponer urinarios en las torres de las iglesias medievales. Muchos de los peligros que se pueden prevenir con una medida de ese

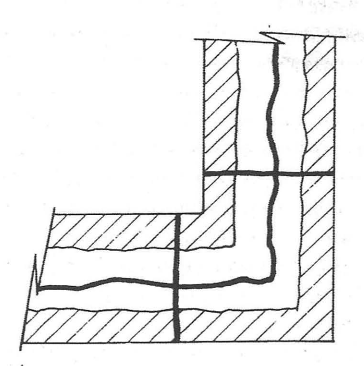


Figura 27.1
Agrietamiento vertical (esquemático) de los muros de una torre. La separación de las «hojas» del muro puede producir fisuras en el relleno de mampostería; las grietas que atraviesan el grosor de los muros pueden llegar a independizar una esquina de la torre

tipo son evidentes, pero vale la pena recordar que fue una práctica antihigiénica de este tipo la que produjo la ruina del gran campanile de San Marcos en Venecia.» Este párrafo, reproducido íntegramente, no recibe mayor explicación por parte de Caroe.

TORRES INCLINADAS

Un bloque rectangular de altura H y anchura b, puede inclinarse sobre su base hasta que el centro de gravedad alcance la vertical de una de las aristas; un ligero movimiento más allá de esa posición hará que el bloque vuelque. El coseno del ángulo crítico de vuelco será aproximadamente la unidad para todo bloque cuya relación de altura a anchura sea, digamos, superior a 4, de modo que el desplazamiento crítico —la «inclinación» del bloque— es equivalente a su anchura. Los cálculos no son tan sencillos en el caso de la fábrica unilateral.

La figura 27.2 representa el croquis de un contratista sobre un muro medieval de cerramiento de Peterhouse en Cambridge. Se puede observar que ha aparecido una grieta inclinada; debido a la naturaleza unilateral del material, parte del muro permanece unida a la base, y la grieta define un límite, libre de tensiones, cuya forma es desconocida a priori. Debido a la grieta, el muro se encuentra en un estado potencialmente más peligroso que un bloque sólido basculando sobre una de sus aristas. El grosor de la pared es de unos 0,53 m y el desplome real en junio de 1981 era de 355 mm. El análisis que sigue llega a una ecuación del perfil de la rotura y determina la inclinación máxima admisible para la estabilidad del muro; en el caso de Peterhouse, se deduce que el desplome máximo es de 380 mm. Para prevenir el desplome, se colocaron a tiempo contrafuertes (sin esperar a que se terminaran los cálculos). Se puede observar que la altura libre del muro de la figura 27.2 es de 104 pulgadas ó 2,64 m, así que la relación H/b vale casi exactamente 5.

La figura 27.3 muestra un macizo de fábrica de altura a con una inclinación α tal que la reacción pasa exactamente por el tercio central de la sección.

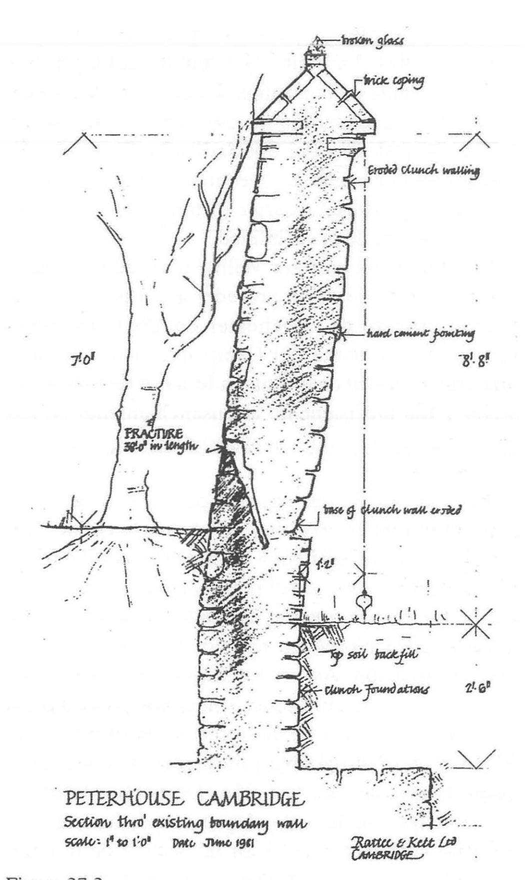


Figura 27.2
Muro inclinado de fábrica cerca del punto de colapso

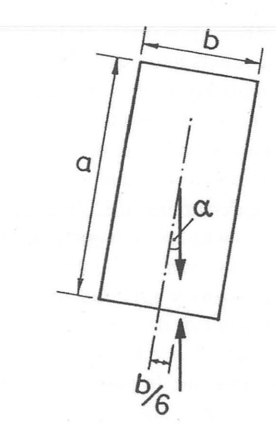


Figura 27.3 (*derecha*)
Bloque inclinado de fábrica

En esta situación, de acuerdo con la teoría elástica ordinaria, la esquina de la izquierda tendrá precisamente una tensión nula y el bloque estará soportado por fuerzas de compresión linealmente crecientes a lo largo de la base de apoyo. Evidentemente $^1/_2 a$ tg $\alpha = {}^1/_6 b$, o bien

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\frac{b}{a} \qquad (1)$$

La figura 27.4 representa parte de un muro de mayor altura con la misma inclinación α, en el que se ha producido una rotura en la superficie libre de tensiones y se ha desprendido parte del muro. En una sección genérica, distante una longitud X del origen, el peso total W del muro está soportado por una fuerza que de nuevo pasa por el límite del tercio central de la base de dimensión reducida Y. La figura 27.5 muestra una rebanada elemental de muro, de ancho Y y espesor dX; sin perder validez general, se harán los cálculos para peso específico unitario del material, con lo que el peso dW de la rebanada viene dado por d$W = Y$dX, o bien,

$$Y = \frac{dW}{dX} \qquad (2)$$

Tomando momentos respecto al punto A de la rebanada,

$$dW(\tfrac{1}{2}Y\cos\alpha - \tfrac{1}{2}dX\operatorname{sen}\alpha) + W(\tfrac{1}{3}Y\cos\alpha - dX\operatorname{sen}\alpha) =$$
$$= (W + dW)\tfrac{1}{3}(Y + dY)\cos\alpha$$

de modo que, despreciando los productos de los términos infinitesimales, queda:

$$\frac{1}{6}Y\frac{dW}{dX} - W\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}W\frac{dY}{dX} \qquad (3)$$

Pero, de la ecuación (2):

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dW}\frac{dW}{dX} = Y\frac{dY}{dW}$$

de modo que la ecuación (3) se convierte en:

$$\frac{1}{6}Y^2 - W\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}WY\frac{dY}{dW} \qquad (4)$$

Introduciendo las variables adimensionales

$$x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{b}, \quad w = \frac{W}{ab}$$

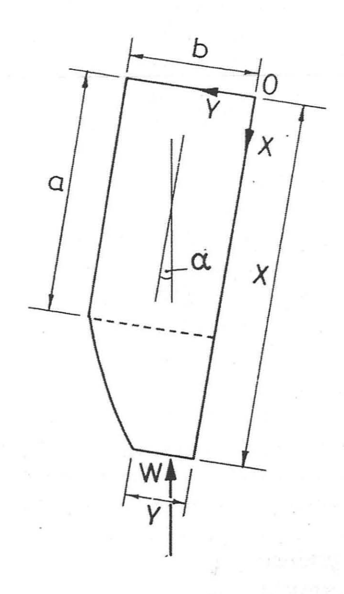


Figura 27.4
Bloque inclinado en el que la reacción pasa fuera del tercio central del espesor original del muro. Ha aparecido una grieta (cf. figura 27.2) cuya forma se trata de determinar

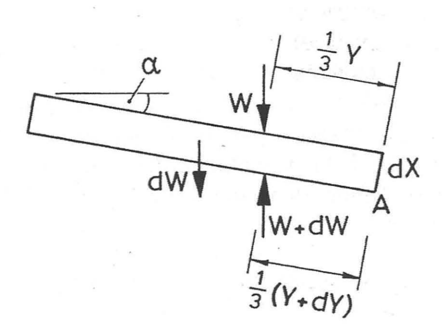


Figura 27.5
Rebanada elemental de fábrica

y aplicando la ecuación (1), la ecuación (4) se convierte en

$$y^2 = 2w\left(1 + y\frac{dy}{dw}\right) \qquad (5)$$

La ecuación (5) se puede simplificar substituyendo

$$y^2 = z \tag{6}$$

de modo que

$$z = 2w + w\frac{dz}{dw} \tag{7}$$

o bien,

$$\frac{dz}{dw} - \frac{1}{w}z = -2 \tag{8}$$

Esta ecuación tiene la solución

$$z = w(C - 2\log w)$$

o bien,

$$y^2 = w(C - 2\log w) \tag{9}$$

donde C es una constante de integración. En la figura 27.4 se puede observar que la grieta empieza en $X = a$, $Y = b$, condición para la que $W = ab$; es decir, la ecuación (9) debe satisfacer la condición $x = 1$, $y = 1$, $w = 1$. En ese caso, $C = 1$, y

$$y^2 = w(1 - 2\log w) \tag{10}$$

Ahora bien, en la ecuación (2) $y = dw/dx$, de modo que la ecuación (10) se convierte en

$$\frac{dw}{dx} = \sqrt{w(1 - 2\log w)} \tag{11}$$

es decir,

$$x = D + \int_1^w \frac{dw}{\sqrt{w(1 - 2\log w)}} \tag{12}$$

en la que D es una segunda constante de integración, cuyo valor unidad se obtiene a partir de la condición $x = 1$, $w = 1$. La ecuación (12) se puede resolver en función de un parámetro t, tal que

$$1 - 2\log w = 4\,t^2 \tag{13}$$

sustituyendo, la ecuación (12) se convierte en

$$x = 1 + 2e^{\frac{1}{4}}\int_t^{\frac{1}{2}} e^{-t^2}\,dt \tag{14}$$

La integral es (con el factor $2/\sqrt{\pi}$) la de la función de error erf(t), de modo que las ecuaciones (13), (14) y (10) llevan al resultado final:

$$\left.\begin{aligned} w &= e^{1/2}\,e^{-2t^2} \\ x &= 1 + \sqrt{\pi}\,e^{1/4}\,(\text{erf}\,\tfrac{1}{2} - \text{erf}\,t) \\ y &= e^{1/4}\,2t\,e^{-t^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Estas expresiones son válidas para valores del parámetro t en el intervalo $0 \le t \le {}^1/_2$.

Se ha dibujado en la figura 27.6 la forma de la grieta que corresponde a las ecuaciones (15); este croquis adimensional para los parámetros x e y está dibujado para $a = b$, y se puede deformar linealmente para ajustarse a los parámetros X e Y de la torre real (cf. figura 27.12(a)); por ello es válido para todos los valores de la esbeltez a/b.

La altura máxima de la torre (para la inclinación dada α) viene dada por la condición de que la grieta atraviese todo el espesor de la torre, es decir, por la condición $y = 0$, para la que el parámetro t también vale cero. Así, de la segunda de las ecuaciones (15) se deduce que la altura adimensional h de una torre que está a punto de ser inestable para una inclinación α viene dada por:

$$h = [x]_{t=0} = 1 + \sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}}\,(\text{erf}\,\tfrac{1}{2})$$

Y como erf ${}^1/_2 = 0{,}5205$,

$$h = 1 + 1{,}1846 = 2{,}1846 \tag{16}$$

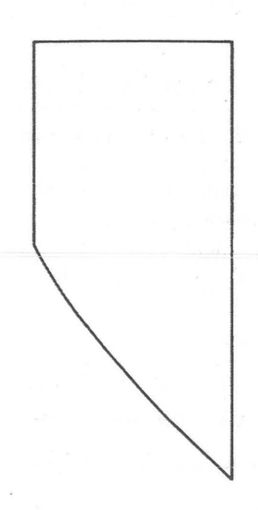


Figura 27.6
Trazado exacto (adimensional) de la superficie de rotura de un muro en el límite de colapso, dibujada para a = b (ver figura 27.4). La figura puede «estirarse» para dar la forma correspondiente a cualquier relación a/b.

Así, para la torre real, la altura H tiene la siguiente relación con el ancho b:

$$\frac{H}{b} = \frac{ah}{b} = \left(\frac{1}{3}\ \text{cotg}\alpha\right)(2{,}1846) = 0{,}7282\ \text{cotg}\alpha$$

es decir,

$$\text{tg}\alpha = \frac{0{,}7282}{(H/b)} \qquad (17)$$

En esta situación, la parte superior de la torre se encuentra fuera de plomo respecto a su base, es decir, tiene un «desplome» de H sen α, y dado que sen$\alpha \approx$ tgα para ángulos pequeños, el desplome máximo es de 0,728b (a comparar con el valor b si la torre hubiera sido un bloque macizo basculando alrededor de una arista). Como ejemplo, si $H/b = 5$ (el muro de Peterhouse), el valor de tg α es 0,146 (sen $\alpha = 0{,}144$) y $\alpha = 8{,}3°$.

La figura 27.7 muestra como se propaga una grieta a medida que se impone una inclinación progresiva sobre un macizo de fábrica. Los esquemas están hechos para el mismo valor $H/b = 5$; a la inclinación de 3,8° se alcanza justo la tracción en la superficie exterior. Una inclinación mayor hace que aparezca una grieta, cuya forma es una parte que aparece en la figura 27.6; esta grieta se propaga a través de la fábrica hasta que el bloque vuelca. El último esquema de la figura 27.7 es idéntico al de la figura 27.12(a), que a su vez es una deformación por alargamiento de la figura 27.6. La figura 27.8 muestra esquemáticamente la grieta en un estado intermedio; una inclinación algo mayor hará que se transfieran parte de los «ladrillos» que están por encima de la grieta a la parte pasiva que está bajo ella, donde ya no pueden contribuir a la estabilidad de la fábrica.

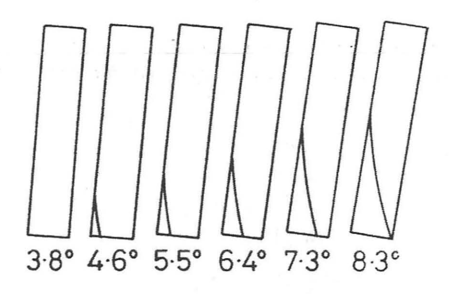


Figura 27.7
Desarrollo de una superficie de rotura a medida que un muro se inclina progresivamente (relación altura/anchura igual a 5)

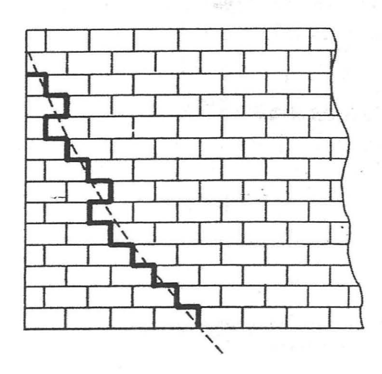


Figura 27.8
Ilustración esquemática de una rotura «real»

Soluciones aproximadas

La curva de rotura de la figura 27.6 es bastante rectilínea y parece sugerir que podría hacerse un análisis aproximado suponiendo que la grieta es recta; un análisis así sería seguro, dado que la rotura real es convexa hacia abajo. La figura 27.9 muestra un muro macizo (o una torre) de espesor b, como antes, inclinada un ángulo α; al igual que anteriormente, la grieta se inicia a una distancia a de la parte superior de la torre, de donde

$$a = \frac{1}{3}\, b\ \text{cotg}\alpha \qquad (1\ \text{bis})$$

Se supone que la grieta se extiende en línea recta hasta un punto P, que se encuentra más abajo a una distancia s. Hay que relacionar entre sí las distintas variables de la figura 27.9 en la situación exacta en que el muro se hace inestable.

Se puede deducir dicha relación tomando simplemente momentos respecto a P. Para que exista equilibrio (y empleando la relación $H = s + a$) se deduce que:

$$\text{tg}^2\alpha - \frac{1}{6}\frac{b}{H}\,\text{tg}\alpha - \frac{7}{18}\left(\frac{b}{H}\right)^2 = 0 \qquad (18)$$

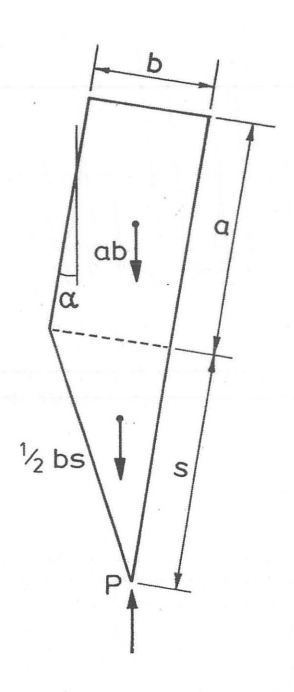


Figura 27.9
Análisis aproximado de un muro suponiendo un agrietamiento recto

de donde

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7125\left(\frac{b}{H}\right) \qquad (19)$$

Se puede comparar el coeficiente de la ecuación (19) con el valor exacto 0,7282 de la ecuación (17).

Una torre real, por supuesto, consta en realidad de cuatro muros que rodean un núcleo central hueco; además, el grosor de los muros suele disminuir hacia la parte superior. No es posible, por tanto, obtener una expresión general que se corresponda con las ecuaciones (18) y (19) de la torre maciza. Interesa examinar de todos modos la estabilidad de una torre con muros delgados de sección constante. La figura 27.10 muestra la sección transversal de una torre cuadrada de lados d, exterior, y c, interior. El área es (d^2-c^2) y el valor correspondiente del módulo resistente de la sección $(d^4-c^4)/6d$. Así, utilizando el

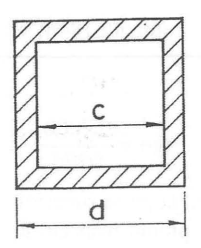


Figura 27.10
Sección de una torre hueca

mismo enfoque anterior de tipo elástico, la grieta se iniciará cuando la carga tenga una excentricidad respecto a la línea central de valor $(d^2+c^2)/6d$, y para $c \approx d$, ese valor es de $d/3$.

La «regla del tercio central» en el caso de la sección maciza se sustituye por la «regla de los dos tercios centrales» en el caso de la sección hueca de paredes delgadas. (Para una torre de paredes de espesor normal, el coeficiente de excentricidad puede ser 0,29 o 0,30 en vez de 1/3.)

Así, la torre de paredes delgadas con inclinación crítica que se muestra en la figura 27.11, comenzará a agrietarse cuando

$$a = \frac{2}{3}\, b \operatorname{cotg}\alpha \qquad (20)$$

Se aproxima nuevamente la grieta a una línea recta (figura 27.11) y un análisis elemental como el de antes lleva a que

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{2}{3}\frac{b}{H}\operatorname{tg}\alpha - \frac{80}{63}\left(\frac{b}{H}\right)^2 = 0 \qquad (21)$$

de donde

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8418\left(\frac{b}{H}\right) \qquad (22)$$

La figura 27.12 representa las configuraciones correspondientes a las ecuaciones (17), (19) y (22) para una torre que tenga $H/b = 5$. La figura 27.12(a) muestra la solución exacta, en el momento en que una torre maciza (o un muro) comienza a volcar con un ángulo de 8,3°; los ángulos correspondientes para las soluciones aproximadas de la torre maciza (b) y de la

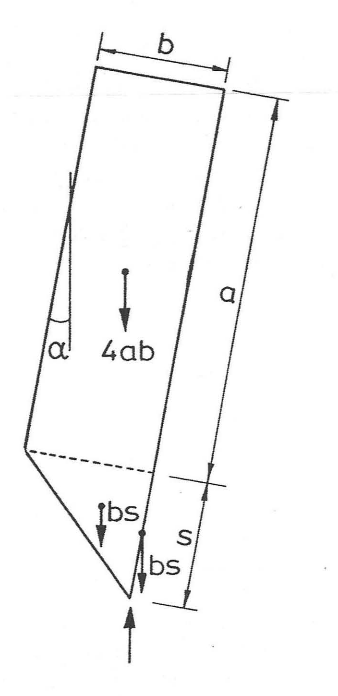


Figura 27.11
Análisis aproximado de una torre hueca (cf. figura 27.9)

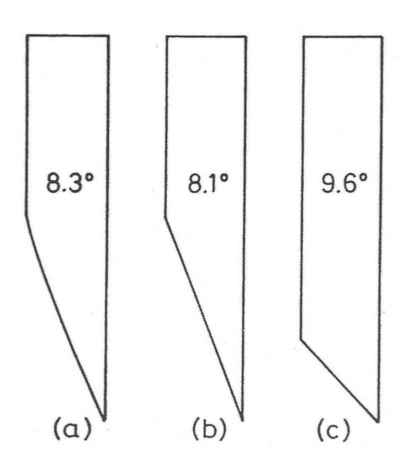


Figura 27.12
Soluciones comparativas para el vuelco de una torre de fábrica: (a) maciza, exacta; (b) maciza, aproximada; (c) hueca, aproximada

torre de paredes delgadas (c) son 8,1° y 9,6° respectivamente. Puede observarse que el ángulo de vuelco para una torre «cohesiva» (no unilateral), hueca o maciza, es 11,3° para $H/b=5$.

Conclusión

Robert Willis dió en 1835 una tabla con las dimensiones de los principales campaniles italianos.[5] Las relaciones entre altura y base (H/b) varían desde el valor 3 (Pisa, que es circular, por supuesto) a 12 (Torre Asinelli, en Bolonia). La tabla 27.1 da los valores de α para diversos valores de H/b a partir de las ecuaciònes (19) y (22), para torres macizas y torres de paredes delgadas respectivamente; las dos siguientes líneas dan valores de arc tg ($^1/_3 b/H$) y de arc tg ($^2/_3 b/H$), es decir, el menor ángulo para el que aparecen grietas en las torres macizas y en las torres huecas.

	H/b						
	3	4	5	6	8	10	12
VUELCO							
Sólida Ecuación (19)	13,4	10,1	8,1	6,8	5,1	4,1	3,4
Hueca Ecuación (22)	15,7	11,9	9,6	8,0	6,0	4,8	4,0
PRIMERA GRIETA							
Sólida	6,3	4,8	3,8	3,2	2,4	1,9	1,6
Hueca	12,5	9,5	7,6	6,3	4,8	3,8	3,2

Tabla 27.1
Valores de la inclinación de la torre, α

Los valores de inclinación de la tabla son casi directamente proporcionales a b/H (figura 27.13). Se puede observar que los ángulos de vuelco para torres macizas y para torres de paredes delgadas son muy parecidos; más aún, las dimensiones efectivas de muros de una torre real reducen los valores del ángulo de vuelco respecto a los de la ecuación (22). (De forma similar, una torre hueca se agrietará con ángulos menores que los que da la última línea de la tabla.) En cualquier caso, da la impresión de que la ecuación (22) define una inclinación límite peligrosa; en grados, se puede expresar aproximadamente como:

$$\alpha = 48 \left(\frac{b}{H}\right) \tag{23}$$

Un ángulo de valor mitad, 24(*b*/*H*) por ejemplo, podría llegar a ser motivo de preocupación si realmente se alcanzara en la práctica; con esa inclinación, una torre maciza presentaría algunas grietas mientras que una torre hueca tendría sólo grietas de poca importancia. Se ha dibujado esta línea en la figura 27.13. De acuerdo con esta regla, el Campanile de Burano (en una isla de la laguna de Venecia), que tiene una esbeltez *H*/*b* de cerca de 10, es un caso digno de preocupación. De la tabla 27.1 se deduce que el ángulo de vuelco es de unos 4,8°; un ángulo ya preocupante sería de 2,4°. Con una plomada extendida desde lo alto de sus 31,15 m, se midió un desplome de 1,96 m, que corresponden a una inclinación de 3,6°. La torre ha sido estabilizada por encima de rasante con perforaciones y cosidos, y por debajo de rasante con micropilotes (*pali radice*).

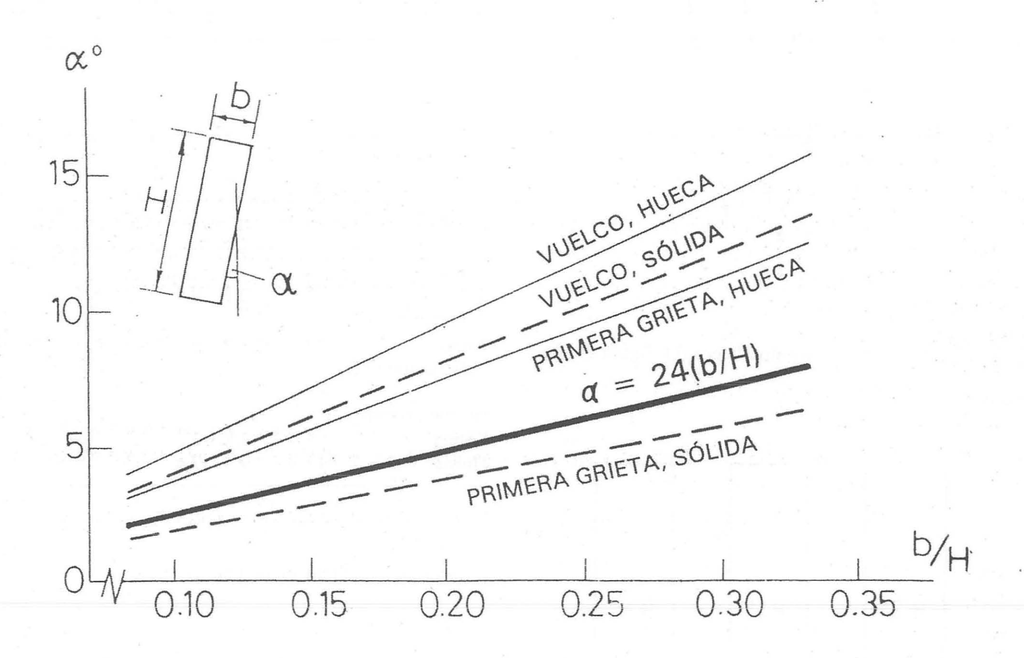


Figura 27.13
Angulos críticos de inclinación para torres con distinta relación de anchura a altura. Una regla «segura» de trabajo viene dada por la línea $\alpha = 24(b/H)$

28

Hundimientos de bóvedas de piedra

Las bóvedas pueden estar construidas de muy diversas piedras, desde arenisca corriente hasta toba ligera, pasando por un aglomerado relativamente poco resistente. El denominador común es que tan sólo precisan soportar su propio peso, lo que hacen con tensiones medias muy bajas. Normalmente, la tensión máxima de compresión (que depende, naturalmente de las dimensiones concretas de cada caso) no suele exceder de 1 N/mm^2, mientras que la resistencia a rotura por compresión de una arenisca media ronda los 30 N/mm^2. Cualesquiera que sean las dimensiones particulares, hay implícito un coeficiente de seguridad tan grande en la resistencia del material, que puede decirse que el hundimiento por un exceso de tensiones nunca tendrá lugar. (Pueden aparecer desconchones locales del material en puntos de concentración de tensiones, pero ello no implica un peligro global. Es más, el aplastamiento local del material conlleva áreas mayores de contacto, con la consiguiente reducción de tensiones.)

Este reconocimiento del bajo nivel de tensiones, que en general es aplicable a la mayoría de los elementos de la construcción en fábrica, nos conduce a un planteamiento sencillo para la comprensión de la mecánica de los edificios de fábrica. Los bloques individuales de piedra pueden considerarse como sólidos rígidos, dipuestos de manera que forman una estructura estable. Las piedras pueden estar labradas y bien aparejadas, o bien sin labrar y toscamente colocadas. El mortero puede usarse para rellenar intersticios, pero con el tiempo se habrá deteriorado, y no cabe suponer que mejore en absoluto la resistencia del conjunto. Por lo tanto, las piedras serán incapaces de soportar cualquier intento de separarlas; a través de la fábrica pueden transmitirse esfuerzos de compresión, pero sólo se resistirán tracciones muy bajas. De hecho, la estabilidad de la estructura queda asegurada por la compactación de los distintos elementos bajo la acción de la gravedad, con lo que hay que suponer que existe un rozamiento suficiente entre sus puntos de contacto (o bien que están trabados) para evitar el deslizamiento de unos sobre otros (en la práctica pueden verse esporádicamente ejemplos de deslizamiento).

En estas condiciones, la estructura será satisfactoria si posee la forma correcta. Básicamente, la forma de la estructura debe adaptarse al sistema de fuerzas que soporta, y cuanto mayor sea esta adaptación, más segura será la estructura. Como se verá, la aplicación de este principio general puede dar resultados numéricos concretos.

El arco adovelado

El comportamiento general de las fábricas puede ilustrarse con la forma constructiva más sencilla, el

---

Impreso y traducido, con autorización del autor, del original «The Collapse of Stone Vaulting,» *Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings* III (C.A. Brebbia y R.J.B. Fresser, eds. Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1993). Traducción de Jorge Conde Conde.

arco bidimensional. El arco de la figura 28.1(a) se supone compuesto de dovelas cuneiformes idénticas, dispuestas a hueso sobre una cimbra provisional, y se encuentra encajado con precisión entre sus estribos. Al retirar la cimbra, el arco empuja de inmediato horizontalmente contra los estribos. Inevitablemente éstos ceden un poco, produciéndose entonces un pequeño desajuste geométrico. El arco debe acomodarse de alguna forma al incremento de la luz, lo que hace como se muestra en la figura 28.1(b). Según las propiedades del material que hemos supuesto, la piedra no puede romper ni deslizar; por otra parte, la construcción no puede soportar tracciones. De hecho, aparecerán grietas que en la figura 28.1(b) se dibujan idealizadas como articulaciones; son éstas las que permiten un aumento de la luz sin que la estructura pierda su integridad. Las grietas no tienen por que ser un signo de hundimiento incipiente. Indican que la estructura ha respondido a algún cambio impredecible de las condiciones de contorno. (Como todos los arcos empujan, y todas las márgenes de los ríos ceden, es habitual ver, al pasar bajo un puente de fábrica, una grieta a lo largo del intradós del arco cerca de la clave.)

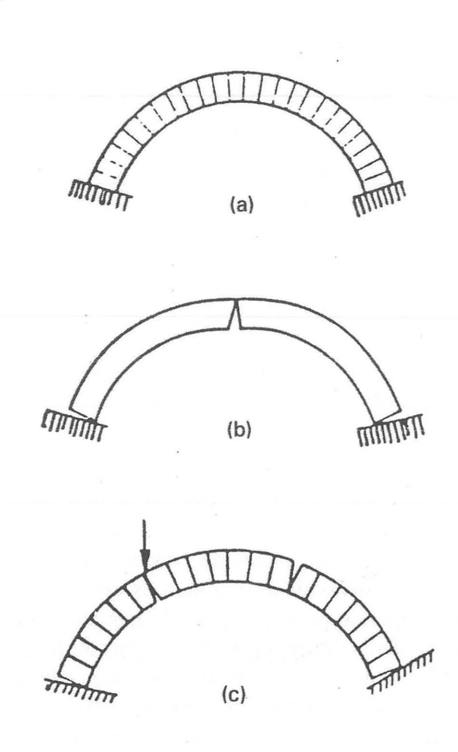


Figura 28.1

El arco de la figura 28.1(b) es, por lo tanto, estable y capaz de soportar cargas. Supongamos que lo sometemos a la acción de una carga puntual, según se muestra en la figura 28.1(c), y que aumentamos esta carga paulatinamente haciéndola más importante en comparación al peso propio del arco. Puede imaginarse que algunas grietas preexistentes de antemano, como las de la figura 28.1(b), se cerrarán, y que otras nuevas pueden abrirse, pero el arco en su conjunto continuará siendo estable. Hay, sin embargo, un límite para el crecimiento de la carga; cuando se forman cuatro articulaciones, como en la figura 28.1(c), el arco se transformará en un mecanismo, con el consiguiente colapso. Esta carga límite es calculable, y la estructura puede soportar con seguridad valores inferiores a ella.

Los cálculos se hacen empleando la estática, y la mejor manera de entender el equilibrio del arco es por referencia al polígono funicular. El polígono funicular del arco describe geométricamente la manera en que las fuerzas se transmiten de junta a junta, proporcionándonos la forma de la línea de empujes. La forma de este polígono funicular a compresión es exactamente la misma que la de un hilo sin peso a tracción. Si imaginamos dicho hilo colgando de dos puntos, y sometido a las mismas cargas que actúan en el arco, «como cuelga el hilo flexible, así pero invertido, se sostendrá el arco rígido». Ésta era la afirmación de Robert Hooke en 1675 y la figura 28.2 muestra un grabado del siglo XVIII que ilustra este principio; el esbelto arco catenario está justo en equilibrio bajo su propio peso (uniforme).

Desde luego, es el espesor del arco el que proporciona un margen de seguridad a una construcción real. El arco de la figura 28.1(a) es estable porque su línea de empujes puede estar contenida dentro de la fábrica. En realidad el semicírculo no se ajusta demasiado bien a la catenaria, pero no obstante la figura 28.3(a) parece sugerir un cierto margen de seguridad. Es más, dicho margen puede ser estimado por comparación con la figura 28.3(b), que muestra el arco estable sometido a peso propio más delgado posible; la línea de empujes está contenida justo dentro de la fábrica, cuyo hundimiento es inminente.

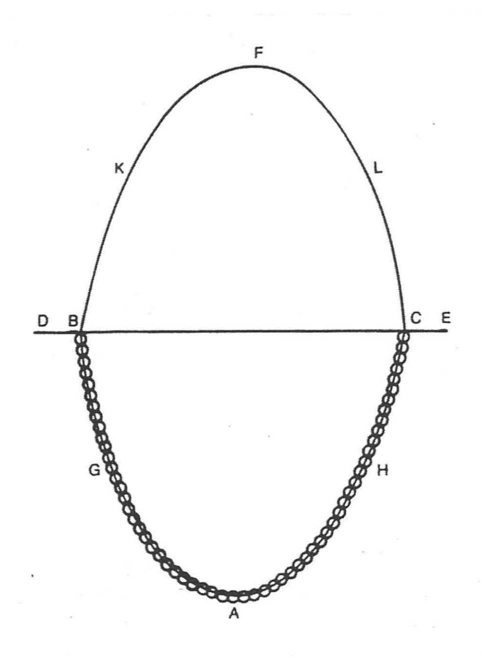


Figura 28.2

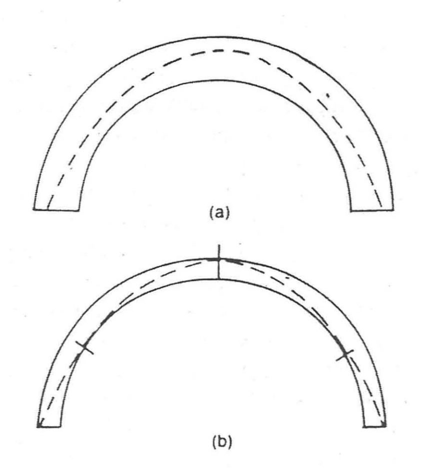


Figura 28.3

La carga puntual creciente de la figura 28.1(c) alterará la forma de la línea de empujes (como alteraría la forma del cable de Hooke), y en la situación límite que se muestra en la citada figura, la línea de empujes pasa precisamente por las cuatro articulaciones, alcanzando de nuevo la superficie de la fábrica e indicando un colapso inminente.

En cualquier caso, son necesarias cuatro articulaciones para el colapso; el arco triarticulado es una tipología estructural plenamente satisfactoria. La figura 28.1(b) se ha redibujado en la 28.4(a); la figura 28.4(b) muestra la posición correspondiente de la línea de empujes. Si el arco es apuntado, la línea de empujes no podrá alcanzar el trasdós en la clave, formándose en teoría las dos articulaciones de las figuras 28.4(c) y 28.4(d). En la práctica, la más ligera asimetría eliminará una de las dos articulaciones de la clave.

La bóveda de crucería

La simple extrapolación de estas ideas básicas sobre el arco nos conduce a un entendimiento de la mecánica de las bóvedas. Como un primer paso, la figura 28.5(a) muestra la sección de una bóveda de cañón de espesor uniforme, dibujada aproximadamente a escala (por ejemplo, con un espesor de 300 mm para una luz de 12 m). La bóveda se supone apoyada sobre estribos exteriores, con o sin arbotantes sobre las naves laterales. Tal y como se ha dibujado, la bóveda es demasiado delgada como para soportar su propio peso; no es posible dibujar una línea de empujes contenida dentro de la fábrica. Se muestra por ello el relleno que refuerza los riñones del cañón, proporcionando una vía de salida a los empujes en su «escape» de la bóveda propiamente dicha (no es necesario considerar el relleno como un peso añadido en los riñones; podría carecer de masa, siempre y cuando tuviera la resistencia necesaria como para transmitir las fuerzas).

El sistema de contrarresto exterior cederá levemente ante los empujes de la bóveda, produciéndose movimientos durante los primeros años de vida de la estructura. Estos movimientos de los estribos habrán cesado virtualmente cuando el terreno se haya consolidado bajo las cimentaciones debido a las elevadas tensiones. Así, es de esperar que la bóveda de cañón muestre la distribución de grietas de la figura 28.5(b), siendo la grieta cercana a la clave visible

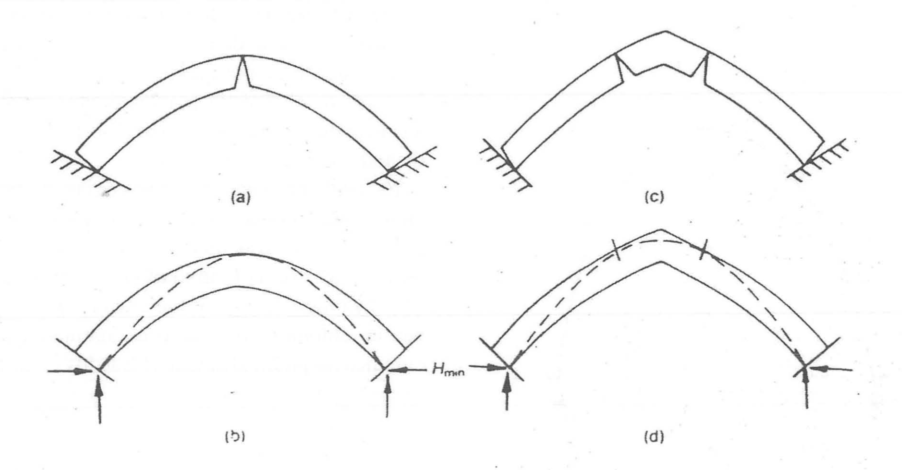


Figura 28.4

desde el interior del edificio. En la figura 28.6, tomada de un estudio de Pol Abraham de 1934, aparecen dibujadas las grietas habituales de este tipo, cercanas a la clave, en una bóveda cuatripartita ligeramente apuntada. Este es un primer tipo de defecto crónico que en la práctica presentan con frecuencia las bóvedas de fábrica; sin embargo, en la figura 28.6 pueden verse también otras grietas.

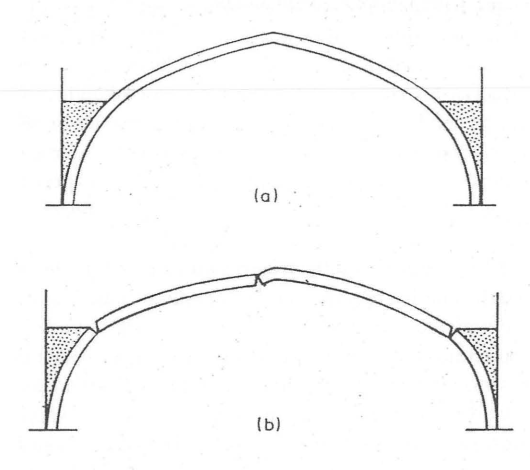


Figura 28.5

La bóveda de la figura 28.5 es, esencialmente bidimensional en el sentido de que su sección transversal se supone constante a lo largo de la nave. La figura 28.7 muestra un sólo tramo de una bóveda cuatripartita, formada por la intersección de dos bóvedas de cañón ligeramente apuntadas. En la figura 28.7(a) se muestra un alzado de la bóveda mirando al este en la dirección del eje de la nave; el relleno, con la misma función que antes, se sitúa en los senos conoidales de la bóveda (compárese con la planta de la figura 28.7(c); se supone que la bóveda consta de varios tramos). Si los estribos cedieran, la parte de bóveda orientada este/oeste se agrietaría como antes, viéndose la línea de articulación desde el interior de la iglesia. La bóveda se acomoda al cambio de la geometría gracias a la rotación de las tres articulaciones, con el consiguiente descenso de la clave.

Hay, sin embargo, una seria coacción geométrica en el cañón de direción norte/sur secante al anterior. En las figuras 28.7(b) y 28.7(c) se muestra una distribución de grietas que permite a la bóveda deformarse formando bloques monolíticos, más o menos libres, en sí mismos, de deformaciones. Se han abierto grietas en la bóveda a una distancia de aproximadamente un metro de los muros norte y sur (habitualmente provistos de ventanales); Pol Abraham, en su clasificación, denominó a dichas grietas «grietas de

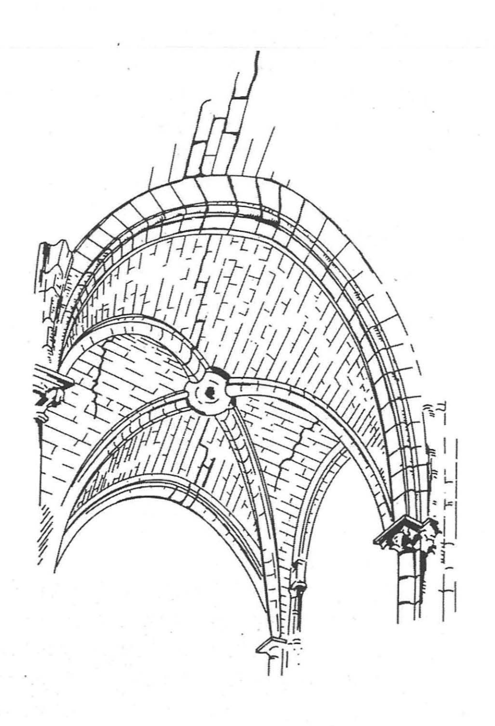


Figura 28.6

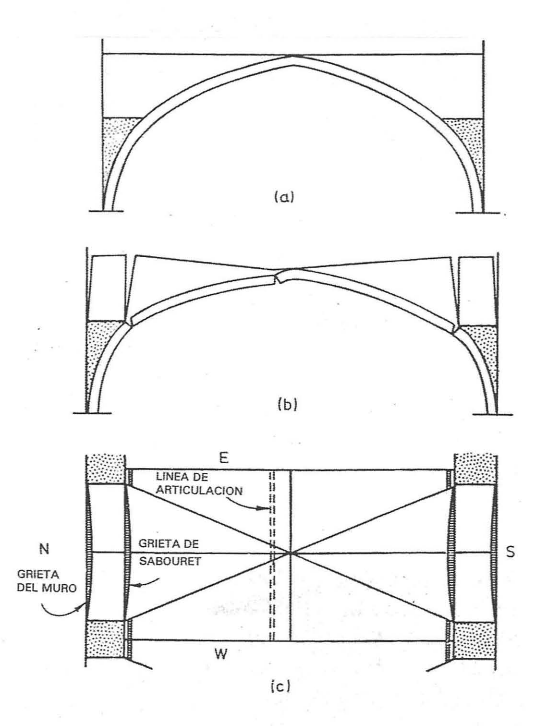


Figura 28.7

Sabouret». Además, es probable que se abran también grietas junto a los muros, y ambos tipos de grietas, las del muro y las de Sabouret, han sido representadas en la figura 28.6.

Así, las grietas cercanas a la clave son indicios de la formación de líneas de articulación en esa parte de la bóveda, por las que pasan, perpendicularmente, las fuerzas de compresión. Por el contrario, las grietas contiguas a los muros y las de Sabouret presentan una separación completa de la fábrica, siendo posible en algunos casos introducir la mano por ellas. Estas grietas no pueden transmitir esfuerzo alguno, y, por consiguiente, los esfuerzos de compresión dicurren paralelamente a ellas. Una grieta mural y una de Sabouret aíslan efectivamente una parte del cañón norte/sur, que funcionará entonces como un arco simple orientado este/oeste, que salva la luz entre dos senos consecutivos.

En principio grietas semejantes podrían generarse formando ángulos rectos en el cañón este/oeste. Sin embargo, la existencia de sucesivos tramos de la bóveda en esta dirección impide el movimiento que daría lugar a las grietas. En el extremo oeste de una catedral la fábrica es habitualmente lo bastante masiva como para sostener la posición del último vano, pero el extremo este puede ser de construcción menos robusta. En tal caso, se verá una grieta mural sobre la ventana este, de nuevo con separación total de la fábrica.

Así, el comportamiento estructural de un tramo de bóveda puede imaginarse como se ve en el esquema de la figura 28.8. Los bordes de la bóveda pueden considerarse como arcos bidimensionales entre los senos conoidàles de las esquinas, y, en muchos casos, cuando las grietas de Sabouret son visibles, pueden haberse transformado en tales arcos. Visibles o

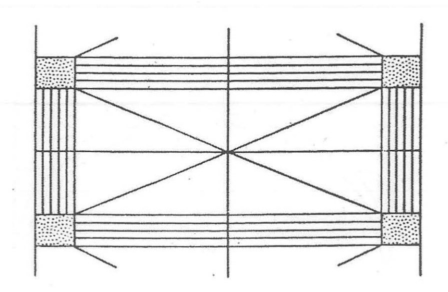


Figura 28.8

no, esta es la hipótesis potencialmente más desfavorable para los bordes de la bóveda, donde las luces son mayores. Efectivamente, en la parte central cuatripartita de la bóveda de la figura 28.8 las luces disminuyen progresivamente a medida que nos acercamos al centro; los extremos serán, por tanto, las zonas críticas.

SOBRECARGAS EN BÓVEDAS

Se realizarán a continuación cálculos para una bóveda de dimensiones usuales, con un tramo de 12 m × 5 m y un espesor de 300 mm. Una bóveda de este tipo pesa (en arenisca o caliza) unos 5 kN/m², peso propio que da lugar a los esfuerzos primarios de la bóveda.

Sobre la bóveda se elevan las grandes armaduras de madera que, junto con el entablado, pueden pesar 20 kN por metro lineal en la dirección de la nave; el peso de las planchas de plomo puede representar 10 kN más. En total, estos pesos equivalen a una carga repartida de unos 3 kN/m² por encima de la bóveda, y ésta sería la sobrecarga que actuaría sobre la bóveda si la techumbre se hundiera durante un incendio. Si se distribuyera uniformemente, la bóveda no se vería afectada. El simple aumento de la carga de 5 a 8 kN/m² no tendría efecto alguno sobre la forma de las líneas de empujes contenidas dentro de la fábrica, y no habría ningún riesgo de hundimiento por formación de articulaciones. Esta misma conclusión es aplicable a cualquier aumento de la carga (al menos hasta un valor muy elevado, cuando podría tener lugar la rotura de la piedra por aplastamiento), de manera que un desplome dinámico de la techumbre, que nos conduciría a esfuerzos efectivos mucho mayores, sería soportado sin problemas, siempre y cuando las cargas estuviesen distribuidas uniformemente.

La sobrecarga, por supuesto, no será uniforme. Se debe investigar, por consiguiente, la capacidad portante de la bóveda ante otras distribuciones de la carga. En la figura 28.9, por ejemplo, el elemento de bóveda ABC, lindante con el muro sur, es crítico, y se realiza a continuación un estudio de este arco aislado. Los cálculos pueden hacerse con relativa facilidad a mano, aunque en este caso el arco se haya analizado por ordenador; la figura 28.10 muestra uno de los resultados.

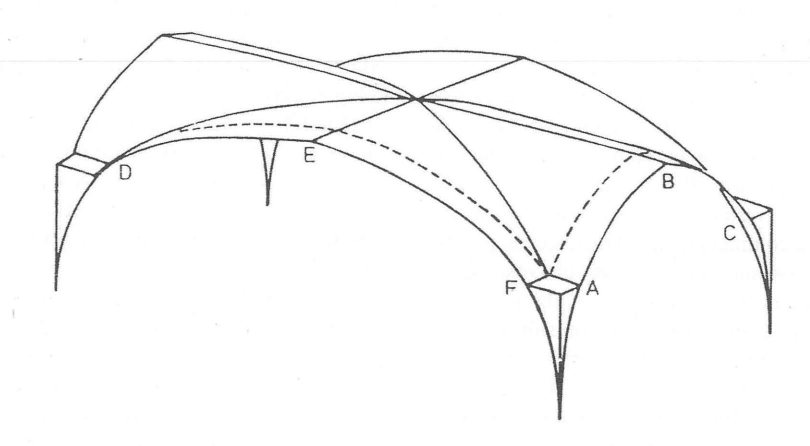


Figura 28.9

La condición de carga más desfavorable se da para una carga puntual actuando a un cuarto de la luz, y la figura 28.10 muestra la forma límite en que la línea de empujes puede estar contenida en la fábrica. La figura 28.11 nos ofrece la correspondiente configuración de colapso. El valor de la carga puntual que produce dicho colapso es de 7,7 kN para un arco de 1 m de ancho. Ahora bien, el fragmento de techumbre sobre AB en la figura 28.9 pesa 3 kN/m^2, actuando en un área de 2,5 m × 1 m; si esta carga de 7,5 kN cayera cerca del punto medio del semiarco AB, probablemente se produciría el hundimiento. Por otra parte, cualquier carga «de contrapeso» en BC mejoraría notablemente la resistencia del arco.

Puede realizarse un cálculo parecido para la sección DEF de la bóveda, considerando la estructura como un arco (de 1 m de ancho) orientado en la dirección norte/sur. Los gráficos del ordenador se muestran en las figuras 28.12 y 28.13, siendo el valor de la carga puntual que produce el colapso 9,8 kN. En este caso la cubierta sobre DE de la figura 28.9 cubre un área de 6 m^2, con lo que un peso de 18 kN puede caer potencialmente a un cuarto de la luz de dicho arco.

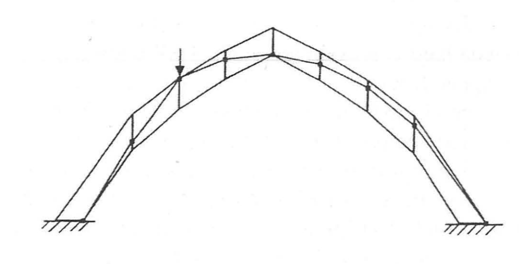


Figura 28.10

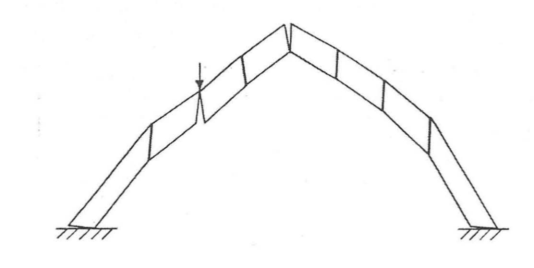


Figura 28.11

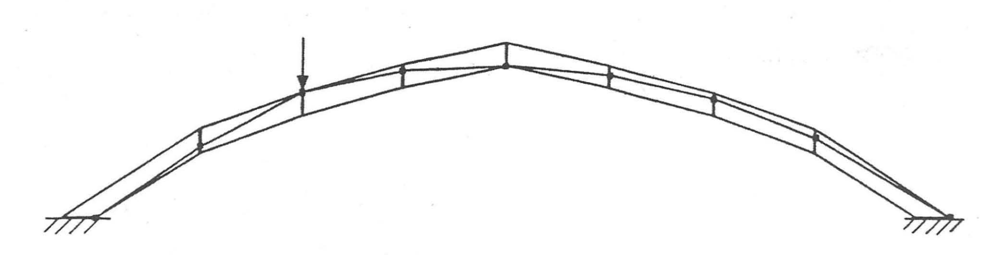


Figura 28.12

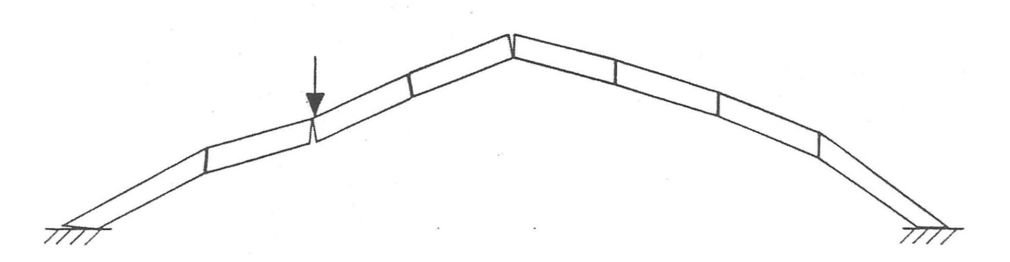


Figura 28.13

De igual forma puede investigarse el efecto del peso del agua acumulado sobre el trasdós de la bóveda. La figura 28.14 muestra la sección ABC de la bóveda bajo la presión hidráulica existente si el nivel del agua alcanzase la clave de la bóveda (es decir, si los senos estuvieran completamente llenos de agua). La bóveda no puede soportar esta presión, y el mecanismo de colapso asociado se ilustra en la figura 28.15, donde los costados son empujados hacia el interior, con la consiguiente elevación de la clave. Este hundimiento tendría lugar antes de llenarse por completo los senos de la bóveda.

Un caso aún más peligroso se da si la carga es asimétrica. Si, por ejemplo, el cuarto de bóveda EFAB de la figura 28.9 se llenase de agua, la presión sobre AB no se equilibraría con una presión similar sobre BC. El estudio por ordenador indica, en primer lugar, que la sección ABC es más crítica que la DEF y, en segundo lugar, que el colapso se producirá si el nivel del agua llega a menos de un metro por debajo de la clave.

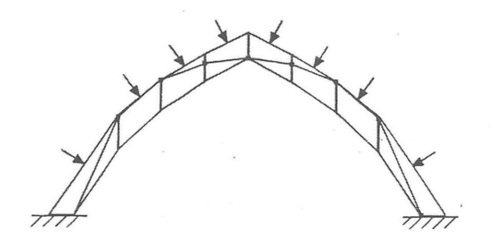


Figura 28.14

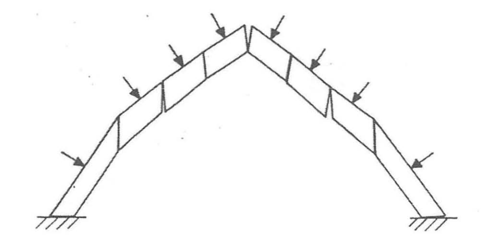


Figura 28.15

COMENTARIO

El análisis que nos ha conducido a las figuras 28.8 y 28.9 es quizá conservador. Sin embargo, los bordes de la bóveda constituyen sus puntos críticos, y su tratamiento como arcos casi bidimensionales proporciona una buena idea de la resistencia general de la bóveda.

Se ha tomado como ejemplo una bóveda cuatripartita simple, de dimensiones generales 12 m × 5 m y 300 mm de espesor medio. Pueden encontrarse bóvedas más delgadas; su capacidad portante estará en relación con su peso por unidad de superficie, es decir, con su espesor, para el mismo material y dimensiones. En la bóveda considerada en el cálculo, las líneas de clave de ambos cañones se supusieron horizontales; la forma ligeramente cupuliforme de los plementos mejorará la resistencia de la bóveda.

Los cálculos no favorecen el optimismo sobre la seguridad de una bóveda en caso de incendio. Las cargas de colapso calculadas son del mismo orden que las que tendría que soportar la bóveda en caso de hundimiento de la techumbre, y los efectos dinámicos podrían producir daños considerables. Aún más, no se han considerado los fenómenos de punzonamiento —la caída de una carga pesada sobre una zona más o menos reducida de la fábrica producirá una perforación local de la bóveda. Peor todavía, el peso del agua acumulada en los senos de la bóveda representa una condición de carga muy desfavorable.

Por otro lado, ninguno de los daños que podrían ocurrir tiene por que ser generalizado. En la figura 28.9 la línea de puntos paralela a ABC representa la posición de la grieta de Sabouret, que aísla la parte más débil de la bóveda orientada en esa dirección. Si existe una grieta de Sabouret o una grieta paralela al muro, no puede acumularse agua en los senos. Si la grieta de Sabouret no ha aparecido (o lo que es más probable, ha sido reparada como consecuencia del buen mantenimiento de la catedral), la presión del agua crecerá lentamente hasta provocar el hundimiento del arco ABC, pero ello no tiene que conducir necesariamente al hundimiento total de la bóveda. Por el contrario, la mayor parte de ésta podría muy bien mantenerse intacta.

De igual forma, una perforación en el arco ABC producida por el desplome de la cubierta de madera

provocaría el colapso de dicho arco, pero dejaría intactos los paños principales de la bóveda. Una perforación de la plementería cercana al centro de la bóveda puede ser, asimismo, perfectamente estable. La bóveda de fábrica posee una gran resistencia intrínseca, y está perfectamente capacitada para soportar daños locales; sin embargo, es un hecho que los esfuerzos provocados por las catástrofes aquí examinadas pueden sobrepasar esta resistencia.

Notas

Las referencias entre corchetes refieren a capítulos de este libro, o son adiciones del editor. Al final de cada capítulo se incluyen los agradecimientos que aparecen en los ensayos originales.

Capítulo 1

1. J. Fitchen, *The construction of gothic cathedrals* (Oxford: Clarendon Press, 1962).
2. G. A. Breymann, *Bau–Constructions–Lehre. Vol 1: Constructionen in Stein* (Stuttgart: Hoffmann, 1849).
3. G. G. Ungewitter, *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen*, 2 vols. (Leipzig: Tauchnitz, 1901).
4. J. Guadet, *Élements et Théorie de l'Architecture*, 4 vols (París: Librairie de la Construction Moderne, s.a.).
5. G. Rosenberg, «The functional aspect of the gothic style,» *Journal of the Royal Institute of British Architects* 43 (1936): 273–90, 364–71.
6. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretations through eight centuries* (Princeton: University Press, 1960).
7. Abad Suger, *Libellus Alter de Consecratione Ecclesiae Sancti Dionysii*, (1144 ?6). Ver Panofsky, nota 22 más adelante.
8. Villard de Honnecourt, ca. 1235. Ver Hahnloser y Willis, notas 28 y 27 más adelante.
9. E. E. Viollet–le–Duc, *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siécle*, 10 vols. (París: A. Morel, 1858–1868).
10. H. Straub, *A history of civil engineering* (Londres: Leonard Hill, 1952).
11. N. Pevsner, *An outline of european architecture*, 7ªed (Harmondsworth: Penguin Books, 1963).
12. A. Yvon Villarceau, «L'établissement des arches de pont,» *Institut de France, Académie des Sciences, Mémoires présentés par divers savants* 12 (1854): 503 y ss.
13. A. J. S. Pippard y J. F. Baker (Lord Baker), *The analysis of engineering structures*, 2ª ed. (Londres: Edward Arnold, 1943).
14. H. Moseley, *The mechanical principles of engineering and architecture* (Londres: Longman, Brown, Green and Longmans, 1843).
15. C. A. Coulomb, «Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture,» *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Academie Royale de Sciencies par divers Savans, et lûs dans ses assemblées* 7 (1773): 343–82.
16. A. Kooharian, «Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches,» *Proceedings of the American Concrete Institute* 49 (1953): 317–28.
17. W. Prager, *An introduction to plasticity* (Reading Mass.: Addison Wesley, 1959).
18. J. F. Baker (Lord Baker), M. R. Horne y J. Heyman, *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behaviour and design* (Cambridge: University Press, 1956).
19. J. Fitchen, «A comment on the function of the upper flying buttress in french gothic architecture,» *Gazette des Beaux-Arts* 45 (1955): 69–90.
20. E. W. H. Gifford y P. Taylor, «The restoration of ancient buildings,» *Structural Engineer* 42 (1964): 327 y ss.
21. J. V. Poncelet, «Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes,» *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (Paris)* 35 (1852): 494–502, 531–540, 577–587.
22. E. Panofsky, *Abbott Suger on the abbey church of St. Denis and its treasures* (Princeton: University Press, 1946).
23. A. J. S. Pippard, E. Tranter y L. Chitty, «The mechanics of the voussoir arch,» *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4 (1936): 281–306.
24. A. J. S. Pippard y R. J. Ashby, «An experimental study of the voussoir arch,» *Journal of the Institution of Civil Engineers* 10 (1938): 383–404.

25. J. Heyman, *Beams and framed structures* (Londres: Pergamon Press, 1964).
26. A. F. Frézier, *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des batimens civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture* (Estrasburgo: J. D. Doulsekker. París: L. H. Guerin, 1737–1739).
27. R. Willis, (traducido y editado por), *Wilars de Honnecourt, Facsimile of the sketch-book of, with commentaries by J. B. A. Lassus and J. Quicherat* (Londres: T. H. y J. Parker, 1859).
28. H. R. Hahnloser, *Villard de Honnecourt* (Viena: Anton Schroll, 1935).
29. E. Torroja, *Philosophy of structures* (University of California Press: 1958). [Traducción al inglés de *Razón y ser de los tipos estructurales* (Madrid: Instituto Eduardo Torroja, 1957)]
30. F. Mackenzie, *Observations on the construction of the roof of King's College chapel, Cambridge* (Londres: John Weale, 1840).
31. R. Willis, «On the construction of the vaults of the Middle Ages,» *Transactions of the Royal Institute of British Architects* 1 (1849): 1–69.
32. W. Flügge, *Stresses in shells* (Berlín: Springer, 1961).
33. G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario, 1748).
34. M. S. Gregory, «Philosophy of engineering design of structures,» *Proceedings of the American Society of Civil Engineers* 89 (1963): 119 y ss.
35. C. Siegel, *Structure and form in modern architecture* (Nueva York: Reinhold, 1962).
36. E. Goethals *Arcs, voûtes, coupoles*, 2 vols. (Bruselas: Éditions Art de Bâtir, 1947).
37. P. Bouteloup, «Les coupoles en maçonnerie non armée,» *Annales des Pontes et Chausées* 128 (1958): 429–503.
38. W. C. E. Becker, «Intersecting ribs carry concrete roof shell,» *Civil Engineering* 25 (1955): 430 y ss.
39. Sir Banister Fletcher, *A history of architecture on the comparative method*, 17ª ed. (Londres: University of London, 1961). [traducción al español por A. Calzada: *Historia de la arquitectura por el método comparado* (Barcelona: Canosa, 1928)]

Capítulo 2

1. W. Flügge, *Handbook of engineering mechanics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1962); *Stresses in shells* (Berlín: Springer, 1961).
2. P. Ahm y E. J. Perry, «Design of the dome shell roof for Smithfield poultry market,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 30 (1961): 79 y ss.
3. J. Heyman, «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79. [Capítulo 1]
4. J. Heyman, «On the rubber vaults of the Middle Ages and other matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177–88. [Capítulo 5]
5. J. F. Baker (Lord Baker), M. R. Horne y J. Heyman, *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behavior and design* (Cambridge: Univeristy Press, 1956).
6. J. Heyman, *Beams and framed structures* (Londres: Pergamon Press, 1964).
7. C. A. Coulomb, «Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture,» *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Academie Royale de Sciencies par divers Savans, et lûs dans ses assemblées* 7 (1773): 343–82.
8. G. A. Breymann, *Bau-Constructions-Lehre. Vol 1: Constructionen in Stein* (Stuttgart: Hoffmann, 1849).
9. W. B. Parsons, *Engineers and engineering in the Renaissance* (Baltimore: Williams and Wilkins, 1939).
10. G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario, 1748).
11. C. Siegel, *Structure and form in modern architecture* (Nueva York: Reinhold, 1962).
12. R. J. Mainstone, «The structure of the church of St Sophia, Istanbul,» *Transactions of the Newcomen Society* 38 (1965–66): 23–49.
13. A. Choisy, *L'art de bâtir chez les byzantines* (Paris: Librairie de la Societé Anonyme de Publications Périodiques, 1883).
14. A. Choisy, *Histoire de l'architecture,* 2 vols. (París: Librairie Georges Baranger, 1899). [Traducción española de S. Gallo: *Historia de la arquitectura* 9ª ed. (Buenos Aires: Víctor Leru, 1980)]
15. W. Emerson y R. L. Van Nice, «Hagia Sophia: the collapse of the first dome,» *Archaeology* 4 (1951): 94–103; «Hagia Sophia: the construction of the second dome and its later repairs,» *Archaeology* 4 (1951): 162–71.
16. R. L. Van Nice, «The structure of St. Sophia,» *Architectural Forum* 118 (1963): 131–39; «St. Sophia's structure: a new assessment of the half domes,» *Architectural Forum* 121 (1964): 45–49.

Capítulo 3

1. J. Heyman, «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79. [Capítulo 1]
2. J. Heyman, «On the rubber vaults of the Middle Ages and other matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177–88. [Capítulo 5]
3. J. Heyman, «On shell solutions of masonry domes,» *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967): 227–41. [Capítulo 2]
4. J. F. Baker (Lord Baker), M. R. Horne y J. Heyman, *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behavior and design* (Cambridge: Univeristy Press, 1956).
5. J. Heyman, *Beams and framed structures* (Londres: Pergamon Press, 1964).
6. Sir Banister Fletcher, *A history of architecture on the comparative method*, 17ª (Londres: University of London, 1961). [Traducción al español por A. Calzada: *Historia de la arquitectura por el método comparado* (Barcelona: Canosa, 1928)]
7. W. Flügge, *Stresses in shells* (Berlín: Springer, 1961).

8. F. Bond, *Gothic architecture in England* (Londres: Bastford, 1906).
9. M. S. Anderson, J. C. Robinson, H. G. Bush y R. W. Fralich, «A tension shell structure for application to entry vehicles,» *National Aeronautics and Space Administration Technical Note NASA TN D-2675* (Washington D.C.: 1965).
10. E. Jahnke y F. Emde, *Tables of functions,* 4ª ed. (Nueva York: Dover Publ., 1945).
11. F. Mackenzie, *Observations on the construction of the roof of King's College chapel* (Cambridge: John Weale, 1840).
12. F. E. Howard, «Fan vaults,» *Archeological Journal* 68 (1911): 1–42.
13. J. Fitchen, *The construction of gothic cathedrals* (Oxford: Clarendon Press, 1961).

Capítulo 4

1. *Royal Commission on Historical Monuments* (England). *London, vol.II: West London* (Londres: H.M.S.O., 1925).
2. J. H. Harvey, *Henry Yevele, c. 1320 to 1400, the life of an english architect* (Londres: Batsford, 1944).
3. J. Harvey *Gothic England, a survey of national culture 1300-1550* (Londres: Batsford, 1947).
4. F. Baines, *Westminster Hall: report to the first commissioner of H.M.Works, etc., on the condition of the roof timbers of Westminster Hall, with suggestions for maintaining the stability of the roof* (Londres: H.M.S.O., 1914). (Cd. 7436.)
5. A. J. S. Pippard, *Strain-energy methods of stress analysis* (Londres: Longmans, Green & Co., 1928).
6. A. J. S. Pippard y W. H. Glanville, *Primary stresses in timber roofs, with special reference to curved bracing members. (Building Research Technical Paper No.2)* (Londres: H.M.S.O., 1926).
7. W. Harvey, *Models of buildings: how to make and use them* (Londres: The Architectural Press, 1927).
8. E. E. Viollet-le-Duc, *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI^e au XVI^e Siècle*, 10 vols., (París: A. Morel, 1858-68). Vol. 3: Charpente.
9. N. Pevsner, *The buildings of England; Suffolk* (Harmondsworth: Penguin Books, 1961).
10. F. E. Howard and F. H. Crossley, *English church woodwork: a study in craftsmanship during the mediaeval period A.D. 1250-1550,* 2ª ed. (Londres: Batsford, 1927).
11. H. Munro Cautley, *Suffolk churches and their treasures* (Londres: Batsford, 1937).
12. F. H. Crossley, *Timber building in England from early times to the end of the seventeenth century* (Londres: Batsford, 1951).
13. W. Harvey, «Westminster Hall roof and the woodman,» *The Builder* 121 (1921, 19 Aug.): 220–221.
14. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretations through eight centuries* (Princeton: University Press, 1960).
15. J. Heyman, «On the rubber vaults of the Middle Ages and other matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177–88. [Capítulo 5]
16. R. Willis, (traducido y editado por), *Wilars de Honnecourt, Facsimile of the sketch-book of, with commentaries by J. B. A. Lassus and J. Quicherat* (Londres: T. H. y J. Parker, 1859).
17. H. R. Hahnlöser, *Villard de Honnecourt* (Viena: Anton Schroll, 1935).
18. J. Heyman, «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249-79. [Capítulo 1]
19. J. Heyman, «On shell solutions of masonry domes,» *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967): 227–41. [Capítulo 2]
20. J. Heyman, «Spires and fan vaults,» *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967): 243-258. [Capítulo 3]
21. J. Heyman, «Beauvais Cathedral,» *Transactions of the Newcomen Society* 40 (1967/68): 15–35. [Capítulo 7]
22. R. Brandon y J. A. Brandon, *The open timber roofs of the Middle Ages* (Londres: W. Kent & Co.,1860).
23. Steel Structures Research Committee, *First report* (1931); *Second Report* (1934); *Final Report* (1936). (Londres: H.M.S.O).
24. J. F. Baker (Lord Baker), M. R. Horne y J. Heyman, *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behavior and design* (Cambridge: University Press, 1956).

AGRADECIMIENTOS: Agradecemos el permiso para reproducir las fotografías: *Country Life* (figura 4.1); The Courtauld Inst. of Art (figs. 4.5 y 4.7); E. Smith & the Gordon Fraser Gallery Ltd (fig. 4.6); N. Adlard and Co. Ltd (figura 4.16).

Capítulo 5

1. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretations through eight centuries* (Princeton: University Press, 1960).
2. Frankl, op. cit., p. *v*.
3. J. Fitchen, *The construction of gothic cathedrals* (Oxford: Clarendon Press, 1961).
4. J. Heyman, «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79. [Capítulo 1]
5. Frankl, a pesar de su aparente objetividad, estaba muy influenciado por la obra de Pol Abraham, *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval* (París: Vicent, Fréal et Cie, 1934). Abraham expone algunos análisis estructurales correctos (y otros incorrectos), pero el conjunto de su extenso ensayo está distorsionado por el empeño en demostrar la paradoja de que, las dos *esencias* del gótico, la bóveda nervada y el arbotante, el nervio no soporta la bóveda ni el arbotante los empujes. En el debate sobre la mecánica de las bóvedas, Frankl afirma (op. cit., p. 812): «Verdaderamente es interesante, pero sería mejor que esperásemos hasta que los físicos se pongan de acuerdo». Aquí, el uso del término «físicos» (¿Einstein?) es revelador; Frankl debería haber escrito (y debía estar pensando en) la palabra «ingenieros». Una vez más, hay cierta arrogancia en la afirmación (Frankl, op. cit., p. 818): «Sigue siendo una deber ineludible del constructor, el técnico, el arquitecto, como *ingeniere*, saber mecánica estructural para que su obra no se hunda; pero el historiador del arte, que quiere entender

al arquitecto como artista, vuelve a la formulación de Fiedler: el arte existe para la vista».
6. Frankl, op. cit., p. 569.
7. La cita interna es de Viollet-le-Duc, «De la construction des édifices religieux en France,» *Annales archéologiques* (1845), p. 339. «...qui par leur poids, donnent aux contre-forts toute la fixeté nécessaire pour maintenir la poussée des arcs-boutants».
8. Véase por ejemplo, A. Yvon Villarceau, «L'etablissement des arches de pont,» *Institut de France, Académie des Sciences, Mémoires présentés par divers savants* 12 (1854): 503 y ss. Yvon Villarceau recomendaba un factor de seguridad de 10 para la altura de la columna; es decir la tensión nominal en una estructura de fábrica se debería limitar a un décimo de la resistencia de rotura a compresión de la piedra.
9. Las resistencias a rotura se pueden encontrar en manuales estándar; para la arenisca, G. G. Ungewitter da una serie de valores entre 15 y 90 N/mm^2 en, *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen*, 2 vols. (Leipzig: Tauchnitz, 1901).
10. Heyman, op. cit.
11. C. A. Coulomb, «Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture,» *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Academie Royale de Sciencies par divers Savans, et lûs dans ses assemblées* 7 (1773): 343–82. La rotación de un pilar alrededor de su base la consideró Viollet-le-Duc, utilizando palabras como «*articulation*» y «*base-rotule*».
12. La descripción del desarrollo de la teoría plástica para las estructuras de acero la proporcionan J. F. Baker (Lord Baker), M. R. Horne y J. Heyman, *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behavior and design* (Cambridge: University Press, 1956), véase también J. Heyman, *Beams and framed structures* (Oxford: Pergamon Press, 1964). Aquí, la utilización de la palabra «plástico» significa lo opuesto a elástico, entendiendo elástico en el sentido habitual de capacidad para recuperar una forma original después de la deformación. Así, un material plástico tiene la capacidad de la deformación permanente. Pol Abraham op. cit, p. 17 y ss., discute el significado de las dos palabras elástico/plástico.
13. H. Moseley, *The mechanical principles of engineering and architecture*, (Londres: Longman, Brown, Green and Longmans, 1843).
14. *Ibíd.*, artículos 302, 303, p. 422.
15. J. V. Poncelet, *Mécanique industrielle* (Lieja, 1839).
16. Moseley, op. cit., p. 458 n.
17. En S. P. Timoshenko, *History of strength of materials* (Nueva York: McGraw-Hill, 1953) y H. Straub, *A history of civil ingineering* (Londres: Leonard Hill, 1952), traducción de *Die Geschichte der Bauingenieurkunst* (Basel: Birkhäuser, 1949), se puede encontrar información biográfica y una exposición de la historia del análisis estructural.
18. Moseley, op. cit., p. *xiv*.
19. Frankl, op. cit., p. 807. Véase Abraham, op. cit., p. 88n.
20. Abraham, op. cit., p. 90. «Quand son poids atteint le centième de la charge totale, c'est qu'il est déjà un beau pinacle».
21. Moseley, op. cit., artículo 292, p. 411.
22. Deduciendo que la principal *raison d'être* de un pináculo se puede encontrar en la consideración de las condiciones locales más que en las del conjunto, quizá es significativo que Viollet-le-Duc utilizase la palabra *fixeté* en vez de *stabilité* que emplea sin reserva en otras partes (véase la nota 7 más arriba).
23. E. E. Viollet-le-Duc, *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI^e au XVI^e siècle*, 10 vols., (París: A. Morel, 1858-68). Artículo «Cathédrale» vol. 4, p. 318, Fig. 14.
24. J. Fitchen, «A comment on the function of the upper flying buttress in french gothic architecture,» *Gazette des Beaux-Arts* 45 (1955): 69–90.
25. Coulomb, op. cit., p. 380. «Le frottement est souvent assez considérable dans les matériaux que l'on emploie à la construction des voûtes, pour que les différents voussoirs ne puissent point glisser l'un contre l'autre».
26. A. F. Frézier, *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des batimens civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture* 3 vols. (Estrasburgo: J. D. Doulsekker. París: L. H. Guerin, 1737-1739).
27. J. Heyman, «The stone skeleton,» op.cit. La demostración de la estabilidad de un arco en estado de agrietamiento está en completo desacuerdo con la creencia de Pol Abraham de que estas grietas eran «signes avant-coureurs de la ruine de l'arc» (op. cit. p. 8). Aún más, Abraham esgrime el hecho de que haya grietas visibles en los arbotantes para «demostrar» que éstos no pueden transmitir empujes (op. cit. p. 84), sin embargo era consciente (p. 100 n) de que estas grietas aparecieron a menudo durante el descimbramiento original, se rellenaron con mortero, se enlucieron y luego se pintaron juntas falsas.
28. Véase por ejemplo, Baker, et. al., op. cit.
29. A. Choisy, *Histoire de l'architecture,* 2 vols. (París: Librairie Georges Baranger, 1899), vol. 2, p. 270: «... la voûte nervée est pour ainsi dire flexible et déformable: les points d'appui peuvent tasser, les piles se déverser, elle en suivra les mouvements». [Traducción española de S. Gallo: *Historia de la arquitectura* 9ª ed. (Buenos Aires: Víctor Leru, 1980)]
30. Frankl, op. cit., p. 577.
31. Los proyectistas, ingenieros o arquitectos, pueden emplear mucho tiempo y esfuerzo en depurar lo que se podrían llamar cálculos «imperfectos», cuando con los teoremas de la teoría plástica se puede demostrar que ciertas clases de cálculos sencillos proporcionan estimaciones seguras sobre el comportamiento real de la estructura.
32. A su vez, la cáscara bidimensional, a veces puede «dividirse», ventajosamente, en una serie de elementos independientes. Parece que esta técnica fue utilizada por primera vez por Poleni, con brillante éxito, en su análisis de la cúpula de San Pedro de Roma. Véase G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padova: Nella Stamperia del Seminario, 1748). La bola rodante que sigue la línea de máxima de pen-

diente, de Pol Abraham (op. cit., p. 18 y ss.) es una manera antropomórfica igualmente brillante, de definir las rodajas independientes de la bóveda.

33. El libro más útil sobre teoría de cáscaras con vistas al análisis de las estructuras góticas (*tout court* quizá el mejor libro sobre la teoría de cáscaras) es W. Flügge, *Stresses in shells* (Berlín: Springer, 1961). Flügge no trata el tema de las bóvedas góticas pero sus ecuaciones para el análisis de bóvedas de intersección se pueden adaptar fácilmente.
34. Por «orden» se entiende que los cálculos están sujetos a error dentro de un factor de aproximadamente 2, pero son correctos hasta un factor de 10. Por tanto, si un esfuerzo es del orden de 0,2 N/mm^2, el esfuerzo real, que puede variar de un punto a otro, será mucho mayor que 0,02 N/mm^2 y mucho menor que 2 N/mm^2.
35. Francis Bond, *Gothic architecture in England* (Londres: Bastford, 1906), p. 303.
36. J. Fitchen, *The construction of gothic...*, p. 91.
37. A. K. Porter, *The construction of lombard and gothic vaults* (Yale: University Press, 1911), p. 8.
38. Ibíd., p. 16.
39. Ibíd., p. 25.
40. Fitchen, op. cit., p. 105.
41. Ibíd., p. 111. Pol Abraham concluye por último (op. cit., p. 59 y ss.) que la función del nervio era geométrica, y permitía a los canteros que no sabían nada de estereotomía, definir primero las intersecciones de las plementerías y después tender éstas, en vez de al contrario: «...la nervure a été le moyen commode à la fois constructif et esthétique de la voûte à pénétrations généraliseés».
42. G. Kubler, «A late gothic computation of rib vault thrusts,» *Gazette des Beaux-Arts* 26 (1944): 135–48. Las tres primeras páginas de este artículo resumen las aportaciones reunidas en los años 1930 sobre la interpretación «racional» de Viollet-le-Duc de la estructura de la bóveda nervada. El título del artículo de Kubler puede inducir a error. El texto del siglo XVI (de Rodrigo Gil) que se estudia no calcula de hecho los empujes de los nervios, sino que proporciona una serie de reglas para determinar las dimensiones de los estribos que han de soportar la bóveda; el que se necesiten estribos para absorber el empuje de las bóvedas es una deducción moderna. Por otro lado, las reglas, que quizá funcionan empíricamente dentro de cierto orden limitado, parecen casi un sin sentido, ya que las respuestas requeridas, un conjunto de longitudes, se calculan hallando la raíz cuadrada de otro conjunto de longitudes, lo que es dimensionalmente absurdo.
43. M. Aubert, «Les plus anciennes croisées d'ogives; leur rôle dans la construction,» *Bulletin Monumental* 93 (1934): 5–67, 137–237.
44. Kubler, op. cit., p. 136.
45. Heyman, op. cit.
46. Estas conclusiones sobre la mecánica de las bóvedas nervadas cuatripartitas sólo difieren en un extremo importante de las de Pol Abraham. Éste también llega a la conclusión de que los arcos formeros y perpiaños no son portantes, y que los arcos cruceros soportan la bóveda. Abraham insiste, sin embargo (op. cit., p. 29) en que los nervios cruceros son apéndices no portantes, y que la fuerza principal se transmite dentro de la propia cáscara: «Il faut bien insister sur ce fait qui, dans la réalité, tout se passe nécessairement dans l'épaisseur des maçonneries et que, par suite, il se constitue spontanément de culée a culée un arc diagonal incorporé».
47. K. J. Conant, «Observations on the vaulting problems of the period 1088-1211,» *Gazette des Beaux-Arts* 26 (1944): 127–34.
48. En Notre-Dame hay una cierta curvatura hacia abajo de los plementos de la bóveda en los arcos transversales principales, de modo que éstos, de hecho, soportarán una pequeña proporción del peso total de la bóveda.
49. Rosenberg también cita este factor de 3. Véase G. Rosenberg, «The functional aspect of the gothic style,» *Journal of the Royal Institute of British Architects* 43 (1936): 273–90, 364–71.
50. Conant, op. cit., p. 132.
51. Straub, op. cit., p. 60 y ss.
52. Stevin definió correctamente estos conceptos, pero los arquitectos del siglo XX todavía tienen problemas con las fuerzas. Bond, por ejemplo, en su exposición sobre la acción de los pináculos (op. cit., p. 363) confunde las fuerzas verticales y horizontales y Pol Abraham (op. cit., p. 10) se siente obligado a hacer una pequeña digresión para explicar la diferencia entre fuerzas verticales, horizontales e inclinadas.
53. Frankl (op. cit.) hace varias referencias a la construcción de modelos. Para más detalles sobre el modelo de S. Petronio, Bolonia, 1390, véase p. ej. la p. 299.

Capítulo 6

1. E. de Maré, *The bridges of Britain* (Londres: Batsford, 1954).
2. S. Smiles, *Lives of the engineers,* ed. rev. vol. 2: *Harbours-lighthouses-bridges; Smeaton and Rennie* (Londres: Murray, 1874).
3. H. Shirley Smith, *The world's great bridges* (Londres: Phoenix House, 1953).
4. P. C. Lesage, *Recueil de divers mémoires extraits de la Bibliothèque Impèriale des Ponts et Chaussées à l'usage de MM. les ingénieurs* 2 vols. (París: Chez Firmin Didot, 1810).
5. A. A. H. Danyzy, «Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes,» *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2 (1732): 40 y ss. (Lyon, 1778).
6. A. F. Frézier, *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des batimens civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture* 3 vols. (Estrasburgo: J. D. Doulsekker, 1737-1739).
7. P. de La Hire, *Traité de méchanique, ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des Arts, et les proprietés des corps pesants lesquelles ont eu plus grand usage dans la Physique* (París: Imprimirie Royal, 1695).
8. P. de La Hire, «Sur la construction des voûtes dans les édifices,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1712): 69–78.

9. A. Parent, *Essais et recherches de mathematique et de physique*, 3 vols. (París: Nully, 1713).
10. B. F. de Bélidor, *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile* (París: Charles-Antoine Jombert, 1729).
11. P. Couplet, «De la poussée des voûtes,» *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris* (1729): 79-117; «Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris* (1730): 117–141.
12. C. A. Coulomb, «Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture,» *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Academie Royale de Sciencies par divers Savans, et lûs dans ses assemblées* 7 (1773): 343–82.
13. C. Bossut, «Recherches sur l'équilibre des voûtes,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1774): 534–566, (París,1778).
14. C. Bossut, «Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1776): 587–596, (París, 1779).
15. E. M. Gauthey, *Traité de la construction des ponts,* editada por C. L. M. H. Navier, 3ª ed., 2 vols. (Lieja: A. Leroux, 1843).
16. M. G. Lamé y E. Clapeyron, «Mémoire sur la stabilité des voûtes,» *Annales des Mines* 8 (1823): 789–836.
17. T. Le Seur, F. Jacquier y R. G. Boscovich, *Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S.Pietro* (Roma, 1743).
18. G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario, 1748).
19. D. Gregory, «Catenaria,» *Philosophical Transactions* 231 (1697): 637 y ss.
20. A. Yvon Villarceau, «L'établissement des arches de pont,» *Institut de France, Académie des Sciences, Mémoires présentés par divers savants* 12 (1854): 503 y ss.
21. H. Straub, *A history of civil engineering* (Londres: Leonard Hill, 1952).
22. S. P. Timoshenko, *History of stregnth of materials* (Nueva York: Dover, 1983); reimpr. de (Nueva York: Mc Graw-Hill: 1953).
23. H. C. F. Jenkin, «Bridges,» *Encyclopaedia Britannica,* 9ª. ed. (Edinbourgh: Adam and Charles Black, 1875-1888) Vol. 2: 284–341.
24. J. A. Ewing, *The strength of materials* (Cambridge: University Press, 1899).
25. A. J. S. Pippard, E. Tranter y L. Chitty, «The mechanics of the voussoir arch,» *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4 (1936): 281–306.
26. A. J. S. Pippard y R. J. Ashby, «An experimental study of the voussoir arch,» *Journal of the Institution of Civil Engineers* 10 (1938): 383–404.
27. A. Kooharian, «Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches,» *Proceedings of the American Concrete Institute* 49 (1953): 317–28.
28. W. Prager, *An introduction to plasticity* (Reading Mass.: Addison Wesley, 1959).
29. J. Heyman, «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79. [Capítulo 1]
30. J. Heyman, «On the rubber vaults of the Middle Ages and other matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177–88. [Capítulo 5]
31. J. F. Baker (Lord Baker), M. R. Horne y J. Heyman, *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behavior and design* (Cambridge: University Press, 1956).
32. C. Inglis, *Applied mechanics for engineers* (Cambridge: University Press, 1951).
33. J. W. Baxter, A. F. Gee y H. B. James, «Gladesville bridge,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 30 (1965): 489–530.
34. *Vetusta Monumenta*, vol. 3 (Londres: Society of Antiquaries, 1796).
35. W. A. Nicholson, *Transactions of the Royal Institute of British Architects,* vol. I, part II (Londres: 1842), pp. 180 y ss.
36. J. B. Papworth, *Transactions of the Royal Institute of British Architects,* vol. I, Part II (Londres: 1842), pp. 184 y ss.
37. J. Gwilt, *An encyclopaedia of architecture: historical, theoretical and practical.* (Londres: Longman, Brown, Green and Longmans, 1842).
38. E. G. Warland, *Constructional masonry* (Londres: Pitman, 1946).
39. A. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* (Turin: Auguste Frédéric Negro, 1879).
40. G. G. Ungewitter, G. C. *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen,* 2 vols. (Leipzig: Tauchnitz, 1901).
41. C. S. Chettoe y W. Henderson, «Masonry arch bridges: a study,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 7 (1957): 723–62.

Capítulo 7

1. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretations through eight centuries* (Princenton: University Press, 1960). Frankl deja muy claro el significado de las expresiones *ad quadratum* y *ad triangulum*, ilustrando en todo su alcance la controversia de Milán. Para una exposición más completa, ver J. S. Ackerman, «'Ars sine scientia nihil est'. Gothic theory of architecture at the cathedral of Milan,» *Art Bulletin* 3 (1949): 84–111.
2. Por ejemplo, «...archi spiguti non dant impulzam contrafortibus.» La réplica italiana es un buen ejemplo de una defensa legal tripartita. A la crítica de Mignot de que los estribos no eran suficientemente resistentes, la respuesta fue: En primer lugar, son suficientemente resistentes. En segundo lugar, sin prejuzgar lo primero, en el caso de que realmente no fuesen suficientemente resistentes, este hecho sería de todo punto irrelevante, porque los arcos apuntados no empujan. Tercero, y sin igualmente prejuzgar las dos anteriores respuestas, si los arcos apuntados empujasen, los tirantes de hierro colocados entre los arcos absorberían el empuje. (Estos tirantes se pueden ver hoy en día, contribuyendo a la impresión general de opresión que el Duomo produce.)
3. Probablemente no es casual que la famosa frase de Mig-

not casi sea una paráfrasis exacta de la segunda frase del Capítulo 1, Libro 1 de Vitruvio: «ea (los conocimientos del arquitecto), nascitur ex fabrica et ratiocinatione»; cf. Frankl, 89 y ss.

4. El desarrollo de una de estas «normas de edificación» puede verse en el manuscrito de Villard, ca. 1235; véase H. R. Hahnloser, *Villard de Honnecourt* (Viena: Anton Schroll, 1935). Por supuesto no todas las estructuras góticas tienen arbotantes. La Sainte Chapelle de París no los tiene, lo mismo que la capilla del King's College. Es más, esta última ni tan siquiera tiene una bóveda nervada, si bien es innegablemente gótica: una bóveda de piedra que empuja hacia abajo y hacia afuera, y que necesita grandes contrafuertes en el exterior.
5. J. Heyman establece una discusión sobre estabilidad en la construcción de fábricas y en particular una justificación del uso de modelos, en: «On the rubber vaults of the Middle Ages and other matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177–88 [Capítulo 5]. En un artículo anterior, J. Heyman, «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79 [Capítulo 1], establece que la teoría del análisis límite originariamente desarrollada para estructuras de pórticos de acero, (ver p. ej. J. F. Baker (Lord Baker), M. R. Horne y J. Heyman, *The steel skeleton. Vol. 2: Plastic behavior and design* (Cambridge: University Press, 1956) ó J. Heyman, *Beams and framed structures* (Oxford: Pergamon Press: 1964), puede adaptarse al análisis de las fábricas. El trabajo se extiende a otros elementos en: J. Heyman, «On shell solutions of masonry domes,» *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967): 227–41 y en J. Heyman, «Spires and fan vaults,» Ibíd. 3 (1967): 243–258. [Capítulos 2 y 3]
6. Ackerman, op. cit.
7. Ciertamente, un arbotante bien proyectado puede resistir una enorme gama de empujes, por ejemplo entre 3 t y 1.000 t en Lichfield (véase J. Heyman, «The stone skeleton,» op. cit.).
8. J. Harvey, «Mediaeval design,» *Transactions of the Ancient Monuments Society, New Series* 6 (1958), 55–72. Ver también J. Harvey, *The gothic world*, (Londres, 1950). Frankl, op. cit., explica el funcionamiento y organización de las logias (por supuesto diferente en cada lugar) y traza los grados por los que un muchacho debía pasar desde aprendiz, oficial y capataz, hasta adquirir lo que podríamos denominar su titulación: el grado de maestro. Muy pocos destacados podían después volver a continuar sus estudios en el cuarto de trazas, alcanzando finalmente el rango de arquitecto; así, todo arquitecto había ejercido antes de maestro. Esta concepción difiere radicalmente de la práctica moderna, basada en el concepto renacentista del arquitecto «caballero», es más, podríamos considerar al ingeniero del s. XX un hombre del gótico, mientras que el arquitecto sería un hombre del Renacimiento.
9. G. Desjardins, *Histoire de la Cathédrale de Beauvais*, (Beauvais: V. Pineau, 1865), pp. 8 y ss.: «Le vendredi 29 Novembre 1284, veille de la Saint-Andrè, a l'heure de couvre-feu, les voûtes trop écartées s'affaissèrent, brisant tout au dessous d'elles.» Desjardins da como autoridad para esta afirmación a P. Luovet, *Histoire et antiquitez du diocèse de Beauvais,* 2 vols. (Beauvais: Vve. Valet, 1635): vol. 2, 474 y ss. L. Pihan, *Beauvais* (Beauvais: H. Trézel, 1885), p. 10, extiende su explicación: «L'écartement trop considérable et l'élévation extraordinaire des piliers déterminèrent la chute d'une partie de la grande voûte le 29 Novembre 1284, a l'heure de couvre-feu». V. Leblond, *La Cathédrale de Beauvais,* (Beauvais: H. Laurens, 1926), p. 15, dice «...en 1284, quelques contreforts extérieurs se rompent, une portion des grandes voûtes tombe...Cette catastrophe était due á l'écartement excessif des piles...».
10. Desjardins, op. cit. p. 93 señala: «...les dicts pilliers sont masonnez de cartiers par les dedans des corps d'iceux, il n'en peult venir faulte si promptement».
11. Surgieron diversas leyendas sobre este espectacular hundimiento. Por ejemplo, nadie se atrevía a llevar a cabo la peligrosa tarea de desescombrar la parte derruida del edificio. Finalmente, cuatro meses más tarde, se le ofreció a un criminal condenado a muerte salvar su vida a cambio de demoler las restantes ruinas. Justo acababa de comenzar el trabajo cuando resbaló y cayó, pero acertó a agarrarse a una cuerda que colgaba de las vigas del techo salvándose. «La corde qui devait être le supplice de cet misérable fut son salut.» (Desjardins, op. cit. p. 99)
12. Desjardins, op. cit. p. 110.
13. R. Branner, «Le maître de la Cathédrale de Beauvais,» *Art de France* 2 (1962): 77–92.
14. E. E. Viollet-le-Duc, en su *Dictionaire raisonnée de l'architecture Française du XI^e au XVI^e siècle* (París: A. Morel, 1858-68), vol. 7, p. 551 y ss. (artículo «Proportion»), hace el siguiente comentario sobre la anchura de los tramos; para reducir el empuje lateral en los pilares del crucero se redujo la anchura del tramo adyacente. «L'architecte...sent que les grandes archivoltes ...vont exercer une poussée active sur la première pile...du choeur, qui n'est plus etrésillonée à la hateur de ces archivoltes. D'abord il augmente la section de cette pile, puis il diminue l'écartement de la première travée...»
15. L. Benouville, «Étude sur la cathédrale de Beauvais,» *Encyclopédie d'Architecture*, serie 4ª, vol. 4 (París: 1891-2): 52–54, 60–62, 68–70. «...nous en conclurons que, lorsqu'on a achevé Beauvais, le chantier n'était pas dirigé par celui qui l'avait commencé. Les plans existaient; un nouveau maître d'oeuvre ne fut pas appelé, ce fut un sousordre qui fut chargé de terminer les travaux.»
16. Ibíd., «A la fin du treizième siècle on éleva imprudemment sur la croisée du transept, et avant d'avoir monté la nef, le clocher central».
17. Ver nota 5 más arriba.
18. Viollet-le-Duc, op. cit., vol.2, p. 334, Fig. 22 (artículo «Cathédrale»).
19. E. Corroyer, *L'architecture gothique* (París: Librairies-imprimeries réunies, 1891), p. 73.
20. Benouville, op. cit. «(nous-mêmes avons été surpris de ce resultat) sait-on à combien travaille la pierre la plus chargée de l'édifice? *A treize kilogrammes* par centimètre carré.»
21. G. G. Ungewitter, *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen,* 2 vols. (Leipzig: Tauchnitz, 1901), p. 142.

22. G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario, 1748).
23. A. Yvon Villarceau, «L'établissement des arches de pont,» *Institut de France, Académie des Sciences, Mémoires présentés par divers savants* 12 (1854): 503 y ss. El método inverso de proyecto de arcos de fábrica de Yvon Villarceau consiste en la adopción de una línea de empujes para la cual se proyecta la totalidad de la estructura; Yvon Villarceau afirma con bastante claridad que la teoría elástica, si bien conduce a soluciones «correctas,» no es la herramienta adecuada para el proyecto de arcos de fábrica. Para una discusión más en profundidad sobre este tema y sobre la cúpula de San Pedro de Roma, ver J. Heyman, «The Stone skeleton,» op. cit.
24. Ungewitter, op. cit., p. 406: «Es soll zunächst berechnet werden, wie groß der Gegenschub des in 18 m. Höhe anfallenden Strebebogens sein muß unter der *Voraussetzung*, daß der Druck unten durch den Mittelpunkt der Grundfläche des Mittelpfeilers geht».
25. Viollet-le-Duc, op. cit., vol. 1, p. 72, Fig. 62 (artículo «Arc-boutant»).
26. En «The stone skeleton,» op. cit., se da el probable modo de pandeo para el arbotante de Amiens.
27. Viollet-le-Duc, op. cit., vol. 2, p. 318, Fig. 14 (artículo «Cathédrale»).
28. J. Fitchen, «A comment on the function of the upper flying buttress in french gothic architecture,» *Gazette des Beaux-Arts* 45 (1955): 69–90.
29. Viollet-le-Duc, op. cit., vol.1, p. 68, Fig. 59 (artículo «Arc-boutant»).
30. Viollet-le-Duc, op. cit., vol. 2, p. 289, Fig. 2 (artículo «Cathédrale»).
31. Ibíd. p. 288 y ss.
32. Ungewitter, op. cit., p. 139, Tabelle 1. Class IVc da un peso unitario de 530 kg/m^2, de donde el peso de la mitad del tramo será (0,5 $\times$ 530 $\times$ 135) = 35.800 kg.
33. Para el cálculo de esta línea véase J. Heyman «The stone skeleton,» op. cit.
34. Sin embargo, en el ábside no se produciría perturbación alguna pues el arbotante no empuja contra una superficie plana, ya que la curvatura de la planta permite una «triangulación» de las fuerzas.
35. En «The stone skeleton,» op. cit., se da un empuje de entre 12 y 15 toneladas.
36. Fitchen, op. cit.
37. Viollet-le-Duc, op. cit., vol. 4, p. 178, Fig. 101 (artículo «Construction»).
38. Ibíd., p. 181, Fig. 101.
39. Ibíd., p.180 y ss.: «Il est certain cependant que cet énorme édifice aurait conservé une parfait stabilité, si l'architecte eût posé les colonnettes jumelles au-dessus du triforium plus fortes et plus résistantes, s'il eût pu les faire des fonte, par exemple. Les désordres qui se sont manifestés dans la construction sont venus tous de là; cet colonnettes trop grêles, se sont brisées, car elles ne pouvaient résister à la charge qui se reporta sur elles lorsque les piles intérieures vinrent à tasser par suite de la dessiccation des mortiers. Se brisant, les linteaux L cassèrent (fig. 101); les gros blocs M, en bascule, s'appuyèrent trop fortement sur la tête du premiére arc-boutant, celui ci se déforma, et la voûte suivant le mouvement, la pression sur ces arc-boutants supérieurs fut telle qu'ils se chantournèrent presque tous; leur action devint nulle, par suite les arc-boutants superieurs lâchèrent un peu, puisque la voûte ne pressait plus sur eux. L'équilibre était rompu.»
40. Desjardins, op. cit. p. 92 y ss.
41. Leblond, op. cit. p. 30.
42. Un problema similar apareció en Gales a principios del siglo XIV. El proyectista William Joy arriostró con éxito los pilares del crucero con los famosos «arcos cruzados».

Capítulo 8

1. J. Ruskin, *Lectures on architecture and painting delivered at Edinburgh in november 1853* (Londres: G. Routledge, 1907), p. 11.
2. H. Focillon, *The art of the West*, 2 vols. (Londres: Phaidon Press, 1963), vol.1 , p. 67.
3. Sir Banister Fletcher, *A history of architecture on the comparative method*, 17ª (Londres: University of London, 1961), p. 93. [Traducción al español por A. Calzada: *Historia de la arquitectura por el método comparado* (Barcelona: Canosa, 1928)]
4. E. E. Viollet-le-Duc, *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIº au XVIº siècle*, 10 vols. (París: A. Morel, 1858-1868), vol. 7, p. 207.
5. W. B. Dinsmoor, «Structural iron in greek architecture,» *American Journal of Archeology* (*2º ser.*) 26 (1922): 148–58.
6. R. A. Jewett, «Structural antecedents of the I-beam, 1800-1850,» *Technology and Culture*, 8 (1967): 346. Para el debate de H. Dorn véase *Technology and Culture*, 9, (1968): 415, con una respuesta de Jewett, p. 419, y contrarréplica de Dorn, p. 427.
7. Pol Abraham, *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval* (París: Vicent, Fréal et Cie, 1934), p. 8.
8. J. Heyman, «On the rubber vaults of the Middle Ages, and other matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177–88. [Capítulo 5]
9. J. Heyman «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79; J. Heyman, «On the Rubber Vaults,» p. 177; y J. Heyman, «The safety of masonry arches,» *International Journal of Mechanical Sciences* 11 (1969): 363–85. [Capítulos 1, 5 y 6]
10. A. Choisy, *Histoire de l'architecture*, 2 vols. (París: Librairie Georges Baranger, 1899): vol. 2, p. 259. [Traducción española de S. Gallo: *Historia de la arquitectura* 9ª ed. (Buenos Aires: Víctor Leru, 1980)]
11. J. Guadet, *Eléments et théorie de l'architecture*, 4 vols, 4ª ed., (París: Librairie de la construction moderne, s.a.): vol.3, p. 323.
12. J. Heyman, «Spires and fan vaults,» *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967): 243–258. [Capítulo 3]
13. Ruskin, *Lectures*, p. 17.

Capítulo 9

1. C. A. P. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* (Turín: Auguste Frédéric Negro, 1879). Edición en inglés: *Elastic stresses in structures*, traducido por E.S. Andrews Scott (Londres: Greenwood and Son, 1919). Reeditado con una introducción de G. A. E. Oravas. *The theory of equilibrium of elastic systems and its applications* (Nueva York: Dover, 1966).
2. J. Heyman, «The safety of masonry arches,» *International Journal of Mechanical Sciences* 11 (1969): 363–85. [Capítulo 6]
3. J. Heyman, *Coulomb's memoir on statics: an essay in the history of civil engineering* (Cambridge: University Press, 1972).
4. J. Heyman, *Plastic design of frames. Volume 2, Applications* (Cambridge: University Press, 1971).
5. C. A. Coulomb, «Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture,» *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Academie Royale de Sciencies par divers Savans, et lûs dans ses assemblées* 7 (1773): 343–82.
6. R. Willis y J. W. Clark, *The architectural history of the university of Cambridge and of the colleges of Cambridge and Eton*, 4 vols. (Cambridge: University Press, 1886).
7. D. Knoop y G. P. Jones, *The mediaeval mason*, 3ª ed. (Manchester: University Press, 1967).
8. Royal Commission on Historical Monuments, *City of Cambridge* (Londres: H. M. S. O., 1959).
9. J. Heyman y B. D. Threlfall, «Two masonry bridges: II. Telford's bridge at Over,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 305–30. [Capítulo 10]
10. Architectural Press, *Specification 1970* (Londres: The Architectural Press, 1970).
11. E. G. Warland, *Constructional masonry* (Londres: University Press, 1946).
12. Ministry of Transport, *The assesment of highway bridges for construction and use vehicles*. Technical Memorandum (Bridges) BE-4, (Ministry of Transport, Jan. 1967).
13. H. M. Colvin, *A biographical dictionary of english architects 1660-1840* (Londres: University Press, 1954).

AGRADECIMIENTOS: Los autores desean agradecer al Director y Miembros del Clare College por permitir el acceso al puente, y en particular al Tesorero, Mr B. Cooper, por ceder tan liberalmente su tiempo y conocimientos, y por permitir el acceso a sus archivos. El Dr P. G. Lowe del Departamento de Ingeniería y Miembro del Clare College prestó gran ayuda. Mr A. K. Lusher, maestro cantero a cargo de la restauración, fue una fuente incomparable de conocimientos. Finalmente, Mr B. D. Threlfall realizó el trabajo de archivo, comprobó los cálculos y dibujó algunas de las líneas de empuje.

Capítulo 10

1. P. Sejourné, *Grandes voûtes*, 6 vols. (Bourges: Imprimerie Vve. Tardy-Pigelet et Fils, 1913-16).
2. Thomas Telford, *Life of Thomas Telford*, ed. J. Rickman, 2 vols. (texto y atlas) (Londres: Payne and Foss 1838).
3. J. R. Perronet, *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d'Orleans, etc.*, 2 vols. (texto y atlas) (París: 1782, 1783).
4. E. G. Warland, *Constructional masonry* (Londres: Pitman, 1946).
5. Architectural Press, *Specification 1970* (Londres: The Architectural Press, 1970).
6. B. Baker, «Discussion on the Hooghly Jubilee bridge». *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 92 (1888): 116 y ss.
7. R. Phillips, *Gloucester. Over bridge: a monograph* (Gloucester: 1908).
8. J. Heyman, *Coulomb's memoir on statics: an essay in the history of civil engineering* (Cambridge: University Press, 1972).

AGRADECIMIENTOS: El Sr Bernard M. Feilden, OBE, FRIBA, FSA, miembro del Ancient Monument Board, hizo que una gran cantidad de información fuera accesible a los autores. Gran parte de esta información se suministró libremente por miembros del Departamento de Informes del Distrito, Consejo del Distrito de Gloucestershire; el archivista del Distrito fue también de gran ayuda. Los autores lo agradecen enormemente a todos ellos.

Capítulo 11

1. Toda la fábrica visible de la torre, tanto interior como exterior, con excepción de las zonas remozadas, es de caliza de Barnack. La arenisca que se encontró en el núcleo era presumiblemente de canteras locales; toda la catedral tiene debajo un afloramiento de arenisca.
2. D. J. Stewart, *On the architectural history of Ely Cathedral* (Londres, 1868).
3. J. Bentham, *The history and antiquities of the conventual and cathedral church of Ely, from the foundation of the Monastery, A.D. 673, to the year 1771* (Cambridge: University Press, 1771; 2ª edición, 1812.)
4. G. Millers, *A description of the cathedral church of Ely* (Londres: J. White, 1808).
5. J. Heyman, *Plastic design of frames: vol 2, Applications* (Cambridge: University Press, 1971).
6. J. Heyman «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79. [Capítulo 1]
7. Rowe R. Reynolds, «The octagon and lantern of Ely Cathedral,» *RIBA Transactions. 1st Series Sessional Papers, Royal Institute of British Architects* 26 (1875-76): 69 y ss.
8. La historia de estas armaduras no se ha investigado completamente y constituiría un estudio interesante de la historia de la arquitectura. El anillo superior se debe probablemente a Scott, y el tercero a Essex; las demás armaduras deben ser anteriores.

AGRADECIMIENTOS: No se puede destacar lo suficiente que el éxito logrado en la restauración se ha debido a la íntima colaboración entre el inspector, el ingeniero, el contratista y las subcontratas especializadas. En las fases más activas de las obras se mantenían, en el emplazamiento de las mismas,

reuniones semanales de todas las partes implicadas, asistiendo a muchas de ellas el Deán. Si bien la responsabilidad fundamental de la obra de refuerzo correspondía al ingeniero, el objetivo de estas reuniones era llegar a un acuerdo sobre las líneas de actuación en todos los aspectos de la obra.

En las contratas de este tipo, la mano de obra es un ingrediente absolutamente esencial. Se realizó un gran despligue de canteros y carpinteros tradicionales, pero también se necesitaron, y consiguieron, buenos artesanos de los oficios modernos. Ya se ha hecho referencia al «tacto» adquirido por los encargados del relleno de los cosidos; análogamente, incluso un martillo neumático de perforación se convirtió, en manos del capataz perforador, en un instrumento de precisión que se podía manejar con delicadeza.

La obra fue dirigida al principio por el Inspector de la Fábrica de la Catedral de Ely Mr. Donovan Purcell y, más tarde, a su muerte, por el nuevo Inspector Mr. Peter Miller. El autor, en colaboración con R.T. James y Asociados fue el Ingeniero Consultor. El autor desea dejar constancia de su deuda con dos de los socios de R.T. James, Messrs J.C.H. Finlison y W.T. Orr y con Mr. T. Gogging, que realizaron gran parte de las mediciones, prepararon los dibujos y tomaron muchas de las decisiones. Los contratistas fueron Messrs Rattee y Kent, quienes habían trabajado en la catedral durante más de un siglo; John Bradford fue el capataz. La subcontrata de las catas fue Fondedile Foundations Ltd; el acero inoxidable lo suministró George Clark (Sheffield) Ltd. El andamiaje fue proyectado y levantado por Scaffolding of Great Britain Ltd.

Capítulo 12

1. *Index Biographique des membres et correspondants de l'Académie des Sciences 1669-1954* (París, 1954).
2. E. Maindron, *L'ancienne Académie des Sciences: Les Académiciens 1666-1793* (París: B. Tignol, 1895).
3. E. Maindron, *L'Académie des Sciences, Histoire de l'Académie...* (París: F. Alcan, 1888).
4. Dortous de Mairan, *Éloges des Académiciens de l'Académie Royale des Sciences, morts dans les années 1741, 1742, & 1743* (París, 1747).
5. *Histoire de l'Académie royale des sciences*, vol. 1, (París, 1733).
6. N. Mitford, *The Sun King* (Londres, 1966).
7. C. A. Couplet, «Description du niveau,» *Mémoires de l'académie Royale des Sciences* (1699): 127 y ss. (París: 1702).
8. P. de La Hire, *Traité de nivellement* (París, 1684).
9. I. Todhunter, *A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the Earth*, 2 vols., (Londres: McMillan and Co., 1873).
10. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1701): 66 y ss.
11. Maindron, *L'Académie des Sciences*,...op. cit.
12. J. Heyman, *Coulomb's memoir on statics: an essay in the history of civil engineering* (Cambridge: University Press, 1972).
13. J. Heyman, «Simple plastic theory applied to soil mechanics,» *Proceedings of the Symposium on the role of plasticity in soil mechanics* (Cambridge: 1973).
14. P. Bullet, *L'architecture practique* (París: Chez Etienne Michellet, 1691).
15. H. Gautier, *Dissertation sur l'épaisseur des culées des ponts,...* (París, 1717).
16. K. In Mayniel, *Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revètement,...* (París: D. Colas, 1808).
17. C. A. Coulomb, «Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture,» *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Academie Royale de Sciencies par divers Savans, et lûs dans ses assemblées* 7 (1773): 343–82, (París: 1776).
18. B. F. de Bélidor, *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile* (París: Charles-Antoine Jombert, 1729).
19. P. de La Hire, *Traité de méchanique* (París: Imprimirie Royal, 1695).
20. P. de La Hire, «Sur la construction des voûtes dans les édifices,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1712): 69–78.
21. H. Pitot, «Examen de la force qu'il faut donner aux cintres dont on se sert dans la construction des grandes voûtes des arches des ponts, &c.,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1726): 216 y ss.
22. J. Heyman, «The safety of masonry arches,» *International Journal of Mechanical Sciences* 11 (1969): 363–85. [Capítulo 6]
23. A. F. Frézier, *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des batimens civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*, 3 vols. (Estrasburgo: J. D. Doulsekker. París: L. H. Guerin, 1737-39).
24. A. A. H. Danyzy, «Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes,» *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2 (1732): 40 y ss. (Lyon, 1778).
25. J. Gwilt, *An encyclopaedia of architecture*, reimpr. (Londres: Longmans, 1903).
26. P. Grimal, *Frontin: Les aqueducs de la ville de Rome* (París: Société d'édition «Les Belles Lettres», 1944).
27. C. Herschel, *The two books on the water supply of the city of Rome of Sextus Julius Frontinus, Water Commissioner of the city of Rome A.D. 97* (Nueva York, 1913).
28. E. Mariotte, *Traité du mouvement des eaux* (París: E. Michallet, 1686).
29. P. L. G. Dubuat, *Principes d'hydraulique* (nouvelle édition), 2 vols. (París: Imprimerie de Monsieur, 1786).
30. G. Amontons, «De la résistance causée dans les machines, tant par les frottemens des parties qui les composent, que par la roideur des cordes qu'on y employe, & la manière de calculer l'un et l'autre,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1699): 206 y ss.
31. J. D. Watson, *The double helix* (Londres: Weidenfeld & Nicholson, 1968).
32. Virgil, *Aeneid* vi, 851.

Capítulo 13

1. Towers and Belfries Commmittee of the Central Council of Church Bell Ringers, *The towers and bell handbook* (Brackley: Smart, 1973).
2. H. Bagot, *Ringing towers* (Australia, 1973), p. 16.
3. F. P. Müller, *Berechnung und Konstruktion von Glockentürmen* (Berlín: Ernst, 1968).
4. W. Roth, *Der Stahlbau* (1962): 102.
5. J. Geiger, *Der Bauingenieur* 38 (1963): 463 y ss.
6. K. Lürenbaum, *VDI-Berichte* No. 88 (1965): 89 y ss.
7. F. Baumgart, *Der Bauingenieur* 45 (1970): 444 y ss.

Capítulo 14

1. Royal Commission on Historical Monuments, *London, vol. 1: Westminster Abbey* (Londres: H. M. S. O., 1924). Poco después de la publicación se insertó un folleto *addendum*, con una descripción muy breve de las techumbres (p. 58, No. 22a).
2. Algunos ejemplos al alcance del autor son: Nicolas Fourneau, *L'art du trait de charpenterie* (París: Firmin Didot, 1767); J. Ch. Krafft, *Plans, coupes et élévations de diverser productions de l'art de la charpente* (París: Lerrault, Schoell et C[ie], 1805), que da ejemplos de trabajos tanto extranjeros como franceses; y, por supuesto, el corto artículo de Viollet-le-Duc, «Charpentre», en el tercer volumen de su *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI[e] au XVI[e] siècle*, 10 vols. (París: A. Morel, 1858-1868). Hacia 1960 el Centre de Recherches sur les Monuments Historiques publicó en París un trabajo en siete volúmenes sobre *Charpentes*. En Inglaterra, Thomas Tredgold se interesó más en los aspectos técnicos que en los históricos o comparativos de la construcción en madera; véase la tercera edición de sus *Elementary principles of carpentry*, ed. por Peter Barlow (Londres: John Weale, 1840). C. A. Hewett, *English cathedral carpentry* (Londres: Phillimore, 1974), realiza una importante labor de investigación original y tiene dibujos espléndidos mostrando la estructura general y los detalles constructivos.
3. R. W. McDowall, J. T. Smith, y C. F. Stell, «Westminster Abbey. The timber roofs of the Collegiate Church of St. Peter at Westminster,» *Archaeologia*, 100 (1966): 155–74.
4. Hewett, *English cathedral carpentry*, op. cit. dedica cuatro páginas a la techumbre de los ábsides y afirma que sólo existen cuatro cubiertas así hoy en día. La que cubre en Ely la capilla de St. Catherine es muy pequeña y data del XIX (proyectada probablemente por Robert Willis). La cubierta de la abadía de Pershore fue restaurada por Scott en 1862-65. Por último, La Capilla de Nuestra Señora en Lichfield, del siglo XIV, tiene un ábside cuya cubierta se reconstruyó en 1661-69.
5. Véase por ejemplo la segunda edición de H. R. Hahnloser, *Villard de Honnecourt* (Graz: Akademisches Druck- und Verlagsanstalt, 1972).
6. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretations through eight centuries* (Princeton: University Press, 1960).
7. Viollet-le-Duc, op. cit.

Capítulo 16

1. L. Benouville, «Étude sur la cathédrale de Beauvais,» *Encyclopédie d'Architecture*, serie 4ª, vol. 4 (París: 1891-2): 52–54, 60–62, 68–70.
2. J. Heyman, *Plastic design of frames. Vol 2: Applications* (Cambridge: University Press, 1971).
3. J. Heyman «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79. [Capítulo 1]
4. J. Heyman, C. J. Padfield y B. D. Threlfall, «Two masonry bridges: I. Clare College,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 305–18. J. Heyman y B. D. Threlfall, «Two masonry bridges: II. Telford's bridge at Over,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 319–30. [Capítulos 9 y 10]
5. J. Heyman, «The strengthening of the west tower of Ely Cathedral,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 60 (1976): 123–47. [Capítulo 11]

Capítulo 17

1. Ministry of Transport, *The assessment of highway bridges for construction and use vehicles.* Technical memorandum (Bridges) BE 3/73 (Londres: Ministry of Transport, 1973).
2. J. Heyman, «The estimation of the strength of masonry arches,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 69 (1980): 921–37. [Capítulo 18]
3. *New Civil Engineer*, 1978, 13 Apr.,p. 6.
4. *New Civil Engineer*, 1978, 20 Apr.,p. 20.

AGRADECIMIENTOS: Los autores agradecen al Sr. A. D. W. Smith, Quantity Surveyor del Condado de Kent, por su permiso al presentar esta contribución y por su aliento durante la realización de los trabajos.

Capítulo 18

1. J. Heyman, «The safety of masonry arches,» *International Journal of Mechanical Sciences* 11 (1969): 363–85. [Capítulo 6]
2. J. Heyman, C. J. Padfield y B. D. Threlfall, «Two masonry bridges: I. Clare College,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 305–18. [Capítulo 9]
3. J. Heyman y B. D. Threlfall, «Two masonry bridges: II. Telford's bridge at Over,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 319–30. [Capítulo 10]
4. *New Civil Engineer* (1978): 13 abril p. 6; 20 abr. p. 20.
5. Ministry of Transport, *The assesment of highway bridges for construction and use vehicles.* Technical Memorandum (Bridges) BE-4, (Londres: Ministry of Transport, Jan. 1967).
6. Ministry of Transport, *The assessment of highway bridges for construction and use vehicles.* Technical memorandum (Bridges) BE 3/73 (Londres: Ministry of Transport, 1973).
7. A. J. S. Pippard, «The approximate estimation of safe loads on masonry bridges,» *Civil Engineer in War* 1

(1948): 365 y ss. (Londres, The Institution of Civil Engineers).
8. A. J. S. Pippard, E. Tranter y L. Chitty, «The mechanics of the voussoir arch,» *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4 (1936): 281–306.
9. A. J. S. Pippard y J. F. Baker, *The analysis of engineering structures*, 2ª ed. (Londres: Edward Arnold, 1943).
10. J. Heyman, N. B. Hobbs y B. S. Jermy, «The rehabilitation of Teston bridge,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 68 (1980): 489–97. [Capítulo 17]
11. C. S. Chettoe y W. Henderson, «Masonry arch bridges: a study,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 7 (1957): 723–62.
12. Military Engineering Experimental Establishment, *Classification of masonry arch bridges* (Christchurch: Military Engineering Experimental Station, 1952).
13. J. Heyman, *Coulomb's memoir on statics: an essay in the history of civil engineering* (Cambridge: University Press, 1972).
14. W. Barlow, «On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction,» *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 5 (1846): 162–82.
15. P. Couplet, «De la poussée des voûtes,» *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris* (1729): 79–117; «Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes,» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris* (1730): 117–141.
16. J. Heyman, «Couplet's engineering memoirs, 1726-33,» *History of Technology* 1 (1976): 21–44. [Capítulo 12]
17. D. Gregory, «Catenaria,» *Philosophical Transactions* 231 (1697): 637 y ss.
18. R. Hooke, *A description of helioscopes, and some other instruments* (Londres: J. Martyn, 1676).
19. S. Ware, *A treatise of the properties of arches, and their abutment piers* (Londres: T. Bensley, 1806).
20. J. Heyman, *Plastic design of frames: Vol 2. Applications* (Cambridge: University Press, 1971).

AGRADECIMIENTOS: El autor queda reconocido al Sr. J. N. Barnikel, del Instituto de Ingeniería y Vehículos Militares, de Christchurch, por la información relativa al desarrollo del método de Pippard.

Capítulo 19

1. Pol Abraham, *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval* (París: Vicent, Fréal et Cie, 1934).
2. V. Sabouret, «Les voûtes d'arêtes nervurées. Rôle simplement décoratif des nervures,» *Le génie civil* 92 (1928): 205–9.
3. Véase, por ejemplo, J. Heyman, «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79; «On the rubber vaults of the Middle Ages, and other matters,» *Gazette des Beaux-Arts* 71 (1968): 177–88 [Capítulos 1 y 5]; *Equilibrium of shell structures* (Oxford: Clarendon Press, 1977); *The masonry arch* (Chichester: Ellis Horwood, 1982).

Capítulo 20

1. J. Heyman «The stone skeleton,» *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966): 249–79 [Capítulo 1]
2. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretation through eight centuries* (Princeton: University Press, 1960).
3. François Blondel, *Cours d'architecture*, 2 vols (París: P. Auboin et F. Clouzier, 1675, 1683).
4. F. Derand, *L'architecture des voûtes* (París: Sebastian Cramoisy, 1643; nouvelle édition, A. Cailleau, 1743).
5. B. F. de Bélidor, *La science des ingénieurs...* (París: Charles-Antoine Jombert, 1729).
6. J. F. Blondel, *Cours d'architecture...(continué par M. Patte)* 6 vols (París: Desaint, 1777).
7. H. Moseley, *The mechanical principles of engineering and architecture*, (Londres: Longman, Brown, Green and Longmans, 1843).
8. J. Heyman, C. J. Padfield y B. D. Threlfall, «Two masonry bridges: I. Clare College,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 305–18. [Capítulo 9]
9. J. Heyman y B. D. Threlfall, «Two masonry bridges: II. Telford's bridge at Over,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 52 (1972): 319–30. [Capítulo 10]
10. H. Gautier, *Dissertation sur l'épaisseur des culées des ponts* (París: A. Cailleau, 1717).
11. Rodrigo Gil de Hontañón, (ca. 1500-1577), Inserto en *Compendio de Arquitectura...* (Simón García, 1681), editado en *El arte en España*, vol. 7 (Madrid: 1868).
12. G. Kubler, «A late gothic computation of rib vault thrusts,» *Gazette des Beaux-Arts* 26 (1944): 135–48.
13. J. Heyman, *Coulomb's memoir on statics* (Cambridge: University Press, 1972). *The masonry arch* (Chichester: Ellis Horwood, 1982).
14. Christopher Wren, *Parentalia* (Londres: T. Osborn, 1750).
15. J. A. Bennett, «Christopher Wren: The natural causes of beauty,» *Architectural history* 15 (1972): 5 y ss.

Capítulo 21

1. J. Rondelet, *Traité théorique et practique de l'art de bâtir*, 7ª ed. (5 vols. y láminas) (París: Firmin Didot, 1834).
2. P. Patte, *Mémoires sur les objets les plus importants de l'architecture* (París: Rozet, 1769).
3. J. Fergusson, *History of modern styles of architecture*, 3ª ed. (2 volúmenes) (Londres: J. Murray, 1891).
4. P. Patte, *Mémoire sur la construction de la coupole... de Sainte Geneviève* (Amsterdam, 1770).
5. M. Mathieu, *Pierre Patte, sa vie et son oeuvre* (París, 1940).
6. J. Rondelet, *Mémoire historique sur le dôme du Panthéon Français* (París: An V-1797).
7. Heyman, J., *Coulomb's memoir on statics* (Cambridge: University Press, 1972).
8. G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario, 1748).

9. E. M. Gauthey, *Mémoire sur l'application des principes de la mécanique à la construction des voûtes et des dômes* (Dijon: Louis Nicolas Frantin, 1771).
10. Gauthey, E.M.: *Dissertation sur les dégradations ... du Panthéon Français* (París: Perroneau, l'An VI-1798).
11. J. Kerisel, «Les restaurations à travers le temps,» *Restauration des ouvrages et des structures* (París: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1983): 9–24.

Capítulo 22

1. J. Heyman, «The strengthening of the west tower of Ely Cathedral,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 60 (1976): 123–47. [Capítulo 11]
2. J. Heyman, «The restoration of masonry: structural principles,» *Architectural Science Review* 2 (1977): 35–37. [Capítulo 16]
3. D. J. Stewart, *On the architectural history of Ely Cathedral* (Londres: John Van Voorst, 1868).
4. J. Bentham, *The history and antiquities of the conventual and cathedral church of Ely, from the foundation of the Monastery, A.D. 673, to the year 1771* (Cambridge: University Press, 1771; 2ª edición, 1812).
5. C. A. Hewett, *English historic carpentry* (Londres: Phillimore, 1980).
6. A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, vol 2, *Graphische Statik* (Leipzig: Teubner, 1912).
7. S. P. Timoshenko y D. H. Young, *The theory of structures*, 2ª ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1965).
8. S. Pellegrino y C. R. Calladine, «Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks» *International Journal of Solids and Structures* 22 (1986): 409–428.
9. C. R. Calladine, «Buckminster Fuller's 'tensegrity' structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames,» *International Journal of Solids and Structures* 14 (1978): 161–72.
10. C. A. Hewett, *English cathedral carpentry* (Londres: Wayland, 1974).
11. R. R. Reynolds, *The octagon and lantern of Ely Cathedral*, RIBA Sessional Papers 1875-76, Royal Institute of British Architects, Londres, 1876, 69.

AGRADECIMIENTOS: Mr. Peter Miller, inspector de la fábrica de la catedral de Ely y el Deán y Capítulo de Ely prestaron una gran ayuda prestando los dibujos de R. Reynolds Rowe de 1874 que documentan en detalle la estructura del octógono y las obras de restauración de Scott.

Capítulo 23

1. G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario, 1748).
2. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretation through eight centuries* (Princeton: University Press, 1960).
3. Galileo Galilei *Discorsi e Dimostrazioni mathematiche intorno à due nuove science attenenti alla mecanica e i movimenti locali* (Leiden, 1638). Edición en inglés: *Dialogues concerning two new sciences*, traducido por H. Crew y A. de Salvio (Nueva York: Mcmillan, 1952). Edición en español: *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, traducción de J. Sádaba (Madrid: Editora Nacional, 1976).
4. C. L. M. H. Navier, *Résumé des leçcons données à l'École des Ponts et Chausées sur l'application de la mécanique a l'établissement des constructions et des machines* (París, 1826); 3ª ed. rev. por B. de Saint-Venant (París, 1864).
5. J. F. Baker (Lord Baker) et al. *The steel skeleton. Vol. 1: Elastic behaviour and design* (Cambridge: University Press, 1954; *Vol. 2: Plastic behaviour and design* (Cambridge: University Press, 1956).
6. C. A. P. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* (Turín: Auguste Frédéric Negro, 1879). Edición en inglés: *Elastic stresses in structures*, traducido por E.S. Andrews Scott (Londres: Greenwood and Son, 1919). Reeditado con una introducción de G. A. E. Oravas. *The theory of equilibrium of elastic systems and its applications* (Nueva York: Dover, 1966).
7. J. Heyman, «Chronic defects in masonry vaults: Sabouret's cracks,» *Monumentum* 26 (1983): 131–41 [Capítulo 19]
8. Pol Abraham, *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval* (París: Vicent, Fréal et Cie, 1934).
9. V. Sabouret, «Les voûtes d'arêtes nervurées. Rôle simplement décoratif des nervures,» *Le génie civil* 92 (1928): 205–9.
10. A. Terenzio «La restauration du Panthéon de Rome» *La conservation des monuments d'art et d'histoire* (París: Office International des Musées, 1934), pp. 280–85.
11. R. Mark y P. Hutchinson «On the structure of the Roman Pantheon» *Art Bulletin* 68 (1986): 24–34.
12. C. Blasi y A. Ceccotti «La cupola del Brunelleschi: Indagine sullo stato di fessurazione» *Ingegneri Architetti Costruttori*, junio/septiembre 1984.
13. «Florence dome saved by its own cracks» *New Civil Engineer*, 5 marzo 1987.

AGRADECIMIENTOS: Parte del material de este ensayo se presentó por primera vez en una serie de conferencias sobre la fábrica impartidas en mayo de 1987 en la Universidad de Florencia (Dipartimento di Costruzioni).

Capítulo 24

1. G. Poleni, *Memorie istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Nella Stamperia del Seminario, 1748).
2. J. Heyman, «Chronic defects in masonry vaults: Sabouret's cracks,» *Monumentum* 26 (1983): 131–41. [Capítulo 19]
3. J. Heyman, «Poleni's problem,» *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 84 (1988): 737–59. [Capítulo 23]

Capítulo 25

1. G. G. Ungewitter, *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen*, 2 vols. (Leipzig: Tauchnitz, 1901).

2. P. Beckmann y J. Blanchard, «The spire of Holy Trinity Church Coventry,» *The Arup Journal* 15,4 (1980): 6–14.
3. J. Heyman, *Equilibrium of shell structures* (Oxford: Clarendon Press, 1977).

Capítulo 26

1. Villard de Honnecourt, *Lodge book* (ca. 1235). Véanse: (a) R. Willis (traducido y editado por), *Wilars de Honnecourt, Facsimile of the sketch-book of, with commentaries by J. B. A. Lassus and J. Quicherat* (Londres: T. H. y J. Parker, 1859). (b) H. R. Hahnloser, *Villard de Honnecourt* (Viena: Schroll, 1935; 2ª ed. Graz: Akademische Druck- u. Verlagsanstalt, 1972).
2. P. Frankl, *The gothic, literary sources and interpretations through eight centuries* (Princeton: University Press, 1960).
3. J. S. Ackerman, «'Ars sine scientia nihil est', gothic theory of architecture at the Cathedral of Milan,» *Art Bulletin* 31 (1949): 84–111.
4. J. Harvey, «Mediaeval design,» *Transactions of the Ancient Monument Society* 6 (1958): 55–72.
5. El Libro de Ezequiel c. 600 a.C.
6. Vitruvio, *De Architectura*, c. 30 a.C.

Capítulo 27

1. L. Beltrami, «Fall of the Campanile of St. Mark's Venice,» *Journal of th Royal Institute of British Architects, 3rd. ser.* 9 (1902): 429–37, 490–92.
2. R. Willis, *The architectural history of Chichester Cathedral* (Chichester: W. H. Mason, 1861).
3. Sir Basil Schonland, *The flight of thunderbolts,* 2ª ed. (Oxford: Clarendon Press, 1964).
4. Alban Caroe, *Old churches and modern craftmanship* (Oxford: University Press, 1949).
5. R. Willis, *Remarks on the architecture of the Middle Ages* (Cambridge: At the Pitt Press, 1835).
6. M. Marra, «Il rafforzamento statico del Campanile di Burano,» *Rivista Italiana di Geotechnica* 5 (1971): 255–62.

Glosario

ábaco. La parte superior y remate del capitel de una columna. Con frecuencia tiene la forma de una losa cuadrada, pero también puede estar moldurado o decorado.

abanico. *Ver* **bóveda de abanico.**

ábside. Remate oriental de la nave adosado a las cabeceras de las iglesias. Su planta remata en semicírculo, por lo general, en el románico, y poligonalmente en la arquitectura gótica. Por extensión se llama así a toda la cabecera de una iglesia, incluyendo la capilla mayor, la girola y las capillas absidales.

acodalar. Poner codales para reforzar la construcción, de forma que se aseguren dos cuerpos sosteniéndose recíprocamente.

activo. *Ver* **empuje activo.**

adimensional. Cantidad o parámetro que no tiene dimensiones físicas. Por ejemplo, en un arco la relación entre la luz (L) y el espesor (e), la esbeltez (L/e) es adimensional. Suele ser útil expresar los parámetros de proyecto de una estructura como cantidades adimensionales.

adintelada. Forma de construcción de fábrica que se basa en el empleo del dintel y la columna. Visualmente muy diferente de la construcción arqueada, su funcionamento estructural es similar, formándose arcos de descarga dentro de los dinteles que funcionan como arcos adintelados.

admisible. *Ver* **resistencia admisible.**

adobe. Cuerpo regular construido con tierra arcillosa bien batida a la que a veces se mezcla paja o heno cortado para que tenga más cohesión.

adovelado. Construcción o arco compuesta por dovelas.

ad quadratum/ad triangulum. Sistemas de proporción geométrica basados en el cuadrado o en el triángulo respectivamente, empleados por los constructores medievales para definir la forma de elementos (por ej. pináculos) o de las trazas generales (plantas, alzados, secciones) de un edificio.

afirmar. Asentar sólidamente una obra. || Dar solidez a una fábrica o terreno por medio de pilotajes, refuerzos, rellenos, cimientos, etc.

agrietamiento. Forma y disposión de las grietas en una zona de una fábrica.

aguja. Nombre dado a los pináculos góticos. || Construcción piramidal de piedra o madera, colocada en lo alto de las torres de las iglesias, especialmente en las de la Edad Media, a las que servía de remate. En la última época gótica se hicieron con tracerías caladas en sus caras o costados.

albardilla. Tejadillo o remate con que se coronan ciertos muros, para evitar que el agua de lluvia incida y resbale directamente sobre ellos.

aleta. Cada uno de los muros que hay en los lados de los puentes como si fueran prolongación de los estribos.

alineación. En las obras de fábrica la acción u operación de colocar en línea o a nivel, las piedras u otros materiales semejantes, con respecto de otros, o de la posición que deben guardar.

almohadón. La primera hilada de un arco, sentada inmediatamente sobre el machón, cuyo lecho es horizontal y el sobrelecho inclinado. Se distingue del salmer en que éste es parte del machón y el almohadón lo es del arco.

altura. *Ver* **flecha.**

altura límite de un material. Altura que debe alcanzar una columna de sección constante para que el material alcance en su base la tensión de rotura. Se obtiene dividiendo la tensión de rotura por el peso específico del material.

análisis límite. También llamado análisis plástico o a rotura. Análisis estructural que se ocupa de averiguar las cargas de colapso de una estructura. formada por un material perfectamente plástico. Si se verifican determinadas condiciones puede aplicarse al análisis de estructuras de fábrica. *Ver* **principios del análisis límite, teoremas fundamentales**.

andamiaje. Estructura provisional utilizada en la construcción de una fábrica.

ángulo de rozamiento. En el estudio de los cuerpos que deslizan sobre superficies inclinadas planas, el ángulo que forma la normal a la superficie y la resultante entre el

cuerpo y la superficie, cuando aquél empieza a deslizar. En un arco de fábrica o en una bóveda, la máxima pendiente que el lecho de una dovela puede formar con la horizontal sin necesidad de cimbra o cualquier otro apoyo temporal para las piedras del arco.

antepecho. Pretil o muro bajo que se levanta en los bordes de un puente.

antifunicular. Línea poligonal obtenida invirtiendo un polígono funicular. En un arco, el antifunicular de las cargas que soporta coincide aproximadamente con la línea de empujes.

aparejo. La disposición y enlace de las partes de una construcción. Tratándose de obras de cantería o sillería, se usa también este término como sinónimo de despiece.

apear. Sostener o apuntalar un terreno, construcción o parte de ella, bien con maderas o con obra de fábrica.

aplastamiento. Fallo del material por compresión.

apoyo en falso. *Ver* **asiento en falso.**

aprendiz. Persona que aprende un oficio. En la Edad Media primer escalón en la formación dentro de las logias o gremios.

apuntado. *Ver* **arco apuntado.**

arbotante. Arco por tranquil o rampante que transmite en estado pasivo el empuje de una bóveda a un machón o estribo exterior llamado botarel. En estado activo puede transmitir los empujes resultantes de la acción del viento sobre la techumbre. Con frecuencia los arbotentes son dobles: el superior resiste el viento y el inferior el empuje de la bóveda. Por lo general soporta un trozo de muro, macizo o calado, que se corona con un nervio o albardilla inclinada, que suele contener un canal para conducir el agua de lluvia desde la cubierta a las gárgolas que la arrojan fuera del edificio.

arco. Elemento estructural curvo que transmite las cargas fundamentalmente mediante esfuerzos de compresión. La forma de transmisión de las cargas viene dada por la posición de su línea de empujes.

—— **adintelado.** El que degenera en una línea recta presentando un intradós horizontal y estando despiezado en dovelas dispuestas radialmente en forma de cuña.

—— **apuntado.** El formado por dos arcos de círculo de igual radio y menores que un cuarto de circunferencia. Se llama también, erróneamente, **ojival**. Se le llama **equilátero** cuando se traza con un radio igual a su luz. Cuando el radio es mayor que la luz, resultando en un arco muy apuntado, se le llama **alancetado.**

—— **carpanel.** El formado por varios arcos de círculo, acordados tangencialmente. Su flecha es menor que la semiluz siendo, por tanto, rebajado.

—— **crucero, diagonal, ojival.** El que, arrancando de un apoyo, pasa por la clave principal de una bóveda nervada (de ahí su nombre). Los arcos cruceros de las bóvedas nervadas son los únicos que, en rigor, se deberían llamar arcos ojivos. El arco ojival refuerza el pliegue de encuentro de dos cáscaras; según Frankl, etimológicamente, la palabra se deriva del latín «augere» (reforzar, recrecer).

—— **de descarga.** El que se sitúa sobre un vano o porción de fábrica para aliviarlos del peso del muro superior. Muchas veces no se acusan con molduras sino que van embebidos en la fábrica, al ras de los paramentos.|| En un dintel o macizo de fábrica que salva un vano, trayectoria que siguen las cargas en su interior.

—— **elíptico.** Aquel cuya directriz es una semielipse. Llamado también **de vuelta de cordel**, porque se traza fijando en dos puntos (focos de la elipse) los extremos de una cuerda.

—— **escarzano.** El formado por un segmento circular, menor que la semicircunferencia, teniendo, por lo tanto, su centro por debajo de la línea de los arranques.

—— **fajón.** El volteado en un plano perpendicular al eje de la nave. En especial se llama así el que «refuerza» una bóveda de cañón seguido, dividiéndola en tramos.

—— **formero o de forma.** El que recibe la intersección de la bóveda con el muro de cerramiento. En las naves de las iglesias van los formeros en lo alto de los muros laterales y sobre ellos acometen los plementos a dichos muros.

—— **de medio punto.** Aquel cuyo intradós es una semicircunferencia completa, por lo que su altura o flecha es igual a la mitad del vano.

—— **peraltado.** Aquel cuya altura o flecha es mayor que la semiluz.

—— **perpiaño.** En una bóveda de crucería el que limita los tramos en sentido transversal al eje de la nave.

—— **rampante, por tranquil.** El que no tiene sus arranques a la misma altura. No es simétrico y, con frecuencia, su intradós está definido por dos arcos de circunferencia acordados. Generalmente los arbotantes son arcos rampantes.

—— **rebajado.** Aquel cuya altura o flecha es menor que la semiluz.

—— **toral.** Cada uno de los cuatro que sostienen una cúpula, un cimborrio o el tramo central del crucero.

—— **triarticulado.** El que presenta tres articulaciones; es una estructura isostática y los esfuerzos internos pueden hallarse directamente a partir de las cargas por las ecuaciones de equilibrio.

argamasa. *Ver* **mortero.**

arista. Angulo sólido formado en la intersección de dos bóvedas de cañón que se cruzan; se vuelve más obtuso a medida que se aproxima a la coronación. En una bóveda de arista sobre un tramo cuadrado éstas forman dos «arcos» que se cruzan sobre las diagonales del cuadrado. En las bóvedas de crucería la arista está escondida por los arcos cruceros.

aristón. Cualquier esquina de una obra de fábrica, que por lo común para reforzarla se hace de un material más resistente.|| Fila de dovelas que forman la cara exterior de los arcos de cabeza, y que por lo regular ocupan todo el grueso de la bóveda. || Arista de encuentro en una bóveda de arista. || En los puentes, los arcos que forman las dovelas de los extremos del cañón; suelen tener un espesor mayor que el de la bóveda y se construyen normalmente en buena sillería.

armado. *Ver* **hormigón armado.**

armadura. Conjunto de piezas de madera que forman una estructura destinada a recibir el tejado con el que se cubre el edificio.

—— **mansarda.** Armadura quebrantada con tres caballetes o lomos formando cuatro vertientes. Conocida con ante-

rioridad en España, fue empleada en Francia por primera vez por François Mansart, de quien se deriva el nombre.

—— **de par e hilera.** Formada por pares e hilera. Los pares se disponen oblicuamente hasta la solera o directamente contra el muro. Para eliminar el empuje horizontal se introducen a veces tirantes.

—— **de par y nudillo.** La de par e hilera a la que se coloca un puente o nudillo para limitar la flexión de los pares.

—— **de palomillas.** Aquella que está formada a base de palomillas. Típica de Inglaterra donde recibe el nombre de «hammerbeam truss» haciendo referencia al nudillo («hammerbeam») que es característico de estas armaduras.

—— **quebrantada.** Formada por tres o más caballetes que forman cuatro o más vertientes, presentando un perfil poligonal.

armazón. Armadura que en los campanarios sostiene el sistema de campanas.

arqueada. Forma de construcción que se basa en el empleo de arcos, bóvedas o cúpulas.

arquitrabe. Parte inferior de un entablamento, sobre el que descansa el friso y que apoya directamente sobre las columnas.

arquitrabada. Construcción adintelada.

arquivolta. Moldura o conjunto de molduras que decora la cara exterior frontal de un arco.

arranque. La porción de un arco o bóveda que insiste sobre el apoyo, y en la que se inicia la curvatura de dichos elementos. *Ver también* **enjarje**, **tas-de-charge**.

arriostrar. Poner riostras u otros elementos para hacer indeformable una armadura, garantizando así su estabilidad global.

articulación. Punto de una estructura que puede girar ligeramente de manera que los elementos que a él acometen están libres de momentos flectores en dicha junta.

—— **entre dovelas.** La que se forma cuando el empuje entre dos dovelas se acerca al borde exterior. Dado el carácter unilateral de la fábrica se forma una suerte de «bisagra», apoyándose una dovela sobre otra en una superficie que se aproxima a un punto.

—— **plástica.** La formada en un punto de una estructura de barras de material perfectamente plástico cuando el momento en dicho punto alcanza el momento plástico de las sección.

asentar. Colocar en obra un sillar, un madero, etc., afirmándolo en el sitio en que ha de permanecer y en situación conveniente y estable.

—— **a contra hoja.** Colocar la piedra en obra en posición inversa de la suya natural de la cantera. También se dice a contralecho.

—— **a hoja.** Colocar las piedras en obra en situación análoga a la que tenían en la cantera.

—— **a hueso, en seco.** Sentar la piedra o ladrillo en obra sin mortero o con muy poco tendel.

asiento en falso. El modo como está asentado sobre otro un cuerpo que tiene alguna parte voladiza o que no está a plomo con su base. En las iglesias góticas con frecuencia se buscaba intencionalmente esta disposición, quizá para demostrar la maestría del constructor.

atirantar. Asegurar con tirantes una armadura o un arco para anular los empujes horizontales sobre los apoyos.

barbilla. Corte agudo que se da al extremo de un madero, generalmente en una cara, para que encaje en él el extremo de otro. Así suele ser el ensamble del tirante con el par en una armadura.

boquilla. Superficie o parte de la dovela de un arco o bóveda que da hacia el intradós. También se llaman así a los aristones de los puentes.

botarel. Machón o estribo implantado fuera de una bóveda, cuyo empuje contrarresta el de la bóveda por medio del arbotante que estriba en él. Tiene sección rectangular y a menudo presenta retallos que hacen que ésta disminuya hacia arriba. Con frecuencia estaban rematados por pináculos.

bóveda. Obra de fábrica arqueada que cubre un espacio comprendido entre muros o pilares.

—— **de abanico.** También llamada palmeada. Aquella cuyos nervios se abren a partir de los arranques como las ramas de una palmera o las varillas de un abanico.

—— **adintelada.** La que tiene por generatriz una línea recta, y presenta una superficie plana en su intradós.

—— **anular.** La que se curva en planta, tal como las bóvedas de cañón anulares que cubren los primitivos deambulatorios.

—— **de arista.** La formada por la intersección de dos bóvedas de cañón de igual altura y con el mismo plano de arranque, siendo sus aristas salientes hacia el interior de la bóveda.

—— **baída.** (también **vaída**) La que resulta de cortar una semiesfera por planos verticales levantados en el perímetro de un polígono inscrito en el círculo de la planta.

—— **de cañón.** Aquella cuyo intradós es cilíndrico. La sección transversal puede ser un semicírculo o un arco apuntado. Si la superficie es continua, se dice de **cañón seguido**; pero es muy frecuente que presente resaltos en forma de arcos fajones que la dividen en tramos.

—— **de crucería, nervada.** Nombre general de las bóvedas de arcos independientes que constituyen una de las características principales de la arquitectura gótica. Constan de dos elementos esenciales: los arcos que forman su esqueleto y los plementos o paños que cubren los espacios intermedios.

—— **cuatripartita.** La de crucería sobre planta cuadrada o rectangular, dividida en cuatro paños fundamentales.

—— **estrellada.** Aquella en que se entrecruzan las nervaduras formando complicadas tracerías de estrellas.

—— **falsa.** La formada por aproximación sucesiva de hiladas horizontales en voladizo.

—— **reticulada.** Bóveda nervada en la que los nervios forman una retícula o malla continua, habiendo desaparecido los arcos perpiaños que definen los sucesivos tramos.

—— **en rincón de claustro.** La originada por la intersección de cañones cilíndricos de igual altura, y que arrancan de un mismo plano horizontal; presenta sus aristas o encuentros en ángulo entrante, al contrario que la bóveda de arista, de la que también se diferencia en que cada uno de sus paños tiene que apoyarse en un muro continuo, mientras que la de arista sólo insiste sobre apoyos aislados.

—— **sexpartita.** La de crucería que, en cada tramo, queda dividida en seis compartimentos, por llevar un arco transverso que pasa por la clave. Tiene a cada lado dos arcos formeros muy peraltados.

caballete. En una tejado la parte más alta, horizontal, que descansa sobre la hilera y divide las vertientes o aguas.
cabecera. Parte principal de una iglesia donde se encuentra en general el altar, y enfrentada a los pies.
cabio. Madero paralelo a los pares que en una armadura sirve de soporte a la tablazón de la cubierta.
cadena. Conjunto de piezas o eslabones de hierro más o menos gruesos que se unen mediante articulaciones. En el Renacimiento las cúpulas se «ataban» con frecuencia con cadenas. || Machón de sillería que se echa a trechos en un muro de fábrica para fortalecerlo.
caja y espiga. *Ver* **ensamble a caja y espiga.**
cal. Producto obtenido por la calcinación de piedras calizas.
cala. Abertura que se hace en una obra de fábrica para conocer los materiales y su disposición (p. ej. para averiguar la estructura y espesor de un muro de fábrica). || Perforación realizada en un terreno para conocer su estructura.
calzo. Cuña o tarugo de madera o hierro con que se afianza, ajusta o coloca en posición una pieza cualquiera.
camón. Madero o par encorvado o labrado en forma de arco en las armaduras curvas, como cúpulas y medias naranjas. || Cada una de las piezas curvas que forman la cimbra de una bóveda, y sobre las que se clavan las costillas o tablas que sostienen el material con que se construye.
canecillo. Cabeza o extremo de una viga que sobresale del muro a fin de sostener la cornisa o vuelo del tejado, o una armadura de cubierta. || Modillón que soporta una cornisa o el vuelo de un tejado.
cantero. En general, el que labra la piedra. También se usa esta palabra para designar en general a los aprendices, oficiales, capataces (en su caso) y maestros que formaban las logias o gremios medievales de canteros.
cañón. *Ver* **bóveda de cañón.**
capataz. Operario que tiene a su cargo cierto número de otros para algunos trabajos. En la Edad Media tercer escalón en la formación dentro de algunas logias o gremios, después del de aprendiz y oficial. Era un oficial al que se asignaban ciertas obligaciones especiales.
capitel. Parte superior de una columna o pilastra. Lleva molduras y elementos decorativos, lo que establece las diferencias entre los órdenes.
carga. Peso, fuerza o sistema de fuerzas que debe resistir una estructura.
—— **permanente.** Carga cuya posición y magnitud es constante a lo largo del tiempo. Está formada por el peso propio y el peso del resto de los elementos que componen la construcción de que se trate.
—— **peso propio.** La carga formada por el peso de la estructura.
—— **sobrecarga.** Carga cuya magnitud y posición puede ser variable a lo largo del tiempo. Por ejemplo, la debida a la nieve o al uso (en un puente el tránsito de vehículos, etc.).
—— **de viento.** Fuerza ejercida por la presión del viento sobre una determinada superficie. En las obras de fábrica suele ser mucho más pequeña que la carga permanente, salvo en el caso de torres o agujas esbeltas, o de catedrales góticas provistas de grandes techumbres que ofrecen un gran superifice contra el viento.
cáscara. Estructura superficial curva.
casco. En una bóveda de crucería, la plementería.
cascote. Fragmento de alguna fábrica derribada o arruinada que sirve luego o se utiliza en obras nuevas.
catenaria. Del latín «catena» (cadena). Curva que forma una cadena o cuerda flexible, suspendida por sus extremos de dos puntos y sometida a su propio peso. Por extensión, forma que toma un hilo flexible sometido a una cierta ley de cargas. *Ver también* **polígono funicular.**
centro de gravedad. Aquel punto de un cuerpo tal que, si lo colgáramos de él, el cuerpo estaría en equilibrio. Por el centro de gravedad pasa la resultante de los pesos del cuerpo. En las estructuras de fábrica la estabilidad está determinada por la adecuada colocación de los pesos; es fundamental, pues, conocer los centros de gravedad de los distintos elementos que componen la estructura.
cepa. La parte del machón, pilar o estribo que sostiene el arco o la bóveda desde que arranca de la tierra hasta la imposta. || En los puentes la pila o estribo extremo que asienta sobre la margen del río.
cercha. Cimbra o armadura que sostiene un arco o una bóveda durante su construcción. Por extensión, modernamente cualquiera estructura reticulada plana de cubierta.
chapitel. El remate o techumbre de forma piramidal que cierra y termina una torre; desde el Renacimiento sustituyeron a las flechas góticas. Puede ser de fábrica pero, en general, sus armaduras son de madera y están cubiertas de pizarra.
cimborrio. Torre o cuerpo saliente, en general de planta cuadrada u octogonal que se levanta sobre el crucero de una iglesia. A veces se remata con un chapitel.
cimbra. Armazón de madera arqueada por su parte superior que sirve como de molde para la construcción de arcos y bóvedas, sosteniéndolos mientras se construyen y cierran.
cimentación. Construcción que transmite las cargas de la estructura al terreno.
clave. La dovela central que cierra un arco o bóveda. En una bóveda de cañón las claves están todas en una fila formando la línea de clave; en las bóvedas de crucería o arista las líneas de clave tienen forma de cruz o estrella según el número de nervios que se reunen en su cima.
—— **mayor.** En una bóveda de crucería, la situada en el centro.
—— **pinjante o suspendida.** Aquella cuya boquilla pasa del intradós de la bóveda presentando un extremo suspendido que con frecuencia está ornamentado.
clavija. Pedazo de hierro o madera que se encaja a manera de clavo en una unión o ensambladura para asegurarla.
codal. Madero que se pone horizontalmente en una zanja o en el vano de un edificio para sostener las paredes y que no se desplomen.
coeficiente de seguridad. Cantidad numérica que trata de evaluar la seguridad de una estructura. En el análisis elástico convencional por resistencia resulta de dividir la tensión de rotura del material por la máxima tensión que se encuentra en la estructura. En el análisis límite o plástico resulta de dividir la carga de colapso que produciría su hundimiento con la carga que realmente soporta.
—— **geométrico.** En los arcos de fábrica, resulta de dividir el espesor real del arco por el espesor límite mínimo para el sistema de cargas considerado. Para evaluar la seguridad de las estructuras de fábrica puede aplicarse el mismo principio: comparar la geometría que conduciría al hundi-

miento (bajo el sistema de cargas considerado) con la geometría real.

colapso. Hundimiento de una estructura.

colegiata. Iglesia colegial, presidida por un abad y con un capítulo de canónigos seculares.

combado. Nervio secundario que en las bóvedas de crucería va de clave a clave.

condiciones de contorno. En general, condiciones en las que la estructura está apoyada, sobre el terreno, sobre otras estructuras o sobre ambos.

contrafuerte. Estribo o machón que se fabrica arrimado a un muro para fortalecerlo. Al comenzar el estilo gótico se separaron los contrafuertes de los muros resistiendo el empuje de las bóvedas por medio de los arbotantes y quedaron convertidos en los botareles.

contrapar. En una armadura de par e hilera, viga transversal a los pares.

contrarrestos. Se dice, en general, de los elementos (contrafuertes, estribos, machones, etc.) destinados a oponer su peso al empuje de los arcos y las bóvedas. En la arquitectura gótica, se llama contrarresto al conjunto de arbotante y botarel.

cornisa. Parte superior y más saliente del entablamento. || Moldura o conjunto de ellas que rematan un muro, en general para evitar que el agua de lluvia incida o resbale sobre él.

coro. Parte de la iglesia destinada al canto de los clérigos. Su ubicación fue cambiando con el tiempo y el lugar, pudiendo estar en la cabecera, el centro o los pies de la nave. En las iglesias del gótico francés e inglés se situaba normalmente en la cabecera.

correa. Madero horizontal que coge desde un cuchillo de armadura a otro; va asentado en los pares por medio de los egiones, y en él se clavan los contrapares.

cortante. En una sección de una barra la componente de la resultante de las fuerzas (a uno de los lados de la sección) proyectada sobre el plano de la sección.

cortes de cantería. Arte de labrar la piedra para la construcción. *Ver también* **estereotomía**.

cripta. Estancia subterránea de un edificio.

criterios estructurales. Permiten juzgar si una estructura resistente funciona como tal. Hay tres criterios estructurales básicos: resistencia, rigidez y estabilidad. La estructura debe ser suficientemente resistente como para soportar las cargas que se le impongan (incluyendo su propio peso), no debe deformarse excesivamente, y no debe desarrollar grandes desplazamientos inestables locales o globales.

crucería. *Ver* **bóveda de crucería**.

crucero. *Ver* **arco crucero**. || En una iglesia de planta cruciforme, el área central, generalmente de planta cuadrada, que se forma en la intersección de la nave central con los transeptos.

cuadral. Viga dispuesta diagonalmente de una solera a otra en los ángulos entrantes. || Madero corto colocado en forma de riostra para asegurar los cuchillos de una armadura en en sentido longitudinal.

cuatripartita. *Ver* **bóveda cuatripartita**.

cubierta. Conjunto de materiales que forman la superficie de una techumbre y preserva el interior de los edificios. Cubre las armaduras y, por tanto, comprende los entablados y los revestimientos exteriores.

cuchillo. La parte de una armadura o cimbra que constituye una armazón rígida, y se pone a trechos, apoyada sobre soleras en los muros, para servir a su vez de apoyo a la cubierta. Modernamente se les suele llamar cerchas.

cúpula. Construcción abovedada de forma semiesférica, o aproximada, que cubre un área poligonal o circular. El paso de la planta cuadrada a la poligonal o circular, en su caso, se realiza mediante pechinas o trompas, organizando un anillo que sirve de soporte al tambor que funciona como realce de la cúpula, pudiendo tener vanos que iluminan su interior. En su parte superior puede terminar en un óculo, que puede quedar abierto o, con mayor frecuencia, ir cubierto por una linterna.

—— **doble.** La que presenta una doble cáscara.

—— **nervada.** La que se compone de una osatura de arcos cruzados, que soportan paños de plementería.

—— **de paños.** La que se levanta sobre planta poligonal, componiéndose de paños de superficie cilíndrica, que se cortan como los de la bóveda en rincón de claustro.

—— **poligonal.** La que tiene una planta poligonal.

—— **simple.** La que se compone de una sola cáscara.

datación por carbono. Técnica experimental de datación basada en la degradación del radiocarbono atmosférico asimilado por las plantas.

descimbrar. Quitar la cimbra que ha servido para construir un arco o bóveda.

desplome. El defecto que presenta una pared, torre o construcción cualquiera por haber perdido la verticalidad.

dintel. La pieza, de cualquier material, que cierra por la parte superior una puerta o una ventana, cargando sobre las jambas y siendo de una pieza en el sentido de su longitud.

directriz. En un arco, para un sistema de planos de corte dado, la línea que une los centros de gravedad de las secciones. Si el arco es esbelto, de espesor constante y los planos se toman normales al intradós, coincide muy aproximadamente con la línea media.

diseño. Dibujo, bosquejo, delineación o traza de una figura sobre una superficie.

dislocación. Forma de colapso que se produce en los arcos muy rebajados por el acortamiento de la directriz a una dimensión menor que la luz debido a los elevados esfuerzos de compresión.

dovela. Cada una de las piedras en forma de cuña, generalmente con una cara convexa y otra cóncava, que constituyen un arco o bóveda. Toda dovela tiene seis caras: la boquilla o intradós, el trasdós, los lechos o juntas de los costados, y las caras verticales que cuando son aparentes se llaman cabezas.

durmiente. En general, todo madero horizontal asentado y que sirve a veces de soporte a otro. *Ver también* **solera**.

egión. Zoquete de madera en forma de cuña que se clava, se sujeta con pasadores, o se ensambla en los pares de una armadura, por debajo de donde deben colocarse las correas, para apoyo de éstas e impedir que se deslicen..

elásticidad. Cualidad de un material que, habiéndose deformado bajo la acción de una fuerza, recupera su forma original al desaparecer aquélla. Esta propiedad suele verifi-

carse en los materiales metálicos hasta un cierto valor de la tensión, el límite elástico. *Ver* **Hooke, ley de, límite elástico**.

embarbillar. Ensamblar dos maderos que se encuentran oblicuamente haciendo en el extremo de uno el corte llamado barbilla para que encaje en la escopladura o farda del otro.

empalme. La unión de dos maderos de igual escuadría por sus extremos, de manera que coincidan sus caras y parezcan continuación uno del otro.

—— **de caja y espiga.** El realizado mediante el rebaje del extremo de uno de ellos (espiga), para introducirlo en la entalladura practicada en el otro (caja).

—— **a media madera.** La unión entre dos maderos cuando cada extremidad está rebajada a la mitad y ajustan entre sí.

empotramiento. Apoyo de una estructura que, idealmente, ni se desplaza ni gira.

empuje. El esfuerzo que ejercen hacia fuera contra sus apoyos o estribos los arcos o bóvedas. Con frecuencia se llama «empuje» a la componente horizontal del empuje total inclinado.

—— **activo.** El que se produce en un arco cuando tratan de acercarse sus apoyos. Corresponde al empuje máximo que puede ejercer o resistir el arco.

—— **pasivo.** El que se produce en un arco cuando se separan ligeramente sus apoyos. Corresponde al empuje mínimo que puede ejercer el arco.

encadenado. Conjunto de sillares dispuestos verticalmente, a manera de machón, en un muro generalmente de mampostería o ladrillo, para reforzarlo. Su uso es frecuente en las esquinas. || Conjunto de sillares dispuestos horizontalmente en el arranque de las cúpulas y atados entre sí mediante grapas de hierro.

energía. Capacidad de producir trabajo. Un cuerpo deformado bajo la acción de una fuerza acumula energía interna de deformación, que se libera al desaparecer aquélla.

enjarje. Arranque común de los diversos arcos o nervios que concurren a un mismo apoyo en las bóvedas de crucería. Con frecuencia las molduras o archivoltas de los arcos concurrentes se compenetran en el arranque labrando su primera hilada en su solo bloque o sillar. También se solían aparejar los enjarjes góticos por hiladas horizontales, hasta la altura en que los nervios vuelan, ya separados unos de otros. El plano que marca esta separación recibe el nombre en los libros anglosajones de tas-de-charge. ||También reciben el nombre de enjarjes, las adarajas, los entrantes y salientes que se dejan en las hiladas de un muro cuya construcción se interrumpe, para que unan bien las fábricas cuando la obra se continúe.

enjuta. Espacio limitado entre los trasdoses de las bóvedas o arcos contiguos, o de uno solo y la vertical del estribo prolongada hacia arriba. *Ver también* **seno** || En general, cada uno de los espacios o superficies triangulares resultantes de inscribir un círculo o elipse en un cuadrado.

ensamble, ensambladura. Unión entre dos maderos.

—— **a caja y espiga.** El realizado mediante el rebaje del extremo de uno de ellos (espiga), para introducirlo en la entalladura practicada en el otro (caja).

—— **embarbillado.** El efectuado realizando barbillas.

—— **a media madera.** Aquel en que se ha practicado un rebaje en cada madero igual a la mitad de su grueso, y de una anchura similar a la del madero contrario.

entablamento. Parte horizontal sustentada de un edificio, compuesto de arquitrabe, friso y cornisa, generalmente sobre columnas, pilares o pilastras. Por extensión, la estructura horizontal compuesta por molduras que sirve de remate a columnas, pilastras o pilares.

éntasis. Engrosamiento del fuste de una columna.

entibar. Colocar un conjunto de codales para contener las paredes de una excavación o cualquier estructura que amenace derrumbamiento.

esbeltez. En un arco, el número adimensional resultante de dividir la luz que salva por su espesor.

—— **límite.** Esbeltez máxima que puede alcanzar un arco de fábrica sometido a un cierto sistema de cargas. Depende de la forma del arco y de las cargas; para un arco de medio punto sometido a su propio peso es, aproximadamente, dieciocho.

espiga. El extremo de un madero o hierro escaseado a escuadra todo alrededor para que encaje en el hueco abierto en otro al que se llama caja, para formar un ensamble a caja y espiga. || La pieza de madera, piedra o hierro que sirve para ligar o enlazar fuertemente a dos sillares de hiladas consecutivas, para lo cual entra en cajas abiertas en el lecho del inferior y el sobrelecho del superior. (Como por ejemplo en los templos griegos en los tambores de las columnas, para evitar que se desplacen por causa de los terremotos.)

espinazo. Nombre dado al encuentro de las plementerías en la parte alta de las bóvedas de crucería. Las líneas de espinazo unen la clave principal con las de los arcos perpiaños y formeros. Puede estar reforzado o no con ligaduras.

esqueleto. Por semejanza con el del cuerpo humano, estructura resistente; lo mismo que armadura o armazón.

estática. Ciencia que se ocupa del estudio del equilibrio de los cuerpos.

estereotomía. La ciencia que trata de los cortes que deben darse a los cuerpos sólidos para que sus diversas porciones reunidas con cierto orden presenten un conjunto estable. Comprende el corte de piedras o cantería y el corte de maderas.

estribo. La fábrica o machón que soporta o contrarresta el empuje de un arco o de una bóveda. En los puentes, las pilas extremas construidas en las márgenes. *Ver también* **botarel, contrafuerte, contrarrestos.**

esviaje. Desviación del eje de una bóveda o arco respecto a la perpendicular al frente de la obra de que forma parte.

excentricidad. Distancia de la fuerza que actúa sobre una sección transversal de una columna, muro, etc., al centro de gravedad de dicha sección.

extradós. *Ver* **trasdós.**

fábrica. Cualquier construcción o parte de ella hecha con piedra o ladrillo recibidos, en general, con mortero o argamasa. También se llaman fábricas las construcciones de adobe o tierra y hormigón en masa.

faldón. Cada una de las dos vertientes que caen sobre las paredes testeras en las cubiertas que tienen cuatro. || Cada vertiente en la armadura principal de un chapitel.

fallo por deslizamiento. El que se produce en la junta entre dos piedras cuando la resultante forma con el plano de la

junta un ángulo superior al ángulo de rozamiento. En las fábricas este fallo se produce raramente.

fallo por articulación. El que se produce cuando la resultante entre dos piedras se sale de los límites de la superficie de la junta. Una dovela «se articula» sobre la otra y el fallo se produce por vuelco.

fisura. *Ver* **grieta**.

flecha. Altura, sagita o montea de un arco. || *Ver* **aguja**.

formero. *Ver* **arco formero**.

frontón. Remate o coronamiento triangular de la fachada de un edificio, cuyos límites son la cornisa del entablamento y las dos rampas oblicuas de una cubierta a dos aguas; el espacio interior, cuando está cerrado, se llama tímpano.

fuerza. Toda acción que tiende a modificar el estado de reposo o movimiento de un cuerpo, o a producir una deformación en el mismo.

funicular. *Ver* **polígono funicular**.

fuste. Parte vertical de la columna comprendida entre la basa y el capitel.

gárgola. Conducto de desagüe de los canales y tejados con el fin de que el agua no resbale por el muro. En el gótico se esculpían con frecuencia con formas humanas y animales.

geminados. Dícese de los elementos dispuestos de dos en dos. (Por ej., columnas geminadas.)

girola. Espacio compuesto por una o más naves que giran tras el presbiterio o capilla mayor de algunas iglesias, como consecuencia de la prolongación de las capillas laterales más allá del transepto, describiendo una planta poligonal o circular, y dando paso a las capillas que a élla se abren.

gran medida. Medida convencional para las partes de una fábrica. Su dimensión es arbitraria. Esta medida se materializaba en una larga vara de medir o pértiga, empleada para replantear físicamente la planta de los edificios.

grapa. Pieza de metal plano con sus dos extremos doblados y aguzados o no, que se emplea para enlazar sillares ó maderos. *Ver también* **encadenado**.

gremio. Corporación formada por maestros, oficiales y aprendices de un mismo oficio; su actividad profesional estaba regida por ordenanzas o estatutos especiales. Sus miembros estaban, sin embargo, sometidos a la jurisdicción de las ciudades en que trabajaban. Éste carácter local es precisamente lo que los diferenciaba de las logias.

grieta. La hendedura que se produce en una fábrica como consecuencia del carácter unilateral del material, por causa de los pequeños movimientos de adaptación a las condiciones de contorno durante la construcción o la vida del edificio. Representan la propia naturaleza del material y, en sí mismas, no tienen por qué ser señal de peligro o alarma.

hastial. La prolongación de las paredes laterales de un edificio hasta el encuentro de la armadura en los tejados o cubiertas de una o dos vertientes.

hilada. Conjunto de piedras o ladrillos, cuyos lechos o tendeles están en un mismo plano o superficie continua. Las juntas normales a dichos lechos se llaman llagas. || Conjunto de dovelas de una misma altura, sentadas en toda la longitud de una bóveda, o en toda su circunferencia si es esférica.

hilera. En una armadura el madero horizontal de cumbrera donde rematan las cabezas de los pares.

hiperestática. Dícese de la estructura que está «estáticamente indeterminada», es decir, cuyos esfuerzos internos no pueden deducirse directamente de las ecuaciones de equilibrio, habiendo que escribir las ecuaciones de compatibilidad y las ecuaciones del material.

Hooke, ley de. Establece que la deformación de un material es directamente proporcional a la carga, es decir que las deformaciones son proporcionales a las tensiones. Esto es así hasta un cierto valor de las tensiones, el límite elástico.

hormigón. Material obtenido al mezclar cemento, agua y áridos minerales de tamaño variable. Los romanos empleaban un cemento derivado de la puzzolana. En la actualidad se emplea normalmente cemento portland.

—— **aligerado.** Aquél que presenta un peso específico inferior a 20 kN/m^3. El aligeramiento se consigue mediante el empleo de áridos ligeros o por la inclusión de burubujas independientes de gas en su interior (hormigón celular).

—— **armado.** Está dotado de una armadura de acero debidamente dimensionada y situada. Puede resistir tanto esfuerzos de compresión como de flexión.

—— **en masa.** El que no contiene en su interior armadura de ninguna clase. Es, pues, una material unilateral pudiendo resistir sólo esfuerzos de compresión.

hueso. *Ver* **asentar a hueso**.

imposta. La faja algo saliente que suele ejecutarse en el arranque de las bóvedas y arcos.

inglete. Unión a escuadra de dos elementos ensamblados mediante cortes a 45°.

intradós. Superficie que limita por su parte inferior un arco o bóveda.

isostática. Dícese de la estructura que está «estáticamente determinada», es decir, cuyos esfuerzos internos pueden deducirse directamente de las ecuaciones de equilibrio.

jabalcón. En general, madero colocado oblícuamente para cubrir un vano o voladizo, o para reforzar otro elemento de una armadura.

jarja. El salmer común a dos arcos formeros contiguos. Los enjarjes de una bóveda.

labrar. Dar a los bloques de piedra que se sacan de las canteras las formas convenientes a su empleo en las obras. *Ver también* **cortes de cantería**, **estereotomía**.

lecho. La superficie superior de todo sillar o dovela sobre la que se apoya o ha de apoyarse otro. La cara inferior del sillar que encima se coloca se llama sobrelecho porque va sobre el lecho.

ligadura. Arco o nervio secundario de una bóveda de crucería, que une la clave principal con las de los terceletes, y con las de los arcos de cabeza (perpiaños y formeros). Son ligaduras curvas las que afectan dicha forma y se entrelazan con los principales, formando complicadas tracerías, características, sobre todo, del último período de la arquitectura gótica.

lima. Ángulo formado por las vertientes o faldones de una cubierta. En una armadura de cubierta, el madero que forma la arista de dicho ángulo.
límite. *Ver* **análisis límite**.
límite elástico. Valor de la tensión por encima del cual las deformaciones son permanentes.
línea de clave. *Ver bajo* **clave**.
línea de empujes. Lugar geométrico de los puntos de corte de la resultante con un sistema de planos dado. Representa la trayectoria de las fuerzas. En los arcos o bóvedas de fábrica, para ser estables, debe estar contenida entre las líneas o superficies de intradós y trasdós. En un arco coincide, muy aproximadamente, con el antifunicular de las cargas que soporta.
línea media. En un arco la línea que equidista de las líneas de intradós y de trasdós.
linterna. Torrecilla de forma varia, pero más alta que ancha, con ventanas y aberturas, que se pone en la parte superior de las cúpulas para servirlas de remate y darles luz.
llagas. En la fábrica de ladrillo se llaman así a las juntas verticales, normales a los tendeles.
llaves. Las piedras o sillares que atizonan o atraviesan todo el espesor de un muro o pilar. Se llaman también perpiaños.
logia. Estructura arquitectónica abierta al menos por un lado, a manera de galería sostenida por columnas o pilares. || En la Edad Media, estructura efímera edificada cerca de las monumentales mientras duraba su construcción donde trabajaban los tracistas, se guardaban las trazas y las herramientas, y donde los canteros libres o «franc-masones» celebraban reuniones de todo tipo. En un sentido más general, corporación de canteros libres que regulaba toda su actividad y que incluso impartía justicia con independencia de las leyes ciudadanas. Esta libertad marca la diferencia con los gremios.
luneto. Hueco practicado en una cúpula o bóveda de cañón por la intersección de otra bóveda menor.
luz. Amplitud de un hueco o vano; puede medirse entre ejes de los apoyos, entre los paramentos internos de ellos, o bien comprendiendo el grueso de los muros o apoyos.

machón. Estribo; macizos de muro, de gran masa y tamaño, en los que estriban arcos y bóvedas. Suelen llamarse machones a los contrafuertes adosados a los muros y también a los botareles de los contrarrestos góticos.
madero. Pieza larga de madera escuadrada o rolliza.
maestro. En las logias o gremios medievales de canteros, grado adquirido tras pasar los años de aprendiz y oficial, y realizar una prueba o examen. El maestro podía ejercer su profesión con libertad dentro del marco de los estatutos de la corporación, y tenía a su cargo e instruía a aprendices y oficiales. Sólo algunos maestros alcanzaban la dirección de la construcción de una obra importante, entonces recibían el nombre de maestros de la obra.
mampostería. Obra de fábrica a base de piedras sin labrar, o poco labradas, aparejadas sin orden de hiladas ni tamaños y unidas con argamasa.
—— **concertada.** Cuando las juntas de unión entre las piedras forman un contacto más o menos uniforme.
mampuesto. Piedra sin labrar o toscamente labrada que puede ser colocada en una obra de fábrica con la mano. (Por ejemplo, la plementería de las bóvedas góticas está construida frecuentemente con mampuestos.)
mecanismo de colapso. Mecanismo en que se convierte una estructura cuando ésta desarrolla un número suficiente de articulaciones que conducen a su hundimiento. En un arco esto sucede cuando se forman cuatro articulaciones.
membrana, teoría de la. Estudio de las cáscaras en la hipótesis de que todos los esfuerzos se transmiten por la superficie media, estando la cáscara, pues, libre de flexiones.
módulo de elasticidad, de Young. Para un material dado, la relación entre la tensión y la deformación. Se expresa en unidades de tensión y es normalmente constante hasta el límite elástico. *Ver también* **Hooke, ley de**.
momento. De una fuerza respecto a un punto. Representa la tendencia a girar de la fuerza respecto a áquel. Es igual al producto de la fuerza por la distancia más corta entre su línea de acción y el punto.
momento flector. En una sección de una barra, es el momento que produce la resultante de las fuerzas (a uno de los lados de la sección) respecto al centro de gravedad de la sección. En un arco sometido a la acción de fuerzas verticales es el producto de la componente horizontal del empuje por la distancia vertical de la línea de empujes a la línea media del arco.
momento plástico. Máximo momento que puede resistir una sección de una barra formada por un material perfectamente plástico.
montante. *Ver* **pie derecho**.
montea. La altura o sagita de los arcos, de las bóvedas y de las armaduras de cubierta. || El trazado de los despieces y detalles de una obra, a tamaño de ejecución, a cuyo fin, en un muro o en el suelo, se dispone un área enlucida, llamada plano de montea, donde se hacen los trazados de los cuales se sacan las plantillas y gálibos para labrar las piezas. En ocasiones, la montea se grababa con punzón en el suelo o paredes de piedra.
mortero. Mezcla de cal o cemento, arena y agua, principalmente.
muro. Obra de fábrica en la que el espesor es pequeño en relación con la altura y anchura, y que en general sirve para cerrar un espacio. Los muros gruesos de fábrica (por ej. los medievales) se componían típicamente de dos hojas de sillería, una exterior y otra interior, con un relleno de mampostería, cascote o ripio. En ocasiones, se disponían perpiaños para unir ambas.
—— **de carga.** El que tiene función estructural o portante, debiendo ser capaz de transmitir ciertas cargas.
—— **de contención.** El que se emplear para contener las tierras, oponiendo su peso al empuje del terreno.

nacimiento. En un arco o bóveda, el arranque.
nervios. En una bóveda nervada los terceletes, ligaduras y arcos cruceros, perpiaños y formeros. En general, cualquier resalto sobre una bóveda. *Ver también* **arco**.
normal. En una sección de una barra la componente de la resultante de las fuerzas (a uno de los lados de la sección) en la dirección de la normal al plano de la sección.
nudillo. En una armadura de palomillas, madero horizontal que se proyecta desde la cabeza del muro de fábrica y apoyado en su extremo sobre un jabalcón recto o curvo. || En

una armadura de pares, madero horizontal o puente que se inserta entre ellos a cierta altura entre la cumbrera y los arranques, con el fin de disminuir la deformación de aquéllos.

óculo. Apertura circular o elíptica en el coronamiento de las cúpulas.
oficial. En las logias o gremios medievales de canteros, segundo escalón después del de aprendiz. Todavía bajo las órdenes del maestro, los oficiales cobraban ya un sueldo y realizaban frecuentes viajes a otras corporaciones, donde trabajaban y visitaban edificios construidos o en construcción.
ojiva. *Ver* **arco ojival**.

palomilla. Especie de ménsula compuesta por tres piezas de madera, una vertical o pie derecho, otra horizontal o nudillo y otra oblicua. *Ver también* **armadura de palomillas**.
pandeo. Fallo por inestabilidad de una columna esbelta cargada a lo largo de su eje.
paño. Cada uno de los diferentes planos que forma al exterior una techumbre. || En una bóveda o cúpula nervada se llaman así a las superficies de fábrica comprendidas entre los nervios. || *Ver* **cúpula de paños**.
par. En una armadura de cubierta, cada uno de los maderos dispuestos con la inclinación del tejado para formar la pendiente del mismo y servir de apoyo a las correas.
paramento. Cualquiera de las dos caras de un muro. || Cualquiera de las caras de un sillar.
pasivo. *Ver* **empuje pasivo**.
pechina. Sistema constructivo que permite superponer dos estructuras de diferente trazado geométrico, como una cúpula octogonal o circular sobre una base cuadrada formada por cuatro arcos torales. Consiste en disponer en los ángulos de asentamiento triángulos o trapecios curvilíneos formados por el anillo de la cúpula y los arcos torales. *Ver también* **trompa**.
pendolón. En un armadura de cubierta el madero vertical que une la hilera con el puente o con el tirante.
peralte. Lo que excede en altura un arco o bóveda de su propia semiluz.
perpiaño. Llave, piedra que, dispuesta a tizón, atraviesa un muro o pared. || *Ver* **arco perpiaño**.
pértiga. Listón de madera que materializaba la gran medida y se empleaba en el replanteo de los edificios góticos. *Ver* **gran medida**.
peso propio. *Ver bajo* **carga**.
pie. Unidad tradicional para medir longitudes que mide aproximadamente un pie de hombre. Las medidas concretas variaban de un lugar a otro: el pie castellano medía unos 28 cm, el antiguo *pied royal* francés medía 32,5 cm y el pie inglés estándar mide unos 30,5 cm
pie derecho. Elemento vertical de una estructura que funciona como soporte.
pila. En un puente de fábrica, el machón situado entre dos arcos consecutivos.
pilastra. Elemento vertical adosado a un muro, de sección rectangular o poligonal, generalmente de función ornamental.
pináculo. Aguja de forma piramidal o cónica que con frecuencia remata los contrafuertes o botareles. Mejoran ligeramente la estabilidad de los botareles, pero, sobre todo, evitan que se produzca el fallo por deslizamiento donde acomete el arbotante. Tienen tendencia a volcar bajo la acción del viento y estaban reforzados habitualmente mediante llaves, grapas o un vástago interior de hierro.
pinjante. Elemento decorativo que pende del centro de una bóveda o techo. *Ver también* **clave pinjante**.
plantilla. Patrón empleado para determinar el perfil de una piedra durante su labra.
plasticidad. Cualidad de un material que sufre deformaciones permanentes bajo la acción de las cargas.
plástico. Dícese del material que al alcanzar un cierto nivel de tensiones (tensión de fluencia) sufre deformaciones permanentes sin incremento de la carga. *Ver* **rígido/plástico**.
platabanda. *Ver* **arco adintelado**.
plementería. Conjunto de los plementos que forman una bóveda de crucería.
plementos. Paños de sillarejo o mampostería, aparejados por hiladas, que cierran los compartimentos de las bóvedas de crucería, cargando sobre los arcos de osatura (nervios). Para los plementos se elegía, en general, la piedra más ligera disponible.
polígono funicular. Forma poligonal que toma un cable no pesante que soporta un sistema de fuerzas deslizantes.
portante. Dícese de la parte de una construcción que transmite o es capaz de transmitir cargas.
presbiterio. En la iglesia cristiana, área en torno al altar, generalmente en lugar elevado, ocupando el ábside de la cabecera de la nave.
principios del análisis límite. Las teorías del análisis límite o plástico convencional pueden aplicarse a las estructuras de fábrica si se acepta que el material cumple las siguientes propiedades: (a) la fábrica no tiene resistencia a tracción, (b) presenta una resistencia a compresión infinita y (c) el fallo por deslizamiento es imposible. En estas condiciones cuando la línea de empujes toca el límite de la fábrica (por ejemplo, en un arco, el trasdós o el intradós) se produce una articulación.
pulgada. Unidad de longitud igual a la doceava parte de un pie. Equivale, aproximadamente, a la longitud de la primera falange del pulgar de un hombre.
puntal. Madero y en general cualquier elemento que funciona como apoyo o sostén provisional de una pared, techo, etc.

reacciones. Fuerzas que actúan en los apoyos de una estructura cargada. En una estructura isostática pueden determinarse simplemente a partir de las ecuaciones de equilibrio. Si la estructura es hiperestática es preciso realizar hipótesis sobre el material y las condiciones de contorno.
resistencia. Capacidad de una estructura para resistir las cargas que debe soportar. || Tensión que puede soportar un material. En general, se distinguen tres tipos de resistencias: de compresión, de tracción y de cortadura.
—— admisible. Tensión a la que puede trabajar el material de una estructura y que garantiza su seguridad. Se ob-

tiene normalmente dividiendo la resistencia de rotura por una cantidad numérica llamada coeficiente de seguridad.
—— **de rotura.** Tensión de compresión a la que se produce la rotura del material. En el análisis límite o plástico se le denomina con frecuencia resistencia última.
retallos. Resalto o escalón realizado en un muro, contrafuerte o estribo, para disminuir su espesor. (Típicamente, los estribos y botareles góticos presentan retallos que van haciendo disminuir su espesor hacia arriba.)
reticular. *Ver* **bóveda reticulada.**
rigidez. Cualidad de una estructura que no se deforma excesivamente bajo la acción de las cargas que tiene que soportar.
rígido/plástico. Dícese del material que no se deforma hasta que la tensión alcanza un cierto valor (tensión de fluencia) a partir del cual las deformaciones crecen indefinidamente sin incremento de la tensión. Las deformaciones son, además, permanentes. En el análisis límite de estructuras de acero suele considerarse el acero como un material rígido/plástico tomándose normalmente como tensión de fluencia el límite elástico del acero.
rígido/unilateral. Dícese del material unilateral que no se deforma bajo la acción de las cargas que actúan sobre él. En el análisis límite de las fábricas se considera que éstas estan formadas por un material rígido/unilateral.
riñón. En un arco o bóveda la zona del trasdós comprendida, aproximadamente, en la primera mitad de su altura. *Ver también* **seno.**
riostra. Pieza cuya función es asegurar la indeformabilidad de una estructura, de un armazón o de un ángulo. Suele ir en general dispuesta en forma oblicua.
ripio. Escombros de albañilería utilizados para relleno, por ejemplo, del núcleo de los gruesos muros de fábrica, entre los paramentos, o sobre los riñones de las bóvedas.
ristrel. Cada uno de los listones de madera sobre los que asentado un entarimado.
rosca. Espesor de un arco o de una bóveda.
rosetón. Ventana circular con decoración calada o cerrada con vidrieras, generalmente en disposición radial. Característico del románico o del gótico.
rótula plástica. *Ver* **articulación plástica.**

salmer. En un arco, la primera dovela, cortada en plano inclinado que inicia el arranque del mismo.
seco, en. *Ver* **asentar en seco.**
seguridad. Una estructura de fábrica es segura si es posible encontrar una línea (o superficie) de empujes contenida en su interior. *Ver* **coeficiente de seguridad geométrico.**
seno. En una bóveda, el espacio que queda entre los riñones y el muro lateral. En las bóvedas nervadas, el espacio definido por los nervios que arrancan del tas-de-charge y ascienden hacia las claves, y el muro lateral; la sección horizontal por el seno a media altura de la bóveda es significativa a la hora de clasificar los distintos tipos de bóvedas. En cualquier tipo de bóveda, suelen estar rellenos de mampostería hasta, aproximadamente, media altura de la bóveda; este relleno tiene una función estructural: suministra un camino para las fuerzas hacia el estribo o arbotante.
sillar. Piedra escuadrada que se emplea en la construcción.
—— **de hoja.** El que no abarca todo el espesor del muro.
sillarejo. Sillar pequeño sin labrar o toscamente labrado, y que no abarca generalmente el espesor del muro.
sillería. Obra de fábrica construida a a base de sillares, en particular cuando éstos están bien labrados. Las juntas son siempre horizontales y verticales. En la auténtica sillería los tendeles son continuos de manera que los sillares de una misma hilada tienen todos la misma altura.
sobrecarga. *Ver bajo* **carga.**
sobrelecho. Cara inferior de un sillar que apoya sobre el lecho del sillar situado debajo.
solera. En una armadura de cubierta, el madero asentado horizontalmente en la parte superior del muro, en el que apoyan los extremos inferiores de los pares y que, con frecuencia, recibe también a intervalos los tirantes cuando los hay. También se llama, a veces, estribo.

tablazón. En una armadura la serie de tablas que forman la cubierta apoyándose encima de los pares, contrapares o cabios.
tajamar. En una pila de un puente, la cara apuntada en forma de quilla, dispuesta para romper la fuerza del agua.
tambor. En el fuste de una columna, cada una de las piedras cilíndricas o troncocónicas, con o sin estrías, que lo componen. || Muro de planta circular o poligonal que soporta una cúpula.
tas-de-charge. Enjarje, arranque común de los diversos arcos o nervios que concurren a un mismo apoyo en las bóvedas de crucería. En general, las hiladas de las piedras son horizontales. || En la literatura anglosajona, el plano que marca el momento en que los nervios se separan.
tendel. Junta horizontal en hiladas de la cantería y de la fábrica de ladrillo.
tensión. La tensión en un punto de un material según una dirección dada es la fuerza que actúa en esa dirección en dicho punto dividido por el área sobre la que actúa (análogamente a la presión en un fluido, la tensión no está asociada a una cierta área, existe en un punto). Por ejemplo, en una columna de sección constante A que soporta una carga P de compresión, la tensión en cualquier punto de una sección transversal de la columna es P/A.
teoremas fundamentales del análisis límite. Si en una construcción de fábrica se cumplen los tres principios del análisis límite pueden demostrarse tres teoremas fundamentales que constituyen la base para el análisis o el cálculo de estructuras de fábrica. *Ver* **principios del análisis límite.**
—— **de la seguridad.** También llamado del «límite inferior». Se ocupa de los estados de equilibrio de la estructura. Una estructura de fábrica es segura (estable) si es posible encontrar una situación de equilibrio compatible con las cargas que no viole la condición de límite (esto es, las cargas se transmiten siempre dentro de la fábrica). La potencia del teorema radica en que esta solución no tiene por qué ser la «real»; basta con encontrar una solución para demostrar que la estructura es segura. Por tanto, un arco de fábrica será seguro si es posible dibujar una línea de empujes contenida en su interior.
—— **de la inseguridad.** También llamado del «límite superior». Se ocupa de los valores de la carga que producen el

colapso de la estructura. Una estructura se hundirá si desarrolla un número suficiente de articulaciones como para convertirse en un mecanismo de colapso cinemáticamente admisible. Un arco de fábrica se hundirá si podemos dibujar una línea de empujes que, tocando alternadamente el trasdós y el intradós, produce un número de articulaciones que le convierten en un mecanismo (cuatro o más).

—— de la unicidad. Establece que la carga de colapso de una estructura es única. Expresado sencillamente: es imposible encontrar en una estructura simultáneamente situaciones de equilibrio y de colapso (la estructura se hunde o no se hunde; no puede sostenerse y hundirse a la vez).

terceletes. Arcos secundarios de las bóvedas de crucería, que arrancan de los apoyos, entre los diagonales y los arcos de cabeza (perpiaños y formeros). En la última época del gótico se aumenta aún más su número, complicando grandemente la tracería formada por las nervaduras.

tijeras. Par de riostras que se cruzan a media madera y que se colocan en las armaduras para poder resistir los esfuerzos de viento.

tirada. Resalto perimetral de dos o tres pulgadas que queda en un sillar al vaciar parcialmente el lecho o sobrelecho. El empleo de tiradas permitía reducir el espesor aparente de las juntas horizontales entre sillares; éstos se disponían sobre calzos rellenándose posteriormente las juntas con una paleta dentada. *Ver* **vicio de construcción.**

tirante. Elemento recto de hierro o madera que se coloca en los arcos o bóvedas y en las armaduras de madera para absorber la componente horizontal del empuje. De esta manera, los apoyos reciben sólo cargas verticales.

tizón. Perpiaño, sillar que atraviesa todo el muro. También, sillar o ladrillo colocado con su dirección más larga perpendicular al paramento.

toba. Piedra de origen volcánico, porosa y de poco peso. Se empleaba con frecuencia en las plementerías góticas.

toral. *Ver* **arco toral.**

trabajos virtuales, principio de los. Establece que si imponemos una serie de pequeños desplazamientos a un cuerpo en equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores será igual al trabajo realizado por las fuerzas interiores. Este principio es la base para demostrar los teoremas fundamentales del análisis límite.

tracción. Esfuerzo o tensión que tiende a estirar un elemento. Los metales y la madera resisten bien la tracción. Sin embargo, la fábrica apenas resiste las tracciones. En el análisis límite de las fábricas se considera su resistencia a tracción nula.

tracería. Formas geométricas de madera o piedra que se empleban en el gótico para rellenar algún tipo de hueco, por ejemplo, en la parte superior de las ventanas, en los rosetones y en algunos arbotantes conectando el nervio inferior curvo con el superior recto. Normalmente es calada aunque puede estar resaltada sobre un fondo plano.

tramo. Cada uno de los espacios en que los arcos fajones o perpiaños dividen una nave.

transepto. En una iglesia de planta cruciforme, cualquiera de los brazos laterales. También se emplea como sinónimo de crucero.

trasdós. En un arco o una bóveda, es la superficie que los limita por la parte superior y externa, concéntricamente con el intradós, o aproximadamente.

trasdosar. Recrecer o rellenar el trasdós de un arco o una bóveda.

traza. Plano, dibujo o diseño de un edificio o parte de él. En la época gótica se realizaban con frecuencia sobre pergamino.

triarticulado. *Ver* **arco triarticulado.**

triforio. Galería abierta en el muro sobre las arcadas de las naves laterales, de menor anchura que dicha nave, a base de ventanas generalmente tríforas. Es típico de la arquitectura gótica.

trompa. Sistema constructivo que permite superponer dos estructuras de diferente trazado geométrico, como una cúpula octogonal o circular sobre una base cuadrada formada por cuatro arcos torales. Consiste en disponer en los ángulos de superposición de ambas estructuras unas pequeñas bovedillas semicónicas proyectadas hacia fuera del muro. *Ver también* **pechina.**

unilateral. Dícese del material que resiste esfuerzos de compresión pero no de tracción. El comportamiento de la fábrica corresponde muy aproximadamente al de un material unilateral.

unión. *Ver* **ensamble.**

vicio de construcción. Disposición constructiva, en general no aparente, que conduce a la aparición de daños en el edificio. Se habla entonces de «construcción viciosa». Un ejemplo de construcción viciosa que se daba en el siglo XIX, consiste en apoyar los sillares, resaltados sus bordes por tiradas, sobre calzos y rellenar posteriormente los lechos y sobrelechos con mortero. La carga se transmite por los calzos que, con frecuencia, agrietan y desportillan los sillares.

viento. *Ver* **carga de viento.**

viga. Elemento estructural lineal que recibe cargas en dirección transversal a su eje longitudinal, produciéndose esfuerzos de flexión y cortadura.

Índice alfabético

Los números en cursiva se refieren a páginas en las que aparece una ilustración relacionada con la entrada correspondiente o con el autor citado.

Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones
***Colección dirigida por* Santiago Huerta**

M. Arenillas et al. **V Congr. Historia de la Construcción**

F. Bores et al. **II Congreso Historia de la Construcción**

A. Casas et al. **I Congreso Historia de la Construcción**

A. Choisy. **El arte de construir en Roma**

A. Choisy. **El arte de construir en Bizancio**

A. Choisy. **El arte de construir en Egipto**

A. Choisy. **Historia de la arquitectura** (en preparación)

I. J. Gil Crespo. **Construcción fortificada**

J. Girón y S. Huerta. **Auguste Choisy (1841-1909). L'architecture et l'art de bâtir**

A. Graciani et al. **III Congr. Historia de la Construcción**

R. Guastavino. **Escritos sobre construcción cohesiva**

J. Heyman. **Análisis de estructuras**

J. Heyman. **El esqueleto de piedra**

J. Heyman. **La ciencia de las estructuras**

J. Heyman. **Estructuras de fábrica. 2 vols**

J. Heyman. **Teoría básica de estructuras**

J. Heyman. **Vigas y pórticos**

S. Huerta. **Arcos, bóvedas y cúpulas**

S. Huerta. (ed.) **IV Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta et al. **VI Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta et al. **VII Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta et al. **VIII Congr. Historia de la Construcción**

S. Huerta. (ed.) **Las bóvedas de Guastavino en América**

S. Huerta. (ed.) **History of the Theory of Structures**

S. Huerta (ed.) **Pr. 1st. Int. Congr. Construction History**

J. Monasterio. **Nueva teórica sobre el empuje de las bóvedas** (en preparación)

J. R. Perronet. **La construcción de puentes en el XVIII**

H. Straub. **Historia de la ingeniería de la construcción** (en preparación)

G. E. Street. **La arquitectura gótica en España**

H. Thunnissen. **Bóvedas: su construcción y empleo en la arquitectura**

A. Truñó. **Construcción de bóvedas tabicadas**

E. Viollet-le-Duc. **La construcción medieval**

R. Willis. **Construcción de bóvedas en la Edad Media**


ISBN: 978-84-9728-545-2